УДК 517.9

ЗАДАЧА ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

А.А. Баязитова

THE STURM - LIOUVILLE PROBLEM ON GEOMETRIC GRAPH

A.A. Bayazitova

В последнее время внимание многих исследователей привлекают дифференциальные уравнения на графах с условиями непрерывности и баланса потока. Между тем, было отмечено, что моделирование различных процессов в естественных и технических науках в ряде случаев описывают уравнения Соболевского типа. При изучении уравнений Соболевского типа на графах возникает задача Штурма - Лиувилля. Статья обобщает предыдущие результаты и посвящена изучению свойств собственных значений и обобщенных собственных функций задачи Штурма - Лиувилля на геометрических графах.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, оператор Штурма - Лиувилля

The differential equations on graphs with continuity and balance of flow conditions attract attention of many researches. Meantime, there was noted that modeling of different processes in natural and technical sciences in row of events is described by the equations of Sobolev type. At studying Sobolev type equations the Sturm - Liouville problem appeared. The article generalized the previous results and is devoted to the study of characteristics of eigenvalues and generalized eigenfunctions of the Sturm - Liouville problem on geometric graphs.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, Sturm - Liouville operator

Введение

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер. Каждому ребру поставим в соответствие два числа l_j, $d_j \in \mathbb{R}_+$, обозначающие длину и площадь поперечного сечения ребра E_j соответственно. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = f_j, \quad u_j = u_j(x) \quad \text{для всех}\, x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Для уравнений (1) в каждой вершине графа зададим условия

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j c_j(x) u_{jx}(0,t) - \sum_{E_m \in E^{\omega}(V_i)} d_m c_m(x) u_{mx}(l_m,t) = 0, \tag{2}$$

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \tag{3}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i)$, $t \in \mathbb{R}$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (2) обозначает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (3) - что решение $u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots)$ в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф G состоит из одного ребра и двух вершин, условие (3) исчезает, а условие (2) превращается в условие Неймана.

Дифференциальные уравнения на графах - сравнительно новая часть математического знания. Первые публикации в этой области появились в последнее десятилетие прошлого века, первая монография вышла в 2004 г. **[1]** и была посвящена изучению качественных свойств дифференциальных уравнений на многообразиях типа сети. В **[2]** на графе G рассмотрены уравнения реакции-диффузии

$$u_{jt} = u_{jxx} + f(u_j), \quad x \in (0,\ l_j), t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где f - гладкая функция, общая для всех дуг E_j, с условиями типа Кирхгоффа. Между тем было замечено, что в ряде случаев уравнения Соболевского типа описывают процессы реакции-диффузии лучше, чем полулинейные уравнения вида (4).

Уравнения Соболевского типа на графах впервые были рассмотрены в 2002 г. **[3];** первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002 - 2005 гг. **[4]** и содержало результаты **[5]** - **[7].** В работах **[3]** - **[7]** и последующих **[8]** - **[10]** неизменно возникала задача Штурма - Лиувилля (1) - (3), правда, в частном случае $(c_j(x) \equiv 1, a_j(x) \equiv a = \mathrm{const})$, причем предложенный подход имел мало общего с результатами **[1].** Дальнейшее исследование **[11]** привело к новой задаче Штурма - Лиувилля вида (1) - (3), теперь уже в случае $c_j(x) \equiv 1$, $a_j(x) \equiv a_j$. Это обстоятельство побудило рассмотреть задачу (1) - (3), которая является естественным обобщением рассмотренных ранее задач. Полученные результаты носят окончательный и исчерпывающий характер.

Статья кроме вводной части и списка литературы состоит из двух параграфов. В первом параграфе вводятся определения классического и обобщенного решений, изучаются условия существования и единственности обобщенного решения задачи (1) - (3), второй параграф посвящен исследованию свойств собственных значений и собственных функций задачи.

1. Существование и единственность обобщенного решения

Следуя [11], введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...), g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$$

и банахово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено $(2)\}$ с нормой

$$||u||^2_{\mathfrak{U}} = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Отметим, что условие (2) имеет смысл в силу абсолютной непрерывности компонентов u_j, а пространство $\mathfrak{U}$ плотно и компактно вложено в $L_2(\mathbf{G})$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ банахово пространство. Очевидна плотность и компактность вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Пусть на графе G задано уравнение (1), коэффициенты которого вещественнозначны и удовлетворяют условиям

$$a_j(x) \in C[0, l_j], \quad c_j(x) \in C^1[0, l_j], \quad c_j(x) \geq c_0 > 0 \text{ для всех } x \in (0, l_j).$$

Определение 1. *Вектор-функцию $u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...)$ такую, что $u_j \in C^2(0, l_j) \cap C^1[0, l_j]$ назовем классическим решением задачи (1) — (3), если она удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3).*

Определение 2. *Вектор-функцию $u \in \mathfrak{U}$ назовем обобщенным решением задачи (1) — (3) при $f \in \mathfrak{F}$, если для нее выполняется тождество*

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x) u_{jx} v_{jx} + a_j(x) u_j v_j)\, dx = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} f_j v_j dx \tag{5}$$

при всех $v \in \mathfrak{U}$.

