УДК 531.3

НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ И СИНТЕЗА СИСТЕМ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

А.И. Телегин

Из формул вычисления силовых факторов **(ФВСФ)** в сочленениях систем твердых тел (СТТ), представленных в [1], получены их новые виды, на основе которых эффективно выписываются уравнения динамики (УД) конкретных СТТ, а также решаются задачи анализа и синтеза СТТ с заданными динамическими свойствами. Приведены **примеры.**

Введение. Под силовыми факторами, действующими в сочленениях (подвижных соединениях) тел СТТ, понимают силы и моменты сил, обеспечивающие связи этих тел и/или их относительные движения, допустимые связями. Видов (форм представления) ФВСФ в сочленениях СТТ и им соответствующих УД СТТ много, например, только в предлагаемой работе рассмотрены четыре из них. Поэтому важно уяснить достоинства рассматриваемого вида и области его эффективного использования. Уяснить - значит, во-первых, предложить удобную систему понятий, связанную с данным видом ФВСФ или УД, во-вторых, привести примеры эффективного (быстрого и простого) использования формул этого вида для решения тех задач, которые решаются сложнее и с большими затратами времени при помощи других формул, в-третьих, сформулировать класс задач и указать пути их эффективного решения на основе рассматриваемых формул. Такое уяснение начнём с понятия СТТ.

СТТ состоит из абсолютно твердых тел, образующих между собой подвижные соединения, позволяющие каждому телу совершать допустимые связями перемещения относительно соединенного с ним другого тела. Земля (стойка) считается телом отсчета и обозначается через m_0. От любого тела СТТ можно проложить «путь» до m_0 через другие тела и подвижные соединения между ними. В произвольной СТТ (с циклами) у некоторых или всех тел может быть более одного пути до m_0. Для устранения этой неоднозначности будем (мысленно) выполнять операцию размыкания, т.е. разрывать минимальное количество связей (подвижных соединений) или разделять тела на части, так чтобы от каждого тела СТТ или частей разделённого тела существовал единственный путь до m_0. После размыкания получим древовидную СТТ (ДСТТ). Мысленно устраненные (разорванные) связи при переходе от СТТ к ДСТТ необходимо заменить соответствующими реакциями, используя известный в механике принцип освобождения от связей.

В настоящей статье предлагаются такие виды ФВСФ в сочленениях СТТ, которые позволяют эффективно выписывать УД конкретных СТТ и решать задачи анализа динамических свойств и синтеза СТТ (например, манипуляторов, шагающих аппаратов, подъемно-транспортных механизмов) с заданными динамическими свойствами. Здесь под выписыванием УД конкретной СТТ понимается процесс конкретизации УД произвольной (общей) СТТ, не требующий выполнения математических операций (дифференцирования, возведения в степень и т.п.).

1. Используемые понятия, обозначения и утверждения. Для идентификации тел ДСТТ выполняется их нумерация, в процессе которой каждому телу ДСТТ ставится в соответствие число из натурального ряда 1,2, ..., *N*, где *N*- количество тел ДСТТ, к которому относятся и части тел СТТ, возникшие при размыкании циклов. Тело с номером i и его массу условимся обозначать через m_{0i}. Единственное тело ДСТТ, сочленённое m_{0i} и следующее за m_{0i} на пути к m_0, будем называть базовым телом или базой для m_{0i}. Все остальные тела, сочленённые с m_{0i} (если они есть), будем называть смежными телами для m_{0i}. Тело ДСТТ, не имеющее смежных тел, называется концевым. Таким образом, у каждого тела ДСТТ есть единственное базовое тело (база) и может быть одно или несколько смежных тел.

Для описания движения ДСТТ в каждом теле m_{0i} выберем полюс, т.е. точку O_i, жестко связанную с m_{0i}. Через O_{0i} обозначим точку, с которой совпадает O_i до начала относительного движения m_{0i}, т.е. движения m_{0i} относительно своей базы. Точку O_{0i} будем называть базовой точкой i-го тела и жестко связывать ее с базой /-го тела.

Все тела ДСТТ, образующие путь от m_0 до m_{0i}, несут на себе m_{0i}, поэтому эти тела по отношению к m_{0i} будем называть несущими телами. Несомыми телами для m_{0i} будем называть те тела ДСТТ, которые несёт на себе тело m_{0i}, т.е. от которых путь до стойки (до тела m_0) проходит через m_{0i}. Обозначим через m_j сумму массы j-го тела и масс всех его несомых тел. Если тела m_{0j}, m_{0k}, ..., m_{0l} являются смежными для m_{0i}, то, мысленно поместив в их базовые точки O_{0j}, O_{0k}, ..., O_{0l} массы m_j, m_k, ..., m_l соответственно, получим i-е дополненное тело (ДТ). Каждое ДТ имеет массу, статический момент и тензор инерции. Масса i-го ДТ вычисляется по формуле

$$m_i = m_{0i} + \sum_{j,i} m_j = \sum_{j \geq i} m_{0j}, \tag{1}$$

где $\sum\limits_{j\geq i} m_{0j}$ - знак суммирования по номеру i-го тела и всех его несомых тел, т.е. здесь индекс суммирования у пробегает номера всех несомых тел для i-го тела, начиная со значения $j=i$; $\sum\limits_{j,i} m_j$ - знак суммирования по номерам всех смежных тел для m_{0i} (для концевого тела в этой сумме слагаемых нет).

Статический момент i-го ДТ относительно точки O_{0i} вычисляется по формулам

$$\overline{m}_i = m_{0i}\overline{r}_i + \sum_{j,i} m_j \overline{R}_j = m_i\, \overline{O_{0i}C}_{di}, \tag{2}$$

где $\overline{r}_i = \overline{O_{0i}C}_i$, $\overline{R}_j = \overline{O_{0j-1}O}_{0j}$ - вектор с началом в базовой точке базы j-го тела и с концом в базовой точке j-го тела; C_i - центр масс -го тела; C_{di} - центр масс i-го ДТ.

Тензор инерции /-го ДТ относительно точки O_{0i} вычисляется по формуле

$$I_i = I_i^c + m_{0i}\left(r_i^2 E - \overline{r}_i\overline{r}_i\right) + \sum_{j,i} m_j\left(R_j^2 E - \overline{R}_j\overline{R}_j\right), \tag{3}$$

где I_i^c - тензор инерции i-го тела относительно точки C_i; a^2 - квадрат длины вектора $\overline{a}$; $\overline{a}\overline{a}$ – диадное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{a}$; E - единичная матрица.

В дальнейшем для произвольного i-го тела рассматриваются следующие радиус-векторы $\overline{O_{0i}C}_i$, $\overline{O_{0i}C}_{di}$, $\overline{O_{0i}O}_{0i+1}$, $\overline{O_{0i}O}_{0j}, \ldots$ с началом в базовой точке i-го тела. Если m_{0i} несёт на себе $m_{ок}$, то радиус-вектор $\overline{R}_{ik} = \overline{O_{0i}O}_{0k}$ можно вычислить по формулам

$$\overline{R}_{ik} = \sum_{j,i}^{k-1} \overline{O_{0j}O}_{0j+1} = \sum_{j,i+1}^{k} \overline{O_{0j-1}O}_{0j} = \sum_{j,i+1}^{k} \overline{R}_j, \tag{4}$$

где $\sum\limits_{j,\iota}^{k-1} a_j$ - знак суммирования величины a_j по номерам i-го отрезка несущей цепочки *к-го* тела, индекс суммирования j пробегает номера несущих для m_{0k} тел в пути от /-го до *к-го* тела. Здесь и везде в дальнейшем для индексов, принимающих значения номеров тел ДСТТ, операции декремента (вычитания единицы) и инкремента (прибавления единицы) являются относительными, т.е., во-первых, численное значение индекса i -1 (величин типа m_{i-1}, $\overline{R}_{ji-1}$ или в знаках суммирования типа $\sum\limits_i^k b_i \sum\limits_{j,i-1}^k a_j$) равно номеру базы i-го тела, например, если /=5, то число i -1 не обязательно равно 4, так как у m_{05} базой может быть m_{03} или m_{01}, или тело с другим номером, зависящим от структуры ДСТТ и способа нумерации тел, во-вторых, численное значение индекса

$i+1$ зависит от значения верхнего предела в знаке суммирования, так как если у i-го тела несколько смежных тел, то только верхний предел суммирования указывает, какое из смежных тел (для i-го тела) необходимо рассматривать, например, во второй сумме $\sum\limits_{k\ge i}\sum\limits_{j,i+1}^{k}a_{kj}$, нижний предел суммирования $i+1$ зависит от k. В [1] доказано

Утверждение 1. Абсолютное ускорение точки C_k ДСТТ вычисляется по формулам

$$\overline{W}_{ck}=\overline{W}_{0k}+\overline{W}_k^c, \tag{5}$$

$$\overline{W}_{0k}=\sum_i^{k-1}\left[\overline{W}_{ri}+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{R}_{i+1}+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{R}_{i+1}+2\overline{V}_{ri}\right)\right], \tag{6}$$

$$\overline{W}_k^c=\overline{W}_{rk}+\overline{\varepsilon}_k\times\overline{r}_k+\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{r}_k+2\overline{V}_{rk}\right), \tag{7}$$

где $\overline{V}_{ri},\overline{W}_{ri}$ - скорость и ускорение поступательного перемещения i-го тела относительно своей базы, вычисленные путём двукратного дифференцирования по t вектора $\overline{O_{0i}O_i}$ в системе координат, жёстко связанной с i-м телом; $\overline{\omega}_i,\overline{\varepsilon}_i$ - абсолютные угловые скорость и ускорение i-го тела; $\sum\limits_i^{k-1}a_i$ - знак суммирования величин a_i по номерам несущей цепочки *k-го* тела.

