

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАХОДА НА ПОСАДКУ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ИЗМЕНЯЕМОЙ В ПОЛЕТЕ СТРУКТУРОЙ

A.S. Pantileev

## STATEMENT OF THE PROBLEM OF OPTIMUM LANDING APPROACH OF THE PILOTLESS FLYING MACHINE WITH STRUCTURE CHANGED IN FLIGHT

A.S. Pantileev

Балансирное управление совместно с классическими аэродинамическими органами управления позволит существенно сократить дистанцию посадки. Выводятся уравнения движения с учетом подвижного груза и без него, для беспилотного летательного аппарата с изменяемой в полете структурой.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения движения, изменяемая структура, беспилотный летательный аппарат.

Management of position of the centre of gravity together with classical aerodynamic controls will allow to reduce a landing distance essentially. The equations of movement taking into account mobile cargo and without it, for unmanned aerial vehicle with structure changed in flight are deduced.

*Keywords:* differential equations of movement, changeable structure, unmanned aerial vehicle.

### Введение

Математическое моделирование беспилотного летательного аппарата (БПЛА) с изменяемой в полете структурой, позволит на ранних этапах проектирования провести оценку динамики сложной системы. Для этого предлагается провести моделирование движения БПЛА с изменяемой в полете структурой используя дифференциальные уравнения движения летательного аппарата как абсолютно твердого тела [1]. Основное отличие исследуемых уравнений заключается в том, что в них момент инерции не является константой, а зависит от времени.

### 1. Математическая постановка задачи

Закон изменения момента инерции принимается на основании предложенной в работе [2] схемы изменения структуры (рис. 1).

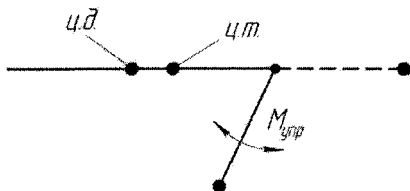


Рис. 1. Схема изменения момента инерции:  
ц.д. – центр давления, ц.т. – центр тяжести платформы

Представим момент инерции БПЛА с изменяемой в полете структурой следующим выражением, а также его производной

$$I_z = J_z + m_{\text{тр}} b^2 + m_{\text{тр}} l^2 \left( \frac{2b}{l} (\sin \varphi + \cos \varphi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \right), \quad (1)$$

$$\dot{I}_z = 2m_{\text{тр}} l^2 \left( \frac{b}{l} (\cos \varphi - \sin \varphi) + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right). \quad (2)$$

С учетом уравнения существования летательного аппарата  $m = m_{\text{пл}} + m_{\text{тр}}$  и соотношения масс груза и платформы  $k_m = m_{\text{пл}}/m_{\text{тр}}$ , собственного момента инерции платформы представленного соотношением  $J_z = m_{\text{пл}} \rho_{\text{пл}}^2$ . Здесь и далее  $\rho_{\text{пл}}$  – радиус инерции платформы.

С учетом принятых выражений (1) и (2) примут следующий вид:

$$I_z = m \frac{1}{k_m + 1} \left( k_m \rho_{\text{пл}}^2 + b^2 + l^2 \left( \frac{2b}{l} (\sin \varphi + \cos \varphi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \right) \right), \quad (3)$$

$$\dot{I}_z = m \frac{l^2}{k_m + 1} \left( \frac{2b}{l} (\cos \varphi - \sin \varphi) + 2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right). \quad (4)$$

Смещение центра тяжести относительно центра масс вдоль осей с учетом принятых выше обозначений:

$$X_{цм} = \frac{b + l \cos \varphi}{k_m + 1} = \frac{b}{k_m + 1} + \frac{l}{k_m + 1} \cos \varphi, \quad (5)$$

$$Y_{цм} = \frac{l}{k_m + 1} \sin \varphi.$$

Дифференциальное уравнение углового движения

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\dot{I}_z}{I_z} \omega_z + C_{m_z} q \frac{Sb_A}{I_z} - C_{yq} \frac{Sb_Y}{I_z},$$

перепишем его с учетом полученных выражений

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{l^2 \left( \frac{2b}{l} (\cos \varphi - \sin \varphi) + 2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right)}{k_m \rho_{цм}^2 + b^2 + l^2 \left( \frac{2b}{l} (\sin \varphi + \cos \varphi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \right)} \omega_z + \frac{gq \left( (k_m + 1) \left( C_{m_z} b_A - C_y \left( b_{constY} + \frac{b}{k_m + 1} + \frac{l}{k_m + 1} \cos \varphi \right) \right) \right)}{p \left( k_m \rho_{цм}^2 + b^2 + l^2 \left( \frac{2b}{l} (\sin \varphi + \cos \varphi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \right) \right)}, \quad (6)$$