Далее будем предполагать, что $a_j(x)$, $c_j(x)$ – вещественные, ограниченные, измеримые на $(0, l_j)$ функции, причем выполнено $c_j(x) \geq \delta > 0$. Введем оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, взяв в качестве определения левую часть равенства (5)

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (c_j(x) u_{jx} v_{jx} + a_j(x) u_j v_j) dx. \tag{6}$$

Тождество (5) запишем в виде уравнения

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle, \tag{7}$$

где u, $v \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathfrak{F}$, разрешимость которого и будем изучать в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $a_j(x) \geq 0$ и хотя бы одна из функций $a_j(x)$ не равна нулю тождественно. Тогда формула (6) определяет скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению в пространстве $\mathfrak{U}$.*

Уравнение (7) перепишем в виде

$$[u, v] = \langle f, v \rangle. \tag{8}$$

Так как при фиксированном $f \in \mathfrak{F}$ линейный по $v \in \mathfrak{U}$ функционал $\langle f, v \rangle$ ограничен: $| \langle f, v \rangle | \leq ||f||_{\mathfrak{F}} ||v||_{L_2(\mathbf{G})} \leq C ||f||_{\mathfrak{F}} ||v||_{\mathfrak{U}}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от f и v, то по теореме Рисса в $\mathfrak{U}$ существует функция F, для которой $\langle f, v \rangle = [F, v]$ при любой $v \in \mathfrak{U}$, причем эта функция единственна и $||F||_{\mathfrak{U}} \leq C||f||_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, в $\mathfrak{U}$ существует единственная функция $u = F$, удовлетворяющая тождеству (8).

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если $a_j(x) \geq 0$ и хотя бы одна из функций $a_j(x)$ не равна нулю тождественно, то для любой $f \in \mathfrak{F}$ существует единственное обобщенное решение задачи (1) – (3). При этом*

$$||u||_{\mathfrak{U}} \leq C||f||_{\mathfrak{F}},$$

где положительная постоянная C не зависит от f.

Из всего вышесказанного следует, что если $a_j(x) \geq 0$ и хотя бы одна из функций $a_j(x)$ не равна нулю тождественно, то оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ – топлинейный изоморфизм пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. В силу теоремы Банаха существует оператор $A^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, причем $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Поскольку вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно, оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ является компактным.

2. Собственные функции и собственные значения

Определение 3. *Не равная тождественно нулю функция* $u = (U_1, U_2, \ldots, u_j, \ldots)$ *называется собственной функцией задачи (1) - (3) для оператора*

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-c_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x}\left(-c_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_2(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x}\left(-c_j(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_j(x), \ldots\right),$$

если существует такое число λ, *что функция* u *является классическим решением следующей задачи:*

$$a_j(x)u_j - (c_j(x)u_{jx})_x = \lambda u_j, \tag{9}$$

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t),\ E_j,\ E_k \in E^{\alpha}(V_i) \cup E^{\omega}(V_i), \tag{10}$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j c_j(x) u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k c_k(x) u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{11}$$

Число λ *называется собственным значением (соответствующим собственной функции* u*).*

Легко видеть, что собственная функция задачи (1) - (3) при всех $v \in \mathfrak{U}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + a_j(x)u_jv_j)dx = \lambda \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_jv_j dx. \tag{12}$$

Определение 4. *Не равная нулю функция* $u \in \mathfrak{U}$ *называется обобщенной собственной функцией задачи (1) – (3) для оператора* A, *если существует такое число* λ *(собственное значение, отвечающее* u*), что функция* u *при всех* $v \in \mathfrak{U}$ *удовлетворяет интегральному тождеству (12).*

В дальнейшем мы будем рассматривать только обобщенные собственные функции и соответствующие им собственные значения, нормированные условием $||u||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$. Нам удобно рассматривать тождество (12), определяющее обобщенные собственные функции, как равенство скалярных произведений в пространстве $L_2(\mathbf{G})$ и в пространстве $\mathfrak{U}$ соответственно. Пусть $m = \min\limits_j \left(\min\limits_{x \in (0,l_j)} a_j(x)\right)$ (здесь мы не предполагаем, что $a_j(x) \geq 0$). Тогда функции $\tilde{a}_j(x) = a_j(x) - m + 1 \geq 1$. Поэтому скалярное произведение (эквивалентное обычному) в $\mathfrak{U}$ можно задать равенством

$$[u,v] = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x)u_{jx}v_{jx} + \tilde{a}_j(x)u_jv_j)dx. \tag{13}$$