Пример 1. Точка C_1 движется произвольно относительно системы координат (СК) *OXYZ,* жёстко связанной с землей (со стойкой). Известны цилиндрические координаты r, φ, z точки C_1 в СК *OXYZ.* Найдём формулу вычисления абсолютного ускорения точки C_1. Для этого отложим из точки C_1 три единичных вектора $\overline{i}_1$, $\overline{j}_1$, $\overline{k}_1$, где $\overline{i}_1$ - орт радиус-вектора $\overline{OC}_{p1}$ длиной $r=\left|\overline{OC}_{p1}\right|$, проведённого из точки O до точки C_{p1}, т.е. до проекции C_1 на координатную плоскость *OXY,* $\overline{k}_1$ - орт оси *OZ,* $\overline{j}_1$ - вектор, получающийся из $\overline{i}_1$ поворотом последнего на угол $\pi/2$ вокруг $\overline{k}_1$. Тогда можно считать, что $O_{01}=O$, $O_1=C_1$ и $C_1\overline{i}_1\overline{j}_1\overline{k}_1$ - репер тела m_{01}, которое движется относительно своей базы (стойки). Следовательно, положив в утверждении 1 $k=1$, получим для искомого вектора следующую расчётную формулу:

$$\overline{W}_{c1}=\overline{W}_{r1}+\overline{\varepsilon}_1\times\overline{r}_1+\overline{\omega}_1\times\left(\overline{\omega}_1\times\overline{r}_1+2\overline{V}_{r1}\right),$$

где $\overline{r}_1=\overline{O_{01}C_1}=r\overline{i}_1+z\overline{k}_1$, $\overline{V}_{r1}=\dot{r}\overline{i}_1+\dot{z}\overline{k}_1$, $\overline{W}_{r1}=\ddot{r}\overline{i}_1+\ddot{z}\overline{k}_1$, $\overline{\omega}_1=\dot{\varphi}\overline{k}_1$, $\overline{\varepsilon}_1=\ddot{\varphi}\overline{k}_1$.

Выполнив элементарные вычисления, получим искомую формулу

$$\overline{W}_{c1}=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\overline{i}_1+\left(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\overline{j}_1+\ddot{z}\overline{k}_1.$$

Два известных [1] вида ФВСФ в сочленениях СТТ представляет

Утверждение 2. Относительные силовые факторы *к-го* тела, т.е. сила $\overline{F}_k$ и момент силы $\overline{M}_k$ относительно точки O_{0k}, действующие на *к-е* тело со стороны его базы, вычисляются по следующим рекуррентным формулам

$$\overline{F}_k=m_{0k}\left(\overline{W}_{ck}-\overline{g}\right)-\overline{F}_{rk}+\sum_{j,k}\overline{F}_j,$$

$$\overline{M}_k=m_{0k}\overline{r}_k\times\left(\overline{W}_{ck}-\overline{g}\right)+I_k^c\cdot\overline{\varepsilon}_k+\overline{\omega}_k\times I_k^c\cdot\overline{\omega}_k-\overline{M}_{rk}+\sum_{j,k}\left(\overline{R}_{kj}\times\overline{F}_j+\overline{M}_j\right),$$

или по конечным формулам

$$\overline{F}_k=\sum_{i\ge k}\left(m_{0i}\overline{W}_{ci}-\overline{F}_{ri}\right)-m_k\overline{g}, \tag{8}$$

$$\overline{M}_k=\sum_{i\ge k}\left[m_{0i}\overline{R}_{ki}^c\times\left(\overline{W}_{ci}-\overline{g}\right)+I_i^c\cdot\overline{\varepsilon}_i+\overline{\omega}_i\times I_i^c\cdot\overline{\omega}_i-\overline{M}_{ri}-\overline{R}_{ki}\times\overline{F}_{ri}\right], \tag{9}$$

где $\overline{g}$ - ускорение свободного падения, $\overline{R}_{ki}^c=\overline{O_{0k}C_i}$, $\overline{F}_{ri},\overline{M}_{ri}$ - главный вектор и момент (относительно точки O_{0i}) внешних сил и сил реакций, действующих на i-е тело со стороны внешней среды и мысленно разорванных связей при переходе от СТТ, взаимодействующей с внешней средой, к изолированной ДСТТ.

2. Рекуррентные формулы вычисления $\overline{F}_k$, $\overline{M}_k$. Используя утверждение 1 и формулы (8), (9) утверждения 2, докажем

Утверждение 3. Векторы $\overline{F}_k$, $\overline{M}_k$ можно вычислять по следующим формулам;

$$\overline{F}_k = \overline{A}_k + m_k\overline{W}_{0k} - m_k\overline{g} - \sum_{i\ge k}\overline{F}_{ri}, \tag{10}$$

$$\overline{M}_k = \overline{B}_k - \sum_{i\ge k}\left(\overline{M}_{ri} + \overline{R}_{ki}\times\overline{F}_{ri}\right), \tag{11}$$

где векторы $\overline{A}_k, \overline{B}_k$ вычисляются по обратным рекуррентным формулам $(k = N, N-1, \ldots, 1)$

$$\overline{A}_k = \sum_{i,k}\overline{A}_i + m_k\overline{W}_{rk} + \overline{\varepsilon}_k\times\overline{m}_k + \overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{m}_k\right) + 2m_k\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}, \tag{12}$$

$$\overline{B}_k = \sum_{i,k}\overline{B}_i + \overline{m}_k\times\left(\overline{W}_{0k} + \overline{W}_{rk} + 2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk} - \overline{g}\right) + I_k\cdot\overline{\varepsilon}_k + \overline{\omega}_k\times I_k\cdot\overline{\omega}_k +$$
$$+\sum_{i,k}\overline{R}_i\times\sum_{j\ge i}\left[m_j\overline{W}_{rj} + \overline{\varepsilon}_j\times\overline{m}_j + \overline{\omega}_j\times\left(\overline{\omega}_j\times\overline{m}_j\right) + 2m_j\overline{\omega}_j\times\overline{V}_{rj}\right], \tag{13}$$

а вектор абсолютного ускорения поступательного перемещения точки O_{0i} вычисляется по прямой рекуррентной формуле *(i* = 2, 3, …, *N)*, $\overline{W}_{01} = 0$,

$$\overline{W}_{0i} = \overline{W}_{0i-1} + \overline{W}_{ri-1} + \overline{\varepsilon}_{i-1}\times\overline{R}_i + \overline{\omega}_{i-1}\times\left(\overline{\omega}_{i-1}\times\overline{R}_i\right) + 2\overline{\omega}_{i-1}\times\overline{V}_{ri-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Используем обозначение $\overline{a}_{ij} = \overline{W}_{ri} + \overline{\varepsilon}_i\times\overline{R}_j + \overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{R}_j\right) + 2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}$. Тогда, учитывая (5)–(7), получим $\sum_{i\ge k} m_{0i}\overline{W}_{ci} = \sum_{i\ge k} m_{0i}\sum_{j}^{i-1}\overline{a}_{jj+1} + \sum_{i\ge k} m_{0i}\overline{W}_i^c$. Преобразуем двойную сумму полученного выражения. Для этого разобьём сумму по j на две части (до k–1 и от k до i–1), учтём (1) и сдвинем интервал суммирования *(k, i*–1*)* величины $a_{j,j+1}$ на единицу вправо, уменьшив индекс суммируемой величины на единицу. Тогда получим

$$\sum_{i\ge k} m_{0i}\sum_{j}^{i-1}\overline{a}_{jj+1} = \left(\sum_{i\ge k} m_{0i}\right)\sum_{j}^{k-1}\overline{a}_{jj+1} + \sum_{i\ge k} m_{0i}\sum_{j,k}^{i-1}\overline{a}_{jj+1} = m_k\sum_{j}^{k-1}\overline{a}_{jj+1} + \sum_{i\ge k} m_{0i}\sum_{j,k+1}^{i}\overline{a}_{j-1,j}.$$