где  $p = \frac{G}{S} = \frac{mg}{S}$  - удельная нагрузка на крыло,

$H/m^2$ ;  $b_Y = b_{constY} + b_{const\_b} + b_{per\_l}$  - расстояние от центра масс БПЛА до его центра давления, соответственно постоянная часть, обусловленная взаимным расположением центра тяжести платформы и центра давления, постоянная часть, обусловленная величиной смещения шарнира груза и переменная часть, обусловленная величиной выноса положения груза относительно шарнира и его углового положения.

Дифференциальные уравнения поступательного движения центра масс БПЛА с учетом удельной нагрузки на крыло

$$\frac{dV_x}{dt} = g \left( u - \frac{C_x q}{p} - \sin \theta \right) + \omega_z V_y, \quad (7)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = g \left( \frac{C_y q}{p} - \cos \theta \right) - \omega_z V_x, \quad (8)$$

где  $u = P/G = P/mg$  - тяговооруженность.

Итоговая система дифференциальных уравнений движения БПЛА с изменяемой в полете структурой с учетом (6), (7) и (8) должна быть дополнена соотношениями

$$\frac{dH}{dt} = V_x \sin \theta + V_y \cos \theta,$$

$$\frac{dL}{dt} = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_z. \quad (9)$$

Модели аэродинамических коэффициентов, скоростной напор и угол атаки на основании работы [3], а также безразмерные геометрические параметры представим следующим образом

$$C_x = C_{x0} + \frac{C_y - C_{y0}^2}{\pi \lambda} + C_x^{\delta e} \cdot \delta_e, \quad (10)$$

$$C_y = C_{y0} + C_y^\alpha \cdot \alpha + C_y^{\delta e} \cdot \delta_e, \quad (11)$$

$$C_{m_z} = C_{m_z0} + C_{m_z}^\alpha \cdot \alpha + C_{m_z}^{\delta e} \cdot \delta_e, \quad (12)$$

$$q = \frac{\rho V^2}{2} = \frac{\rho (V_x^2 + V_y^2)}{2}, \quad (13)$$

$$\alpha = \arctan \frac{V_y}{V_x} = \arcsin \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_y}, \quad (14)$$

$$\bar{b} = \frac{b}{l}, \quad \bar{b}_A = \frac{b_A}{l}, \quad \bar{b}_{constY} = \frac{b_{constY}}{l},$$

$$\bar{\rho}_{цм} = \frac{\rho_{цм}}{l}, \quad \bar{b}_{constY1} = \frac{b_{constY}}{b_A}, \quad \bar{\rho}_{пл} = \frac{\rho_{пл}}{b_A}. \quad (15)$$

Учтем в (6), (7), (8) и (9) изменения расстояния между центром давления и центром масс, описанное ранее выражениями (5), а также принятые обозначения (10), (11), (12), (13) и (14). Представим полученную систему дифференциальных уравнений в безразмерном виде относительно перегрузки

$$\frac{1}{g} \frac{dV_x}{dt} = u - \frac{q}{p} \left( C_{x0} + \frac{C_{y0} (1 - C_{y0}) + C_y^\alpha \alpha + C_y^{\delta e} \delta_e}{\pi \lambda} + C_x^{\delta e} \delta_e \right) - \sin \theta + \frac{\omega_z V_y}{g},$$

$$\frac{1}{g} \frac{dV_y}{dt} = \frac{q}{p} \left( C_{y0} + C_y^\alpha \alpha + C_y^{\delta e} \delta_e \right) - \cos \theta - \frac{\omega_z V_x}{g}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{q \left( (C_{m_z0} + C_{m_z}^\alpha \alpha + C_{m_z}^{\delta e} \delta_e) \bar{b}_A (k_m + 1) \right)}{p \left( k_m \bar{\rho}_{цм}^2 + \bar{b}^2 + 2 \left( \bar{b} (\sin \varphi + \cos \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi \right) \right)} - \frac{\left( C_{y0} + C_y^\alpha \alpha + C_y^{\delta e} \delta_e \right) \left( \bar{b}_{constY} (k_m + 1) + \bar{b} + \cos \varphi \right)}{k_m \bar{\rho}_{цм}^2 + \bar{b}^2 + 2 \left( \bar{b} (\sin \varphi + \cos \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi \right)},$$

$$\frac{dH}{dt} = V_x \sin \theta + V_y \cos \theta, \quad \frac{dL}{dt} = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_z.$$