Тождество (12) после этого можно переписать в виде

$$[u,v] = (\lambda - m + 1)\langle u, v\rangle. \tag{14}$$

Лемма 2. *Существует линейный ограниченный оператор* B *из* $L_2(\mathbf{G})$ *в* $\mathfrak{U}$ *с областью определения* $L_2(\mathbf{G})$, *для которого при всех* $v \in \mathfrak{U}$ *имеет место равенство*

$$\langle u, v\rangle = [Bu, v].$$

Оператор B *имеет обратный* B^{-1}. *Оператор* B, *если его рассматривать как оператор из* $\mathfrak{U}$ *в* $\mathfrak{U}$, *является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным.*

Доказательство. Для любой (фиксированной) функции $u \in L_2(\mathbf{G})$ линейный по v, $v \in \mathfrak{U}$, функционал $l(v) = \langle u, v \rangle$ ограничен, так как

$$|l(v)| = |\langle u, v\rangle| \le ||u||_{L_2(\mathbf{G})} ||v||_{L_2(\mathbf{G})} \le C ||u||_{L_2(\mathbf{G})} ||v||_{\mathfrak{U}}.$$

Поэтому согласно лемме Рисса существует единственная функция $U \in \mathfrak{U}$, $||U||_{\mathfrak{U}} = ||l|| \le C||u||_{L_2(\mathbf{G})}$ такая, что $l(v) = [U, v]$ для всех $v \in \mathfrak{U}$. Это означает, что на $L_2(\mathbf{G})$ задан оператор B (очевидно, линейный): $Bu = U$, для которого выполняется (15). Так как $||Bu||_{\mathfrak{U}} \le C||u||_{L_2(\mathbf{G})}$, то оператор B из $L_2(\mathbf{G})$ в $\mathfrak{U}$ ограничен. Если при некотором u из $L_2(\mathbf{G})$ выполнено равенство $Bu = 0$, то в силу (15) $\langle u, v \rangle = 0$ для всех $v \in \mathfrak{U}$, т.е. $u = 0$. Это означает, что существует оператор B^{-1}.

Из (15) вытекает, что оператор B из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$ является самосопряженным

$$[Bu, v] = \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle = [Bv, u] = [u, Bv].$$

Из (15) вытекает также, что оператор B положителен.

Покажем, что оператор B из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$ является вполне непрерывным. Возьмем произвольное ограниченное в $\mathfrak{U}$ множество. В силу компактности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow L_2(\mathbf{G})$ это множество компактно в $L_2(\mathbf{G})$. Значит, из любого его бесконечного подмножества можно выбрать фундаментальную в $L_2(\mathbf{G})$ последовательность u_s, $s = 1, 2, \ldots$. Так как оператор B из $L_2(\mathbf{G})$ в $\mathfrak{U}$ ограничен и, следовательно, непрерывен, то последовательность Bu_s, $s = 1, 2, \ldots$, фундаментальна в $\mathfrak{U}$. □

Теорема 2. *Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ задачи (1) – (3) для оператора*

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-c_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_1(x), \frac{\partial}{\partial x}\left(-c_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_2(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x}\left(-c_j(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + a_j(x), \ldots\right)$$

вещественны и $\lambda_s \to +\infty$ при $s \to \infty$. Собственные значения удовлетворяют неравенству $\lambda_s > m = \min\limits_j \left(\min\limits_{x \in (0, l_j)} a_j(x)\right)$ во всех случаях, кроме $a_j(x) = a_i(x) = const$ для всех i, j.

Если же $a_j(x) = a_i(x) = const$ для всех i, j, то собственные значения удовлетворяют неравенству $\lambda_s \ge m$, $s = 1, 2, \ldots$, причем существует однократное собственное значение, равное m, с собственной функцией $\left(\sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x)dx\right)^{-1} (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Доказательство. Согласно лемме 2 и тождествам (14), (15) число λ является собственным значением задачи (1) – (3) для оператора A, а u – соответствующей ему обобщенной собственной функцией тогда и только тогда, когда $(\lambda - m + 1)$ есть характеристическое число самосопряженного вполне непрерывного оператора B из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$, а u – соответствующий ему собственный элемент. Поэтому существует не более чем счетное множество собственных значений задачи (1) – (3); это множество не имеет конечных предельных точек; все собственные значения вещественны; каждому собственному значению отвечает конечное число (кратность собственного значения) взаимно ортогональных в $\mathfrak{U}$ собственных функций; собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $\mathfrak{U}$. Отметим, что для каждого собственного значения λ можно выбрать ровно k, где k – кратность λ, действительных попарно ортогональных в $\mathfrak{U}$ собственных функций.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots \tag{16}$$

- последовательность, содержащая все собственный значения задачи (1) - (3) для оператора А, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots \tag{17}$$