К последней двойной сумме применим формулы изменения порядка суммирования

$$\sum_{i\ge k} a_i\sum_{j,k+1}^{i} b_j = \sum_{j>k} b_j\sum_{i\ge j} a_i, \qquad \sum_{j>k} a_{j,j-1} = \sum_{i\ge k}\ \sum_{j,i} a_{ji},$$

доказанные в [1]. Тогда с учётом (1) получим

$$\sum_{i\ge k} m_{0i}\sum_{j,k+1}^{i}\overline{a}_{j-1,j} = \sum_{j>k}\left(\sum_{i\ge j} m_{0i}\right)\overline{a}_{j-1,j} = \sum_{j>k} m_j\overline{a}_{j-1,j} = \sum_{i\ge k}\ \sum_{j,i} m_j\overline{a}_{ij}. \tag{15}$$

Таким образом,

$$\sum_{i\ge k} m_{0i}\overline{W}_{ci} = m_k\sum_{j}^{k-1}\overline{a}_{jj+1} + \sum_{i\ge k}\ \sum_{j,i} m_j\overline{a}_{ij} + \sum_{i\ge k} m_{0i}\overline{W}_i^c =$$
$$= m_k\overline{W}_{0k} + \sum_{i\ge k}\left\{ m_{0i}\left[\overline{W}_{ri} + \overline{\varepsilon}_i\times\overline{r}_i + \overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{r}_i\right) + 2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right] + \sum_{j,i} m_j\left[\overline{W}_{ri} + \overline{\varepsilon}_i\times\overline{R}_j +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{R}_j\right) + 2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right]\right\} = m_k\overline{W}_{0k} + \sum_{i\ge k}\left\{\left(m_{0i} + \sum_{j,i} m_j\right)\left(\overline{W}_{ri} + 2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right) +\right.$$
$$\left. + \overline{\varepsilon}_i\times\left(m_{0i}\overline{r}_i + \sum_{j,i} m_j\overline{R}_j\right) + \overline{\omega}_i\times\left[\overline{\omega}_i\times\left(m_{0i}\overline{r}_i + \sum_{j,i} m_j\overline{R}_j\right)\right]\right\}.$$

Отсюда, используя обозначения (1) и (2), получим

$$\sum_{i\ge k} m_{0i}\overline{W}_{ci} = m_k\overline{W}_{0k} + \sum_{i\ge k}\left[m_i\overline{W}_{ri} + \overline{\varepsilon}_i\times\overline{m}_i + \overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{m}_i\right) + 2m_i\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right]. \tag{16}$$

Если $\overline{A}_k = \sum_{i \ge k} \left[m_i \overline{W}_{ri} + \overline{\varepsilon}_i \times \overline{m}_i + \overline{\omega}_i \times (\overline{\omega}_i \times \overline{m}_i) + 2 m_i \overline{\omega}_i \times \overline{V}_{ri} \right]$, то $\sum_{i \ge k} m_{0i} \overline{W}_{ci} = m_k \overline{W}_{0k} + \overline{A}_k$ и доказываемая формула (10) следует из (8), а формула (12) следует из очевидного выражения

$$A_k = \sum_{i \ge k} a_i = a_k + \sum_{i,k} \sum_{j \ge i} a_j = a_k + \sum_{i,k} A_i . \qquad (17)$$

Доказываемая формула (14) следует из (6) после применения очевидного выражения

$$a_i = \sum_{j}^{i-1} b_j = \sum_{j}^{i-2} b_j + b_{i-1} = a_{i-1} + b_{i-1} .$$

Докажем формулы (11) и (13), выполнив тождественные преобразования формулы (9). Заметим, что $\overline{R}^c_{kk} = \overline{r}_k$, $\overline{R}^c_{kj} = \overline{R}_{ki} + \overline{R}^c_{ij}$ и используем (для сокращения записей) обозначение $\overline{W}^g_{ci} = \overline{W}_{ci} - \overline{g}$. Тогда с учетом (17) получим

$$\sum_{i \ge k} m_{0i} \overline{R}^c_{ki} \times (\overline{W}_{ci} - \overline{g}) = m_{0k} \overline{R}^c_{kk} \times \overline{W}^g_{ck} + \sum_{i,k} \sum_{j \ge i} m_{0j} (\overline{R}_{ki} + \overline{R}^c_{ij}) \times \overline{W}^g_{cj} =$$

$$= m_{0k} \overline{r}_k \times \overline{W}^g_{ck} + \sum_{i,k} \overline{R}_i \times \sum_{j \ge i} m_{0j} \overline{W}^g_{cj} + \sum_{i,k} \sum_{j \ge i} m_{0j} \overline{R}^c_{ij} \times \overline{W}^g_{cj} . \qquad (18)$$

Здесь в силу относительности операции декремента индекса учтено, что если индекс i пробегает номера тел, смежных k-му, то $\overline{R}_{ki} = \overline{O_{0k} O_{0i}} = \overline{O_{0i-1} O_{0i}} = \overline{R}_i$, таким образом базой i-го тела является k-е тело, т.е. номер $(i-1)$ равен k. По этой же причине и с учетом (14) получим

$$\sum_{i,k} m_i \overline{R}_i \times \overline{W}_{0i} = \sum_{i,k} m_i \overline{R}_i \times \left[\overline{W}_{0k} + \overline{W}_{rk} + \overline{\varepsilon}_k \times \overline{R}_i + \overline{\omega}_k \times (\overline{\omega}_k \times \overline{R}_i) + 2 \overline{\omega}_k \times \overline{V}_{rk} \right]. \qquad (19)$$

Доказываемая формула (11) следует из (9), если

$$\overline{B}_k = \sum_{i \ge k} \left[m_{0i} \overline{R}^c_{ki} \times (\overline{W}_{ci} - \overline{g}) + I^c_i \cdot \overline{\varepsilon}_i + \overline{\omega}_i \times I^c_i \cdot \overline{\omega}_i \right].$$

Учитывая (17) и (18), получим

$$\overline{B}_k = \sum_{i \ge k} m_{0i} \overline{R}^c_{ki} \times \overline{W}^g_{ci} + I^c_k \cdot \overline{\varepsilon}_k + \overline{\omega}_k \times I^c_k \cdot \overline{\omega}_k + \sum_{i,k} \sum_{j \ge i} (I^c_j \cdot \overline{\varepsilon}_j + \overline{\omega}_j \times I^c_j \cdot \overline{\omega}_j) =$$

$$= m_{0k} \overline{r}_k \times \overline{W}^g_{ck} + I^c_k \cdot \overline{\varepsilon}_k + \overline{\omega}_k \times I^c_k \cdot \overline{\omega}_k + \sum_{i,k} \overline{R}_i \times \sum_{j \ge i} m_{0j} \overline{W}^g_{cj} +$$

$$+ \sum_{i,k} \sum_{j \ge i} (m_{0j} \overline{R}^c_{ij} \times \overline{W}^g_{cj} + I^c_j \cdot \overline{\varepsilon}_j + \overline{\omega}_j \times I^c_j \cdot \overline{\omega}_j) = \sum_{i,k} \overline{B}_i + I^c_k \cdot \overline{\varepsilon}_k + \overline{\omega}_k \times I^c_k \cdot \overline{\omega}_k + \overline{D}_k , \qquad (20)$$

где $\overline{D}_k = m_{0k} \overline{r}_k \times (\overline{W}_{ck} - \overline{g}) + \sum_{i,k} \overline{R}_i \times \sum_{j \ge i} m_{0j} (\overline{W}_{cj} - \overline{g})$.