Предположим, что движение осуществляется таким образом, что угол атаки остается постоянным и в пределах допустимых (летных значений) или незначительно меняется, тогда без ущерба для достоверности описанного процесса, можно исключить слагаемые в моделях аэродинамики. Также предположим, что скорость движения по глиссаде остается постоянной, тогда скоростной напор можно принять величиной постоянной. Пренебрегая также величинами второго порядка малости, получим на основе (16) следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dV_x}{dt} &= u - \frac{q}{p} \left( C_{x0} + \frac{C_{y0} + C_y^{\delta e} \delta_e}{\pi \lambda} + C_x^{\delta e} \delta_e \right) - \\ & - \sin \theta + \frac{\omega_z V_y}{g}, \\ \frac{1}{g} \frac{dV_y}{dt} &= \frac{q}{p} (C_{y0} + C_y^{\delta e} \delta_e) - \cos \theta - \frac{\omega_z V_x}{g}, \\ \frac{1}{g} \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{q}{p} \bar{b}_A (k_m + 1) \times \\ & \times \frac{(C_{m_z0} + C_{m_z}^{\delta e} \delta_e) - (C_{y0} + C_y^{\delta e} \delta_e) \left( \frac{\bar{b}_{constY}}{\bar{b}_A} + \frac{\bar{b} + \cos \varphi}{\bar{b}_A (k_m + 1)} \right)}{k_m \bar{\rho}_{ni}^2 + \bar{b}^2 + 2(\bar{b}(\sin \varphi + \cos \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{dH}{dt} = V_x \sin \theta + V_y \cos \theta,$$

$$\frac{dL}{dt} = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_z.$$

Система (17) без учета подвижного груза примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dV_x}{dt} &= u - \frac{q}{p} \left( C_{x0} + \frac{C_{y0}}{\pi \lambda} \right) - \frac{q}{p} \left( \frac{C_y^{\delta e}}{\pi \lambda} + C_x^{\delta e} \right) \delta_e - \\ & - \sin \theta + \frac{\omega_z V_y}{g}, \\ \frac{1}{g} \frac{dV_y}{dt} &= \frac{q}{p} C_{y0} + \frac{q}{p} C_y^{\delta e} \delta_e - \cos \theta - \frac{\omega_z V_x}{g}, \\ \frac{b_A}{g} \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{q}{p} \frac{1}{\bar{\rho}_{ni}^2} (C_{m_z0} - \bar{b}_{constY1} C_{y0}) + \\ & + \frac{q}{p} \frac{1}{\bar{\rho}_{ni}^2} (C_{m_z}^{\delta e} - \bar{b}_{constY1} C_y^{\delta e}) \delta_e, \\ \frac{dH}{dt} &= V_x \sin \theta + V_y \cos \theta, \\ \frac{dL}{dt} &= V_x \cos \theta + V_y \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_z. \end{aligned} \quad (18)$$

## 2. Схема посадки

Из горизонтального полета, обозначенного на схеме (рис. 2.) точками 1-2, происходит переход в снижение. Так же как и в классическом варианте, как уже было сказано выше, во время горизонтального полета самолет переводится в посадочную конфигурацию, если это необходимо выпускаются закрылки, подбирается необходимая для посадки тяга двигателя. Следующий этап представляет собой криволинейное движение по дуге окружности 2-3 с радиусом А-2 для входа в глиссаду 3-4. Её угол должен быть как можно больше, потому как именно на этом этапе есть возможность существенно сократить дистанцию посадки. По существу этот этап представляет собой пикирование. Выход из пикирования происходит также по дуге окружности 4-5-6 с радиусом В-5. Затем незначительный прямолинейный участок 6-7 и вновь движение по дуге окружности 7-8-9. Если

следовать предложенной схеме, то в районе точки 9 горизонтальная скорость будет незначительной и участок 9-10 может представлять собой практически вертикальную прямую.