– система взаимно ортогональных в $\mathfrak{U}$ обобщенных собственных функций ($||u_s||_{L_2(\mathbf{G})} = 1$); каждая u_s соответствует собственному значению λ_s:

$$(\lambda_s - m + 1)Bu_s = u_s, \quad s = 1, 2, \dots . \tag{18}$$

Умножая (18) скалярно в $\mathfrak{U}$ на u_s, получим в силу (15) равенства

$$||u||^2_{\mathfrak{U}} = (\lambda_s - m + 1)||u||_{L_2(\mathbf{G})} = (\lambda_s - m + 1), \tag{19}$$

которые (скалярное произведение в $\mathfrak{U}$ определено формулой (13)) можно переписать в виде

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (c_j(x) u_{s\,jx}^2 + (a_j(x) - \lambda_s) u_{s\,j}^2) dx = 0. \tag{20}$$

Из равенства (20) вытекает, что для всех $s = 1, 2, ...$

$$\lambda_s \geq m = \min_{x \in (0, l_j)} a_j(x),$$

причем для всех $s = 1, ...$ имеет место строгое неравенство кроме случая, если значения $a_j(x) = a_i(x) = const$ для всех i, j. Если же $a_j(x) = a_i(x) = m$ для всех i, j, то среди собственных значений задачи (1) – (3) есть значение, равное $-m$, с собственной функцией, равной $\left(\sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x) dx \right)^{-1}$ $(1, 1, ..., 1, ...)$. Это собственное значение имеет кратность 1, так как в силу (20) все собственные функции, ему отвечающие, удовлетворяют равенству $\sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} c_j(x) u_{s\,jx}^2 dx = 0$, т.е. являются постоянными.

Из (19) вытекает, что система

$$\frac{u_1}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}}, \ \frac{u_2}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}}, \ ..., \ \frac{u_s}{\sqrt{\lambda_s - m + 1}}, \ ... \tag{22}$$

ортонормирована в $\mathfrak{U}$. В силу теоремы Гильберта – Шмидта она является ортонормированным базисом в $\mathfrak{U}$. Так как пространство $\mathfrak{U}$ бесконечномерно, то множество (22), а значит, и (16) бесконечно. Поэтому $\lambda_s \to +\infty$ при $s \to \infty$. □

Теорема 3. *Обобщенные собственные функции $u_1(x)$, $u_2(x), ...$ задачи (1) – (3) образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{G})$, т.е. любая функция $f \in L_2(\mathbf{G})$ разлагается в ряд Фурье*

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s, \quad f_s = \langle f, u_s \rangle, \tag{23}$$

сходящийся в $L_2(\mathbf{G})$. Для функции $f \in \mathfrak{U}$ ряд (23) по обобщенным собственным функциям задачи (1) – (3) сходится в $\mathfrak{U}$ и имеет место неравенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leq C ||f||^2_{\mathfrak{U}}, \tag{24}$$

где постоянная C не зависит от f.

В заключении автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе и профессору В.Е. Федорову за строгую, но конструктивную критику, в немалой степени способствующую улучшению статьи.

Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. - М.: Физматлит, 2004. - 272 с.
2. Kosugi, S. A semilinear elliptic equation in a thin network-shaped domain / S. Kosugi // J. Math. Soc. Jap.- 2000.- Vol. 52, № 3.- P. 672 - 697.
3. Свиридюк, Г.А. Уравнения Соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. - Новосибирск, 2002. - С. 221 - 225.
4. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений Соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 27.12.05: утв. 10.05.06 / Шеметова Вероника Владимировна. - Магнитогорск, 2005. - 109 с. - Библиогр.: с. 93 - 109.
5. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова //• Вестник МаГУ. Математика.- Магнитогорск. - 2003.- Вып. 4. - С. 129 - 139.
6. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика.- 2005- № 10.- С. 47 - 52.
7. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифферент уравнения.- 2006.- Т. 42, № 1.- С. 126 - **131.**
8. Пивоварова, П.О. О неустойчивости решений эволюционных уравнений Соболевского типа на графе / П.О. Пивоварова // Вестн. ЮУрГУ. Сер. <Математическое моделирование и программирование:». - 2008.- № 15(115), вып. 1. - С. 64 - 68.
9. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений Соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Обозрение приклад, и пром. математики. - М., 2009. - Т. 16, вып. 2. - С. 329 - 330.
10. Замышляева, А.А. Решение одного уравнения Соболевского типа на графе / А.А. Замышляева // Обозрение приклад, и промыш. математики. - М., 2009. - Т. 16, вып. 2. - С. 332 - 333.
11. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. - 2009. - № 1 (18). - С. 6 - 17.

Кафедра <Уравнения математической физики>,
Южно-Уральский государственный университет
alfiya@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 1 марта 2010 г.