Учитывая (1) и (16), получим

$$\overline{D}_k = m_{0k} \overline{r}_k \times (\overline{W}_{ck} - \overline{g}) + \sum_{i,k} \overline{R}_i \times \left(\sum_{j \ge i} m_{0j} \overline{W}_{cj} - m_i \overline{g} \right) =$$

$$= m_{0k} \overline{r}_k \times \overline{W}_{ck} - \left(m_{0k} \overline{r}_k + \sum_{i,k} m_i \overline{R}_i \right) \times \overline{g} + \sum_{i,k} \overline{R}_i \times m_i \overline{W}_{0i} + \overline{E}_k ,$$

где $\overline{E}_k = \sum_{i,k} \overline{R}_i \times \sum_{j \ge i} \left[m_j \overline{W}_{rj} + \overline{\varepsilon}_j \times \overline{m}_j + \overline{\omega}_j \times (\overline{\omega}_j \times \overline{m}_j) + 2 m_j \overline{\omega}_j \times \overline{V}_{rj} \right]$. Теперь, используя (5), (2), (19) и (7), получим

$$\overline{D}_k = m_{0k} \overline{r}_k \times (\overline{W}_{0k} + \overline{W}^c_k) - \overline{m}_k \times \overline{g} + \sum_{i,k} m_i \overline{R}_i \times \left[\overline{W}_{0k} + \overline{W}_{rk} + \overline{\varepsilon}_k \times \overline{R}_i + \overline{\omega}_k \times (\overline{\omega}_k \times \overline{R}_i) + 2 \overline{\omega}_k \times \overline{V}_{rk} \right] + \overline{E}_k =$$

$$= \left(m_{0k} \overline{r}_k + \sum_{i,k} m_i \overline{R}_i \right) \times \overline{W}_{0k} - \overline{m}_k \times \overline{g} + m_{0k} \overline{r}_k \times \left[\overline{W}_{rk} + \overline{\varepsilon}_k \times \overline{r}_k + \overline{\omega}_k \times (\overline{\omega}_k \times \overline{r}_k) + 2 \overline{\omega}_k \times \overline{V}_{rk} \right] +$$

$$+ \sum_{i,k} m_i \overline{R}_i \times \left[\overline{W}_{rk} + \overline{\varepsilon}_k \times \overline{R}_i + \overline{\omega}_k \times (\overline{\omega}_k \times \overline{R}_i) + 2 \overline{\omega}_k \times \overline{V}_{rk} \right] + \overline{E}_k =$$

$$=\overline{m}_k\times\left(\overline{W}_{0k}-\overline{g}\right)+\left(m_{0k}\overline{r}_k+\sum_{i,k}m_i\overline{R}_i\right)\times\left(\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}\right)+m_{0k}\overline{r}_k\times\left(\overline{\varepsilon}_k\times\overline{r}_k\right)+$$

$$+\sum_{i,k}m_i\overline{R}_i\times\left(\overline{\varepsilon}_k\times\overline{R}_i\right)+m_{0k}\overline{r}_k\times\left[\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{r}_k\right)\right]+\sum_{i,k}m_i\overline{R}_i\times\left[\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{R}_i\right)\right]+\overline{E}_k.$$

Используя известные равенства [2]

$$\overline{a}\times\left(\overline{\varepsilon}\times\overline{a}\right)=\left(a^2E-\overline{a}\overline{a}\right)\cdot\overline{\varepsilon},\quad \overline{a}\times\left[\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{a}\right)\right]=\overline{\omega}\times\left(a^2E-\overline{a}\overline{a}\right)\cdot\overline{\omega}$$

и учитывая (2), из последнего выражения для $\overline{D}_k$ получим

$$\overline{D}_k=\overline{m}_k\times\left(\overline{W}_{0k}+\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}-\overline{g}\right)+\left[m_{0k}\left(r_k^2E-\overline{r}_k\overline{r}_k\right)+\sum_{i,k}m_i\left(R_i^2E-\overline{R}_i\overline{R}_i\right)\right]\cdot\overline{\varepsilon}_k+$$

$$+\overline{\omega}_k\times\left[m_{0k}\left(r_k^2E-\overline{r}_k\overline{r}_k\right)+\sum_{i,k}m_i\left(R_i^2E-\overline{R}_i\overline{R}_i\right)\right]\cdot\overline{\omega}_k+\overline{E}_k.$$

Подставим это выражение в (20) и используем (3), тогда получим

$$\overline{B}_k=\sum_{i,k}\overline{B}_i+\overline{m}_k\times\left(\overline{W}_{0k}+\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}-\overline{g}\right)+I_k\cdot\overline{\varepsilon}_k+\overline{\omega}_k\times I_k\cdot\overline{\omega}_k+\overline{E}_k,$$

что с учетом введенного обозначения $\overline{E}_k$ доказывает справедливость формулы (13). *Утверждение доказано.*

3. Конечные формулы вычисления $\overline{F}_k$, $\overline{M}_k$ через абсолютные угловые ускорения тел. Формулы (10)—(14) эффективно использовать при численном анализе динамических свойств СТТ. Для решения задач синтеза рекуррентные соотношения (12) – (14) использовать проблематично, здесь нужны конечные формулы с явно выраженными параметрами, на множестве которых осуществляется процесс синтеза. К ним относятся массо-геометрические $m_i,\overline{m}_i,I_i$ параметры i-го ДТ и геометрические параметры $\overline{R}_i$ $\left(1\le i\le N\right)$. В доказательстве следующего утверждения из этих параметров образованы массо-геометрические параметры подсистем ДСТТ.

Под j-й подсистемой ДСТТ будем понимать *j-е* тело вместе со всеми его несомыми телами. Введем в обращение следующие величины:

$$\overline{m}_j^c=\sum_{i\ge j}\overline{m}_i \tag{21}$$

- статический моменту j-й подсистемы относительно базовой точки O_{0j} *j-то* тела;

$$\overline{m}_{kj}^c=m_j\overline{R}_{kj}+\overline{m}_j^c \tag{22}$$

- статический момент j-й подсистемы относительно базовой точки O_{0k} *k-го* несущего тела;

$$\overline{I}_{kj}=\overline{m}_j\times\overline{R}_{kj}+\sum_{i,j}\overline{R}_i\times\overline{m}_i^c \tag{23}$$

- вектор инерции j-й подсистемы относительно точки O_{0k};

$$I_{kj}=I_j+\overline{m}_j\cdot\overline{R}_{kj}E-\overline{m}_j\overline{R}_{kj}+\sum_{i,j}\left(\overline{R}_i\cdot\overline{m}_i^cE-\overline{R}_i\overline{m}_i^c\right) \tag{24}$$

- матрица инерцииу j-го ДТ относительно точки O_{0k}.

Величины (21)—(24) появляются при переходе от рекуррентных соотношений (12)—(14) к соответствующим конечным соотношениям в процессе приведения подобных при ускорениях (скоростях), когда доказывается

Утверждение 4. Векторы $\overline{F}_k$, $\overline{M}_k$ можно вычислить по следующим конечным формулам

$$\overline{F}_k=m_k\overline{W}_{0k}+\sum_{i\ge k}\left[m_i\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right)+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{m}_i+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{m}_i\right)\right]-m_k\overline{g}-\sum_{i\ge k}\overline{F}_{ri}, \tag{25}$$

$$\overline{M}_k=\overline{m}_k^c\times\overline{W}_{0k}+\sum_{i\ge k}\left[\overline{m}_{ki}^c\times\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right)+I_{ki}\cdot\overline{\varepsilon}_i+\overline{\omega}_i\times I_{ki}\cdot\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_i\overline{\omega}_i\cdot\overline{I}_{ki}\right]-\overline{m}_k^c\times\overline{g}-$$

$$-\sum_{i\ge k}\left(\overline{M}_{ri}+\overline{R}_{ki}\times\overline{F}_{ri}\right), \tag{26}$$

где абсолютное ускорение $\overline{W}_{0k}$ точки O_{0k} вычисляется по формуле (6).

Доказательство. Рекуррентную формулу (12) с учетом (17) можно представить в конечном виде $\overline{A}_k=\sum\limits_{i\ge k}\left[m_i\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right)+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{m}_i+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{m}_i\right)\right]$. Отсюда в силу (10) следует доказываемое выражение (25). Аналогично из (13) с учетом (17), (11) и (6) получим

$$\overline{M}_k=\sum_{i\ge k}\left[\overline{m}_i\times\sum_{j}^{i-1}\left(\overline{W}_{rj}+\overline{\varepsilon}_j\times\overline{R}_{j+1}+\overline{\omega}_{vj}\right)+\overline{m}_i\times\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}-\overline{g}\right)+\right.$$

$$\left.+I_i\cdot\overline{\varepsilon}_i+\overline{\omega}_i\times I_i\cdot\overline{\omega}_i-\overline{M}_{ri}-\overline{R}_{ki}\times\overline{F}_{ri}+\sum_{l,i}\overline{R}_l\times\sum_{j\ge l}\left(m_j\overline{W}_{rj}+\overline{\varepsilon}_j\times\overline{m}_j+\overline{\omega}_{cj}\right)\right],\qquad(27)$$

где для сокращения записей использованы обозначения

$$\overline{\omega}_{vj}=\overline{\omega}_j\times\left(\overline{\omega}_j\times\overline{R}_{j+1}+2\overline{V}_{rj}\right),\quad \overline{\omega}_{cj}=\overline{\omega}_j\times\left(\overline{\omega}_j\times\overline{m}_j+2m_j\overline{V}_{rj}\right).$$