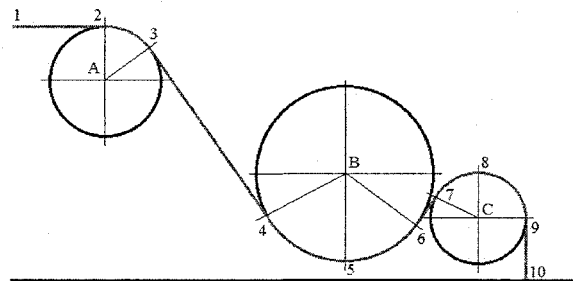


Рис. 2. Схема полета на заключительном этапе посадки

Если умозрительно предположить подобный маневр, то он может быть выполнен следующим образом. Этап полета 2-3-4-5 выполняется при включенном двигателе, осуществлять управление на этом этапе возможно с помощью аэродинамических органов управления (руля высоты, закрылков и элеронов). После прохождения точки 5 движение самолет переходит в набор высоты, при этом вертикальная скорость возрастает от нуля до некоторой величины. Если использовать при наборе высоты только накопленную ранее кинетическую энергию будет проходить интенсивное снижение вертикальной и горизонтальной скорости, этот момент соответствует точке 8. Угол тангажа при этом будет примерно соответствовать углу набора высоты. В виду падения скорости возможен срыв потока на крыле, аэродинамические органы управления в это время не эффективны, но возможно еще использование балансирного способа управления. На заключительном этапе посадки необходимо обеспечить приземление БПЛА с нулевым углом атаки, это возможно путем перемещения центра тяжести.

Как уже было сказано ранее основным ресурсом для снижения дистанции посадки является этап 3-4. Чем круче будет пикирование, тем меньше пройденная дистанция. Однако пикирование должно выполняться таким образом, чтобы было возможно выйти из него с последующим набором высоты. Необходимо помнить, что при этом возможна просадка, которая возрастает со скоростью пикирования и как следствие его кругизной. Этап полета 5-6 представлен дугой окружности равной дуге окружности 4-5. Это предположение не совсем верно, так как возможны режимы полета, при котором радиус набора высоты будет меньше, чем радиус выхода из пике. Таким образом, на этом этапе полета возможно сокращение дистанции посадки. Радиус дуги окружности дуги 7-8-9 в пределе может быть равным нулю. При этом переход от положительного угла тангажа, соответствующего набору высоты, к нулевому углу тангажа пол-

ностью осуществляется с помощью балансирного управления, ввиду того, что скорость полета близка к нулевой и аэродинамические органы управления не работают.

### Заключение

В том случае, если в результате работы будет продемонстрировано, что возможно снижение аппарата с высоты 30 м на дистанции меньше 200 метров, то можно будет сделать вывод о том, что, во-первых, возможно выполнять снижение по глиссаде угол которой больше  $4^\circ$ , а во-вторых, использование балансирного управления на всех этапах снижения, а особенно в заключительном – позволит еще больше сократить дистанцию посадки.

Целесообразно использовать балансирное управление в момент движения около точки 2. При этом если уменьшить статическую устойчивость аппарата, будет возможен более интенсивный разворот, в пределах радиус разворота может быть равен нулю. В процессе пикирования статическую устойчивость желательно не уменьшать, ввиду того, что как было показано в работе Остославского, усложнится вывод самолета из пикирования.

Ввиду того, что предложена траектория снижения, в качестве критерия оптимизации управления необходимо ввести отклонение действительной траектории от заданной. Итоговый функционал примет вид

$$J = \frac{1}{2} (\lambda_1 L(T)^2 + \lambda_2 V_x(T)^2 + \lambda_3 V_y(T)^2 + \lambda_4 a_y(T)^2) + \frac{1}{2} \int_0^T \{ \lambda_5 (H_0 f_H(t) - H(t))^2 + \lambda_6 (f_L(t) - L(t))^2 + \lambda_7 (\delta_e)^2 + \lambda_8 (\varphi)^2 \} dt.$$

### Литература

1. Бюшгенс, Г.С. Динамика самолета. Пространственное движение / Г.С. Бюшгенс, Р.В. Студнев. - М.: Машиностроение, 1983. - 320 с.
2. Пантилеев, А.С. Задачи исследования динамики движения БПЛА с изменяемой в полете структурой / А.С. Пантилеев // Динамика машин и рабочих процессов: сб. докл. Всерос. науч.-техн. конф., 8-10 декабря 2009 г. - Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. - С. 138-140.
3. AEROSIM BLOCKSET. Version 1.01. User's Guide. - <http://www.u-dynamics.com>

Поступила в редакцию 26 мая 2010 г.