Выполнив аналогичные преобразования, как и в начале доказательства утверждения 3 вплоть до формулы (15), получим для двойной суммы выражения (27) с учетом обозначения (21) следующее представление:

$$\sum_{i\ge k}\overline{m}_i\times\sum_{j}^{i-1}\left(\overline{W}_{rj}+\overline{\varepsilon}_j\times\overline{R}_{j+1}+\overline{\omega}_{vj}\right)=\overline{m}_k^c\times\sum_{j}^{k-1}\left(\overline{W}_{rj}+\overline{\varepsilon}_j\times\overline{R}_{j+1}+\overline{\omega}_{vj}\right)+$$

$$+\sum_{i\ge k}\ \sum_{j,i}\overline{m}_j^c\times\left[\overline{W}_{ri}+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{R}_j+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{R}_j\right)+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right].\qquad(28)$$

Для преобразования тройной суммы выражения (27) воспользуемся следующими формулами изменения порядка суммирования:

$$\sum_{i\ge k}\ \sum_{l,i}a_l\sum_{j\ge l}b_j=\sum_{i>k}a_i\sum_{j\ge i}b_j=\sum_{j\ge k}\left(\sum_{i,k+1}^{j}a_i\right)b_j=\sum_{j>k}\left(\sum_{i,k}^{j-1}a_{i+1}\right)b_j.$$

Тогда получим

$$\sum_{i\ge k}\ \sum_{l,i}\overline{R}_l\times\sum_{j\ge l}\left(m_j\overline{W}_{rj}+\overline{\varepsilon}_j\times\overline{m}_j+\overline{\omega}_{cj}\right)=\sum_{i>k}\left(\sum_{i,k}^{j-1}\overline{R}_{i+1}\right)\times\left(m_j\overline{W}_{rj}+\overline{\varepsilon}_j\times\overline{m}_j+\overline{\omega}_{cj}\right).$$

Теперь, учитывая равенство $\overline{R}_{kj}=\overline{O_{0k}O_{0j}}=\sum\limits_{i,k}^{j-1}\overline{R}_{i+1}$, а также представление (28) и формулу (6), выражение (27) можно записать в виде

$$\overline{M}_k=\overline{m}_k^c\times\overline{W}_{0k}+\sum_{i\ge k}\ \sum_{j,i}\overline{m}_j^c\times\left[\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{R}_j+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{R}_j\right)\right]+$$

$$+\sum_{i\ge k}\left[\overline{m}_i\times\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}-\overline{g}\right)+I_i\cdot\overline{\varepsilon}_i+\overline{\omega}_i\times I_i\cdot\overline{\omega}_i-\overline{M}_{ri}-\overline{R}_{ki}\times\overline{F}_{ri}\right]+$$

$$+\sum_{j>k}\overline{R}_{kj}\times\left[m_j\left(\overline{W}_{rj}+2\overline{\omega}_j\times\overline{V}_{rj}\right)+\overline{\varepsilon}_j\times\overline{m}_j+\overline{\omega}_j\times\left(\overline{\omega}_j\times\overline{m}_j\right)\right].$$

В последней сумме этого выражения заменим индекс j на i и, так как $\overline{R}_{kk}=0$, то начнем суммирование от значения $i=k$, а также приведем подобные при $\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}$ и перегруппируем слагаемые. Тогда получим

$$\overline{M}_k=\overline{m}_k^c\times\overline{W}_{0k}+\sum_{i\ge k}\left\{\left(m_i\overline{R}_{ki}+\overline{m}_i+\sum_{j,i}\overline{m}_j^c\right)\times\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j,i}\overline{m}_j^c\times\left(\overline{\varepsilon}_i\times\overline{R}_j\right)+I_i\cdot\overline{\varepsilon}_i+\overline{R}_{ki}\times\left(\overline{\varepsilon}_i\times\overline{m}_i\right)+\sum_{j,i}\overline{m}_j^c\times\left[\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{R}_j\right)\right]+$$

$$\left.+\overline{\omega}_i\times I_i\cdot\overline{\omega}_i+\overline{R}_{ki}\times\left[\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{m}_i\right)\right]\right\}-\left(\sum_{i\ge k}\overline{m}_i\right)\times\overline{g}-\sum_{i\ge k}\left(\overline{M}_{ri}+\overline{R}_{ki}\times\overline{F}_{ri}\right).$$

Отсюда с учетом известных [2] равенств

$$\overline{a}\times\left(\overline{\varepsilon}\times\overline{b}\right)=\left(\overline{b}\cdot\overline{a}E-\overline{b}\,\overline{a}\right)\cdot\overline{\varepsilon},\quad \overline{a}\times\left[\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{b}\right)\right]=\overline{\omega}\times\left(\overline{b}\cdot\overline{a}E-\overline{b}\,\overline{a}\right)\cdot\overline{\omega}+\overline{\omega}\,\overline{\omega}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)$$

и обозначений (21)–(24) получим искомое выражение (26). Утверждение доказано.

4. Задачи динамики одного твердого тела. Используем утверждение 4 для решения задач, рассматриваемых в каждом учебнике по теоретической механике.

Задача 1. Дано твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси OZ со скоростью $\dot{\alpha}$ и ускорением $\ddot{\alpha}$. Ось вращения закреплена на стойке при помощи подшипников A и B. С телом жестко связана СК $O\bar{i}_1\bar{j}_1\bar{k}_1$, где $\bar{k}_1$ – орт оси OZ (оси симметрии подшипников), h_a, h_b – координаты геометрических центров подшипников A и B на оси OZ, (a,b,d) – координаты центра масс (ЦМ) тела в его СК $(O\bar{i}_1\bar{j}_1\bar{k}_1)$. Тело взаимодействует с внешней средой (стойка с подшипниками является базой тела, т.е. относится к СТТ, а не к внешней среде). Это взаимодействие описывается проекциями на оси СК тела (ОСКТ) F_r^x, F_r^y, F_r^z главного вектора внешних сил $\bar{F}_{r1}$ и проекциями на ОСКТ M_r^x, M_r^y, M_r^z главного момента $\bar{M}_{r1}$ этих сил относительно неподвижной точки O (сила тяжести сюда не входит).

Надо найти связь перечисленных величин с проекциями F_a^x, F_a^y, F_a^z на ОСКТ силы реакции $\bar{F}_a$ подшипника A и с проекциями F_b^x, F_b^y, F_b^z на ОСКТ силы реакции $\bar{F}_b$ подшипника B. Силы $\bar{F}_a$ и $\bar{F}_b$ действуют (через подшипники) со стороны стойки на тело.

Решение. Для рассматриваемой СТТ $N=1$, $m_{01}=m_1$ и базой единственного тела является стойка. Следовательно, сила, действующая со стороны стойки на тело, вычисляется по формуле (25), в которой необходимо считать $i=k=1$. Из (6) получим $\bar{W}_{01}=0$, тогда из (25)

$$\bar{F}_1 = m_1\left(\bar{W}_{r1} + 2\bar{\omega}_1 \times \bar{V}_{r1}\right) + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{m}_1 + \bar{\omega}_1 \times \left(\bar{\omega}_1 \times \bar{m}_1\right) - m_1\bar{g} - \bar{F}_{r1},$$

где $\bar{\omega}_1 = \dot{\alpha}\bar{k}_1$, $\bar{\varepsilon}_1 = \ddot{\alpha}\bar{k}_1$. Если в качестве полюса тела взять точку O, то $\bar{V}_{r1} = \bar{W}_{r1} = 0$, $O_{01} = O_1 = O$, $\bar{m}_1 = m_1\bar{r}_1 = m_1\left(a\bar{i}_1 + b\bar{j}_1 + d\bar{k}_1\right)$ и искомая сила реакции подшипников

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_a + \bar{F}_b = m_1\left[\bar{\varepsilon}_1 \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_1 \times \left(\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1\right) - \bar{g}\right] - \bar{F}_{r1}.$$

Очевидно, что в проекциях на ОСКТ это выражение принимает искомый вид

$$F_a^x + F_b^x = -M\left(b\ddot{\alpha} + a\dot{\alpha}^2 + g_x\right) - F_r^x,$$

$$F_a^y + F_b^y = M\left(a\ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}^2 - g_y\right) - F_r^y,\quad F_a^z + F_b^z = -Mg_z - F_r^z,$$

где $M = m_1$ – масса тела; g_x, g_y, g_z – проекции ускорения свободного падения на ОСКТ.

Аналогично, положив в (26) $i=k=1, \bar{V}_{r1} = \bar{W}_{r1} = 0$, получим

$$\bar{M}_1 = I_{11}\cdot\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\omega}_1 \times I_{11}\cdot\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_1\bar{\omega}_1\cdot\bar{I}_{11} - \bar{m}_1^c \times \bar{g} - \bar{M}_{r1} - \bar{R}_{11}\times\bar{F}_{r1}.$$

Согласно (24), (23), (21) с учетом $\bar{R}_{11}=0$ получим $I_{11} = I_1 = I$ – тензор инерции тела относительно точки O, $\bar{I}_{11} = 0$, $\bar{m}_1^c = \bar{m}_1 = M\,\bar{r}_1$. Следовательно, $\bar{M}_1 = I\cdot\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\omega}_1 \times I\cdot\bar{\omega}_1 - M\,\bar{r}_1\times\bar{g} - \bar{M}_{r1}$.

Проекция M_z вектора $\bar{M}_1$ на ось OZ $\left(O\bar{k}_1\right)$ является вращающим моментом тела, т.е. действует со стороны его базы (стойки) на тело, преодолевая инерционные силы, силу тяжести и момент внешних сил $(\bar{k}_1\cdot\bar{M}_{r1})$. Проекции $\bar{M}_1$ на оси $O\bar{i}_1$ и $O\bar{j}_1$ вычисляются по формулам $\bar{i}_1\cdot\bar{M}_1 = -h_aF_a^y - h_bF_b^y$, $\bar{j}_1\cdot\bar{M}_1 = h_aF_a^x + h_bF_b^x$, так как для проекций моментов реакций $\bar{F}_a$ и $\bar{F}_b$ на ОСКТ имеем $\overline{OA}\times\bar{F}_a = -h_aF_a^y\bar{i}_i + h_aF_a^x\bar{j}_i$, $\overline{OB}\times\bar{F}_b = -h_bF_b^y\bar{i}_i + h_bF_b^x\bar{j}_i$. Следовательно, проецируя $\bar{M}_1$ на ОСКТ, получим следующие искомые выражения:

$$-h_aF_a^y - h_bF_b^y = -I^{xz}\ddot{\alpha} + I^{yz}\dot{\alpha}^2 - M\,\bar{i}_1\cdot\bar{r}_1\times\bar{g} - M_r^x,$$

$$h_aF_a^x + h_bF_b^x = -I^{yz}\ddot{\alpha} - I^{xz}\dot{\alpha}^2 - M\,\bar{j}_1\cdot\bar{r}_1\times\bar{g} - M_r^y,\quad M_z = I^z\ddot{\alpha} - M\,\bar{k}_1\cdot\bar{r}_1\times\bar{g} - M_r^z.$$

Здесь учтено, что в ОСКТ $I\cdot\bar{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} I^x & -I^{xy} & -I^{xz} \\ -I^{xy} & I^y & -I^{yz} \\ -I^{xz} & -I^{yz} & I^z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = -I^{xz}\ddot{\alpha}\ \bar{i}_1 - I^{yz}\ddot{\alpha}\ \bar{j}_1 + I^z\ddot{\alpha}\ \bar{k}_1$, и аналогично $\bar{\omega}_1\times I\cdot\bar{\omega}_1 = \dot{\alpha}^2(0,0,1)\times\left(-I^{xz}, -I^{yz}, I^z\right) = I^{yz}\dot{\alpha}^2\bar{i}_1 - I^{xz}\dot{\alpha}^2\bar{j}_1$.

Заметим, что известные методы вывода полученных выражений занимают значительно больше места (машинописного текста) и требуют знаний некоторых законов (теорем) механики. Мы же осуществили только процедуру выписывания искомых уравнений, т.е. выполнили конкретизацию общих уравнений (25), (26) для случая $i=k=N=1$, и перешли к скалярному виду выписанных уравнений.

Задача 2. Дано твердое тело, совершающее поступательное перемещение под действием силы $\overline{F}$ и вращение под действием момента сил $\overline{M}$, заданного относительно ЦМ тела (точки C_1).

Надо вывести УД этого тела.

Решение. Если в утверждении 4 считать $N=1$, то, во-первых, тензор инерции тела I_1 должен быть вычислен относительно полюса стойки (неподвижной точки *O),* во-вторых, момент силы $\overline{M}_1$, под действием которого вращается тело, должен быть задан относительно точки *O.* Известно, что, во-первых, УД твердого тела принимают простой вид, когда тензор инерции вычисляется относительно ЦМ этого тела, во-вторых, движущий момент силы задан относительно ЦМ тела. Поэтому будем считать $N=2$, причем с m_{01} ассоциируем СК $C_1\bar{i}_1\bar{j}_1\bar{k}_1$, совершающую поступательное перемещение относительно стойки под действием силы $\overline{F}$, а за m_{02} примем рассматриваемое тело, с которым жестко связана СК $C_1\bar{i}_2\bar{j}_2\bar{k}_2$, вращающаяся под действием момента силы $\overline{M}$ относительно СК $C_1\bar{i}_1\bar{j}_1\bar{k}_1$. Тогда из (25) для $\kappa=1$ с учетом $\overline{\omega}_1=\overline{\varepsilon}_1=\overline{V}_{r2}=\overline{W}_{r2}=0$ получим $m_1\overline{W}_{r1}+\overline{\varepsilon}_2\times\overline{m}_2+\overline{\omega}_2\times(\overline{\omega}_2\times\overline{m}_2)-m_1\overline{g}=\overline{F}$, а из (26) для k $=2$ получим $\overline{m}_2^c\times\overline{W}_{02}+I_{22}\cdot\overline{\varepsilon}_2+\overline{\omega}_2\times I_{22}\cdot\overline{\omega}_2+\overline{\omega}_2\overline{\omega}_2\cdot\bar{I}_{22}-\overline{m}_2^c\times\overline{g}=\overline{M}$, где $\overline{m}_2=m_2\overline{O_{02}C}_{d2}=0$, $\overline{m}_2^c=\overline{m}_2=0$, $I_{22}=I_2$, $\bar{I}_{22}=0$, так как $\overline{R}_{22}=0$, $O_{02}=C_{d2}=C_1$. Следовательно, искомые УД имеют вид

$$M\overline{W}-M\,\overline{g}=\overline{F},\quad I\cdot\overline{\varepsilon}+\overline{\omega}\times I\cdot\overline{\omega}=\overline{M},$$

где $M=m_1$ – масса тела; $\overline{W}=\overline{W}_{r1}$ – ускорение поступательного перемещения его ЦМ; $I=I_2$ - тензор инерции тела относительно ЦМ; $\overline{\omega}=\overline{\omega}_2$, $\overline{\varepsilon}=\overline{\varepsilon}_2$ - абсолютная угловая скорость и ускорение тела.

5. Синтез интегрируемых СТТ. Процесс синтеза СТТ с заданными свойствами можно свести к поиску ограничений на структурные (СП), кинематические (КП) и массо-геометрические параметры (МГП), при выполнении которых выделяется класс СТТ, каждый представитель которого имеет заданные свойства. К СП относятся количество и типы (открытые или замкнутые) ветвей СТТ, количество смежных тел у каждого тела, количество тел в подсистемах и т.д. К КП относятся типы допустимых (связями) движений тел относительно их баз. По этому признаку различают следующие типы тел - поступательные, вращательные, поступательно-вращательные, свободно-поступательные, свободно-вращательные и т.д. К МГП относятся значения масс тел и ДТ, их положения ЦМ, статические моменты, моменты инерции и т.д.

Здесь рассматриваются только поступательные, вращательные, поступательно-вращательные, свободно-вращательные и свободные тела, поэтому дадим им определения. Если все точки тела могут перемещаться только поступательно параллельно оси, жестко связанной с его базой, то такое тело называется поступательным. Если тело может только вращаться вокруг оси, жестко связанной с его базой, то такое тело называется вращательным. Если тело может совершать независимые друг от друга поступательное перемещение вдоль и вращение вокруг оси, жестко связанной с его базой, то такое тело называется поступательно-вращательным. Если тело может свободно вращаться вокруг точки, жестко связанной с его базой, то такое тело называют свободно-вращательным. Если на относительное движение тела со стороны его базы не наложено никаких ограничений, то такое тело называется свободным. Свободными телами являются, например, летательный аппарат или корпус шагающего аппарата, если базой для них служит земля. В поступательном, вращательном и поступательно-вращательном телах используется понятие оси относительного движения (00Д): в первом случае это любая прямая, параллельная направлению поступательного перемещения тела относительно своей базы, во втором и третьем - это ось относительного поворота тела.

Утверждение 5. Если все тела ДСТТ свободно-вращательные и ЦМ им соответствующих ДТ расположены в базовых точках тел (в точках относительного вращения), то УД такой ДСТТ имеют вид $\sum_{i\ge k}\left(I_i\cdot\bar{\varepsilon}_i+\bar{\omega}_i\times I_i\cdot\bar{\omega}_i\right)=\bar{M}_k$, $k=1,2,\ldots,N$, где $\bar{M}_k$ – движущий момент силы относительного вращения k-го тела, т.е. момент силы действующий на k-е тело со стороны его базы относительно точки вращения k-го тела.

Доказательство. В качестве полюса каждого тела рассматриваемой ДСТТ примем точку его относительного вращения. Тогда по условию $O_{0i}=O_i=C_{di}$ и следовательно $\bar{m}_i=\bar{m}_i^c=0$, $\bar{I}_{ki}=0$, $I_{ki}=I_i$ для всех i и k. Поэтому, положив в (25) $\bar{V}_{ri}=\bar{W}_{ri}=0$, получим искомые УД, случаи интегрируемости которых рассматриваются, например, в [3]. *Утверждение доказано.*

Рассмотрим задачу синтеза класса СТТ, УД которых образуют систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Простейший из таких классов легко получить из (24). Действительно, если все тела соответствующей ДСТТ поступательные, т.е. $\bar{\omega}_i=\bar{\varepsilon}_i=0$ для всех i, то из (24) получим УД $m_k\sum_{i}^{k-1}\bar{W}_{ri}+\sum_{i\ge k}m_i\bar{W}_{ri}-m_k\bar{g}-\sum_{i\ge k}\bar{F}_{ri}=\bar{F}_k$, которые после исключения сил реакции $\bar{F}_{ri}$ сводятся к системе интегрируемых УД. Не очевидным является класс СТТ, который описывает следующее

Утверждение 6. УД ДСТТ имеет вид системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, если несущая цепочка каждого концевого тела этой ДСТТ состоит из 2-х участков, тела которых удовлетворяют следующим ограничениям.

Ограничения на КП:

1. Тела 1-го участка (с началом от стойки) могут быть как вращательными, так и поступательными с параллельными друг другу осями, имеющими направляющий вектор $\bar{e}_1$;

2. Тела 2-го участка, который следует за 1-м, могут быть только вращательными с параллельными друг другу осями, направляющий вектор которых образует с $\bar{e}_1$ постоянный угол (возможно свой для каждого концевого тела ДСТТ).

Ограничения на МГП:

3. ЦМ ДТ каждого вращательного тела 1-го и 2-го участков лежит на ООД этого тела;

4. Элементы тензора инерции каждого ДТ из 2-го участка удовлетворяют следующим ограничениям $I_i^x=I_i^y$, $I_i^{xy}=0$, $I_i^{xz}=0$, $I_i^{yz}=0$, $i\in N_2$, где N_2 – множество номеров тел из вторых участков несущих цепочек всех концевых тел ДСТТ, $I_i^{xy},I_i^{xz},I_i^{yz}$, I_i^x,I_i^y,I_i^z – центробежные и осевые моменты инерции i-го ДТ.

Доказательство состоит из 3-х частей. В 1-й рассматривается УД произвольного поступательного тела из 1-го участка. Во 2-й части рассматривается УД произвольного вращательного тела из 1-го участка. В 3-й части доказательства рассматривается УД произвольного вращательного тела из 2-го участка.

Часть 1. Пусть k – порядковый номер произвольного поступательного тела из 1-го участка. Движущая сила этого тела $F_k=\bar{e}_1\cdot\bar{F}_k$. Умножим скалярно УД (25) на $\bar{e}_1$ и учтём, что в силу 1-го ограничения $\bar{e}_1\cdot\bar{W}_{ri}=\ddot{x}_i$, $\bar{e}_1\times\bar{\varepsilon}_i=\bar{e}_1\times\bar{\omega}_i=0$, где i – номер тела из несущей цепочки k-го тела, $\dot{x}_i,\ddot{x}_i$ – скорость и ускорение поступательного перемещения i-го тела относительно своей базы (если i-е тело вращательное, то $\dot{x}_i=\ddot{x}_i=0$). Тогда получим УД k-го тела в виде

$$m_k\sum_{i}^{k-1}\ddot{x}_i+\sum_{i\in N_{1k}}m_i\ddot{x}_i+\sum_{i\in N_{2k}}\bar{e}_1\cdot\left[\bar{\varepsilon}_i\times\bar{m}_i+\bar{\omega}_i\times\left(\bar{\omega}_i\times\bar{m}_i\right)\right]-m_kg\bar{e}_1\cdot\bar{e}=F_k,$$

где N_{1k} – множество номеров тел всех первых участков k-й подсистемы;

N_{2k} – множество номеров тел всех вторых участков k-й подсистемы.

Теперь, учитывая ограничение 3 ($\bar{m}_i=0, i\in N_{2k}$) и обозначение $\bar{e}_1\cdot\bar{g}=g\cos\gamma=\mathrm{const}$, получим УД k-го тела в следующем искомом виде:

$$m_k\sum_{i}^{k-1}\ddot{x}_i+\sum_{i\in N_{1k}}m_i\ddot{x}_i-m_kg\cos\gamma=F_k.$$

Часть 2. Пусть k – порядковый номер произвольного вращательного тела из 1-го участка. Для него с учетом ограничений 2 и 3 из УД (26) и формул (21) – (24), получим УД k-го тела в виде $\bar{e}_1 \cdot \sum_{i \ge k} \left[m_i \bar{R}_{ki} \times \left(\bar{W}_{ri} + 2\bar{\omega}_i \times \bar{V}_{ri} \right) + I_i \cdot \bar{\varepsilon}_i + \bar{\omega}_i \times I_i \cdot \bar{\omega}_i \right] = M_k$, где $M_k = \bar{e}_1 \cdot \bar{M}_k$ – движущий момент силы k-го тела относительно ООД. Если $i \in N_{1k}$, то $\bar{V}_{ri} = \dot{x}_i \bar{e}_1$, $\bar{W}_{ri} = \ddot{x}_i \bar{e}_1$, $\bar{\omega}_i = \omega_i \bar{e}_1$, $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \bar{e}_1$, где ω_i, ε_i – абсолютные угловая скорость и ускорение i-го тела. Следовательно, $\bar{e}_1 \cdot \bar{R}_{ki} \times \bar{W}_{ri} = 0$, $\bar{\omega}_i \times \bar{V}_{ri} = 0$, $\bar{e}_1 \cdot \bar{\omega}_i \times I_i \cdot \bar{\omega}_i = 0$, $\bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{\varepsilon}_i = \bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{e}_1 \, \varepsilon_i = I_i^z \varepsilon_i$, где I_i^z – момент инерции i-го ДТ относительно оси $O_i \bar{e}_1$. Тогда УД k-го тела примет вид

$$\sum_{i \in N_{1k}} I_i^z \varepsilon_i + \sum_{i \in N_{2k}} \left[\bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{\varepsilon}_i + \bar{e}_1 \cdot \left(\bar{\omega}_i \times I_i \cdot \bar{\omega}_i \right) \right] = M_k .$$

Согласно кинематическим ограничениям для i-го тела из 2-го участка имеем

$$\bar{\omega}_i = \dot{\alpha}_{1i} \bar{e}_1 + \dot{\alpha}_{2i} \bar{e}_p ,$$

где $\dot{\alpha}_{1i}$ – абсолютная угловая скорость последнего тела 1-го участка в несущей цепочке i-го тела; $\dot{\alpha}_{2i}, \bar{e}_p$ – угловая скорость и орт оси вращения i-го тела относительно этого последнего тела. Поэтому получим

$$\bar{\omega}_i \times I_i \cdot \bar{\omega}_i = \left(\dot{\alpha}_{1i} \bar{e}_1 + \dot{\alpha}_{2i} \bar{e}_p \right) \times I_i \cdot \left(\dot{\alpha}_{1i} \bar{e}_1 + \dot{\alpha}_{2i} \bar{e}_p \right) =$$
$$= \dot{\alpha}_{1i}^2 \bar{e}_1 \times I_i \cdot \bar{e}_1 + \dot{\alpha}_{1i} \dot{\alpha}_{2i} \left(\bar{e}_1 \times I_i \cdot \bar{e}_p + \bar{e}_p \times I_i \cdot \bar{e}_1 \right) + \dot{\alpha}_{2i}^2 \bar{e}_p \times I_i \cdot \bar{e}_p .$$

В СК $O_i \bar{i}_i \bar{j}_i \bar{e}_p$, жестко связанной с i-м телом, получим $\bar{e}_p = (0, 0, 1)$, $I_i \cdot \bar{e}_p = (-I_i^{xz}, -I_i^{yz}, I_i^z)$. Следовательно, с учётом ограничения 4 получим $\bar{e}_p \times I_i \cdot \bar{e}_p = I_i^{yz} \bar{i}_i - I_i^{xz} \bar{j}_i = 0$. Разложим $\bar{e}_1$ по ортам СК $O_i \bar{i}_i \bar{j}_i \bar{e}_p$. Получим $\bar{e}_1 = Z_{1i}^x \bar{i}_i + Z_{1i}^y \bar{j}_i + c_p \bar{e}_p$, где Z_{1i}^x – косинус угла между $\bar{e}_1$ и $\bar{i}_i$, Z_{1i}^y – косинус угла между $\bar{e}_1$ и $\bar{j}_i$, $c_p = \cos(\bar{e}_1, \bar{e}_p) = \text{const}$. Тогда после элементарных вычислений с учетом ограничений 4 получим

$$\bar{e}_1 \cdot \left(\bar{e}_p \times I_i \cdot \bar{e}_1 \right) = \bar{e}_1 \cdot \left[(0, 0, 1) \times \left(I_i^x Z_{1i}^x, I_i^y Z_{1i}^y, I_i^z c_p \right) \right] = \left(Z_{1i}^x, Z_{1i}^y, c_p \right) \cdot \left(-I_i^y Z_{1i}^y, I_i^x Z_{1i}^x, 0 \right) =$$
$$= \left(I_i^x - I_i^y \right) Z_{1i}^x Z_{1i}^y = 0 .$$

Следовательно, с учётом ограничения 4 получим $\bar{e}_1 \cdot \left(\bar{\omega}_i \times I_i \cdot \bar{\omega}_i \right) = 0$.

Очевидно, что абсолютное угловое ускорение i-го тела 2-го участка вычисляется по формуле $\bar{\varepsilon}_i = \ddot{\alpha}_{1i} \bar{e}_1 + \ddot{\alpha}_{2i} \bar{e}_p + \dot{\alpha}_{1i} \dot{\alpha}_{2i} \bar{e}_1 \times \bar{e}_p$. Следовательно,

$$\bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{\varepsilon}_i = \ddot{\alpha}_{1i} \bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{e}_1 + \ddot{\alpha}_{2i} \bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{e}_p + \dot{\alpha}_{1i} \dot{\alpha}_{2i} \bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \left(\bar{e}_1 \times \bar{e}_p \right).$$

Выполнив векторно-матричные операции в СК i-го тела с учётом ограничений 4 получим

$$\bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \left(\bar{e}_1 \times \bar{e}_p \right) = 0, \bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{e}_p = \left(Z_{1i}^x, Z_{1i}^y, c_p \right) \cdot \left(0, 0, I_i^z \right) =$$
$$= c_p I_i^z, \bar{e}_1 \cdot I_i \cdot \bar{e}_1 = \left(Z_{1i}^x, Z_{1i}^y, c_p \right) \cdot \left(I_i^x Z_{1i}^x, I_i^y Z_{1i}^y, c_p I_i^z \right) = I_i^x \left[\left(Z_{1i}^x \right)^2 + \left(Z_{1i}^y \right)^2 \right] + c_p^2 I_i^z = I_i^x \left(1 - c_p^2 \right) + c_p^2 I_i^z .$$

Следовательно, УД k-го тела принимает искомый вид:

$$\sum_{i \in N_{1k}} I_i^z \varepsilon_i + \sum_{i \in N_{2k}} \left\{ \left[\left(1 - c_p^2 \right) I_i^x + c_p^2 I_i^z \right] \ddot{\alpha}_{1i} + c_p I_i^z \ddot{\alpha}_{2i} \right\} = M_k .$$

Часть 3. Пусть k – порядковый номер произвольного тела 2-го участка несущей цепочки p-го концевого тела. Тогда с учетом ограничений 2 и 3 из УД (26) получим УД рассматриваемого тела в виде $\bar{e}_p \cdot \sum_{i \ge k} \left(I_i \cdot \bar{\varepsilon}_i + \bar{\omega}_i \times I_i \cdot \bar{\omega}_i \right) = M_k$, где M_k – движущий момент силы относительно ООД k-го тела. Совершенно аналогично 2-му случаю доказывается, что $\bar{e}_p \cdot \left(\bar{\omega}_i \times I_i \cdot \bar{\omega}_i \right) = 0$ и

$$\bar{e}_p \cdot I_i \cdot \bar{\varepsilon}_i = \ddot{\alpha}_{1i} \bar{e}_p \cdot I_i \cdot \bar{e}_1 + \ddot{\alpha}_{2i} \bar{e}_p \cdot I_i \cdot \bar{e}_p + \dot{\alpha}_{1i} \dot{\alpha}_{2i} \bar{e}_p \cdot I_i \cdot \left(\bar{e}_1 \times \bar{e}_p \right),$$
$$\bar{e}_p \cdot I_i \cdot \left(\bar{e}_1 \times \bar{e}_p \right) = 0, \bar{e}_p \cdot I_i \cdot \bar{e}_1 = c_p I_i^z, \bar{e}_p \cdot I_i \cdot \bar{e}_p = I_i^z ,$$

т.е. УД k-го тела принимает искомый вид $\sum_{i \ge k} \left(c_p I_i^z \ddot{\alpha}_{1i} + I_i^z \ddot{\alpha}_{2i} \right) = M_k$. Утверждение доказано.

Следует отметить, что приведенное здесь доказательство в несколько раз короче ранее изложенных [4, 5], и впервые попутно привело к УД для каждого из возможных тел выделенного класса ДСТТ. Примеры практической реализации СТТ из выделенного класса изложены в [6].

5. Области использования новых видов УД СТТ. Формулы утверждения 4 и их частные виды можно использовать, во-первых, для решения задач динамики СТТ, а именно вычисления $\overline{F}_k, \overline{M}_k$ по заданным движениям тел конкретной СТТ (1-я задача динамики или задача дифференцирования), или для определения движения тел по заданным движущим силам и моментам сил (2-я задача динамики или задача интегрирования), во-вторых, для решения задач управления движением СТТ, т.е. поиска движущих сил и моментов обеспечивающих заданные (программные) движения тел с заданным качеством, в-третьих, для синтеза СТТ с заданными целевыми свойствами, т.е. поиска ограничений на СП, КП и МГП произвольной СТТ, при удовлетворении которых из общего множества СТТ выделяется класс СТТ и его любой представитель имеет целевые свойства. Эффективность использования уравнений (25), (26) для решения 1-й задачи динамики и синтеза СТТ по сравнению с другими видами УД очевидна (к другим здесь относятся и такие классические виды УД, которые предложены Ньютоном, Эйлером, Лагранжем, Аппелем, Гамильтоном и др.). Действительно, очень сложно и громоздко получить УД конкретной СТТ из УД в форме Аппеля $\partial S / \partial \ddot{q}_i = U_i$ или Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = U_i$, где S - энергия ускорения СТТ, L - лагранжиан СТТ, q_i - обобщенная координата i -го тела, U_i - обобщенная движущая сила. Использовать эти УД для синтеза СТТ с заданными свойствами практически невозможно, так как они явно не содержат параметры, на множестве которых осуществляется процесс синтеза. Можно самостоятельно убедиться в эффективности использования формул утверждения 4 для решения задач синтеза. Легко обобщить утверждение 5, а именно расширить класс ДСТТ с линейными УД, положив, что 1-е тело может совершать произвольное поступательное перемещение относительно стойки, а тела 1-го участка могут быть вращательно-поступательными с осью $\vec{e}_1$. Легко также доказать единственность обобщенного класса ДСТТ, а также необходимость сформулированных ограничений.

Эффективное использование предложенных здесь видов УД при решении 2-й задачи динамики и в задачах управления движением СТТ можно продемонстрировать на соответствующих примерах, которые готовятся к публикациям.

Заключение. Исходя из ФВСФ в сочленениях СТТ [1], в которых в качестве МГП выступают массы и моменты инерции тел, получены новые виды ФВСФ. В 1-м из них ФВСФ записаны в рекуррентном виде, а во 2-м в явном виде выражены МГП ДТ и подсистем СТТ, что позволило эффективно решать задачи анализа и синтеза СТТ. Приведённые примеры убедительно доказывают эффективность использования новых видов ФВСФ.

Литература

1. Телегин А.И., Абросов А.В. Алгоритмы решения первой задачи динамики произвольных систем тел //Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». - 2001. - Вып. 1.-№ 6(06). - С. 3-9.

2. Лурье А.И. Аналитическая механика. -М.: Физматгиз, 1961. - 824 с.

3. Зубов В.И. Аналитическая динамика систем тел: Учеб. пособие. -Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. - 344 с.

4. Мелентьев Ю.И., Телегин А.И. Динамика манипуляционных систем роботов. - Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета, 1985. -348с.

5. Телегин А.И. Синтез систем твёрдых тел с заданными свойствами. - Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1996. - 174 с.

6. Телегин А.И. Динамическая развязка систем тел с замкнутыми ветвями //Изв. РАН. Механика твёрдого тела. - 1999. -№2.-С. 37-45.