

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННОГО РЯДА С УЧЕТОМ ХАОТИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЫ

Н.А. Кожихова, В.И. Ширяев

TIME SERIES FORECASTING USING CHAOTIC COMPONENT

N.A. Kozhikhova, V.I. Shiryayev

Представлена модель хаотического ряда, основанная на разложении процесса по системе ортогональных функций. Приведен пример прогнозирования потребления электроэнергии с учетом хаотической компоненты.

Ключевые слова: прогнозирование, хаотический ряд, хаотический базис.

The model based on orthogonal function decomposition is submitted for chaotic time series. The example describes forecasting of electric power consumption series with the chaotic component.

Keywords: forecasting, chaotic series, chaotic basis.

Введение

Проблема моделирования и прогнозирования процессов, обладающих признаками детерминированного хаоса, весьма актуальна для многочисленных приложений [1, 2]. Особый интерес представляют подходы, позволяющие извлекать информацию из коротких временных рядов [3], так как существующие подходы к прогнозированию хаотических рядов (сингулярный спектральный анализ, нейронные сети, авторегрессионные модели) требовательны к длине ряда [4]. Работа продолжает исследования [5, 6].

1. Постановка задачи

Рассматривается процесс y_k , $k = 1, \dots, N$, обладающий признаками детерминированного хаоса:

$$y_k = x_k + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где ε_k - нормально распределенные остатки с нулевым средним и неизвестной дисперсией. Критерии отнесения рядов к хаотическим [2, 5, 6]: антиперсистентность (показатель Херста $0 < H < 0,5$ или индекс фрактальности $0,5 < \mu < 1$), быстро спадающая автокорреляционная функция, спектр мощности, сосредоточенный в низкой полосе частот. Решение задачи прогнозирования предполагает нахождение оценок

$$y_{N+1} = x_{N+1}, \quad y_{N+2} = x_{N+2}, \dots \quad (2)$$

2. Разложение по хаотическому базису

Процесс y_k предлагается разложить по системе ортогональных функций [5]. Для x_k будем искать представление в виде линейной комбинации хаотических функций:

$$x_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ik}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где x_{ik} , $i = \overline{1, m}$, $k = 1, 2, \dots$ образуют систему базисных функций, заданных в моменты времени $k = 1, 2, \dots$; α_i - весовые коэффициенты (константы) $i = \overline{1, m}$.

Задача сводится к выбору системы ортогональных функций x_{ik} , $i = \overline{1, m}$:

$$\sum_{k=1}^N x_{cik} x_{cjk} = 0, \quad \forall i \neq j \quad (4)$$

и коэффициентов α_i , $i = \overline{1, m}$ по реализации y_k , $k = \overline{1, N}$. В качестве базисных могут выступать функции, порождающие известные нелинейные отображения. В частности, это [5, 6] треугольные отображения

$$x_{k+1} = \begin{cases} 2r x_k, & 0 \leq x_k \leq 1/2; \\ 2r(1-x_k), & 1/2 < x_k \leq 1; \end{cases} \quad 1/2 \leq r \leq 1, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5)$$

логистические отображения

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k), \quad x_1 \in (0, 1), \quad \lambda \in (3, 6; 4), \quad k = \overline{1, N}, \quad (6)$$

Кожихова Наталия Андреевна - аспирант кафедры прикладной математики ЮУрГУ; nk0618@gmail.com

Ширяев Владимир Иванович - д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики ЮУрГУ; vis@prima.susu.ac.ru

Kozhikhova Natalia Andreevna - postgraduate student of Applied Mathematics Department of SUSU; nk0618@gmail.com

Shiryayev Vladimir Ivanovich - PhD, professor, head of Applied Mathematics Department of SUSU; vis@prima.susu.ac.ru

функция Вейерштрасса

$$W(a, b, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi t). \quad (7)$$

Набор таких функций с определенными параметрами может образовать базис [8]. Процедура разложения ряда по базису хаотических функций осуществляется на основе последовательного выделения хаотических компонент. Для нахождения параметров модели (3) были предложены два алгоритма. Первый алгоритм основан на определении постоянных параметров $\lambda_i, r_i, a_i, b_i, i = \overline{1, m}$ с помощью предварительно обученной на модельных данных трехслойной нейронной сети. Второй алгоритм заключается в определении параметров максимально коррелированных с рядом процессов из классов отображений, порожденных базисными функциями:

$$p_i = \arg \max_{p_i} c(y, x_i), \quad (8)$$

где p_i – параметры функции, порождающей отображение x_{ik} , c – корреляционная функция. После нахождения базиса определяются константы α_i :

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_m] = \arg \min_{\alpha_i} \sum_{k=1}^N \left(x_k - \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{jk} \right)^2 \quad (9)$$

Исследования на модельных данных показали, что второй подход работоспособен при большем уровне шума (предельное отношение сигнал / шум – 1 дБ).

3. Модельный пример

Рассмотренный подход применен к решению задачи прогнозирования модельного процесса $y_k, k = \overline{1, \dots, 20}$, порожденному суммой двух логистических отображений (с параметрами $x_{01} = 0,6,$

$\lambda_1 = 3,72, \alpha_1 = 0,65$ и $x_{02} = 0,23, \lambda_2 = 3,81, \alpha_2 = 0,3$) и аддитивным белым гауссовым шумом $\varepsilon_k \sim N(0, 0,1)$, отношение сигнал / шум составило 3 дБ. Для сравнения приведен результат, полученный с помощью модели ARFIMA [9]:

$$\psi(L)(1-L)^d x_k = \theta(L)\varepsilon_k, \quad d \in (0;1). \quad (10)$$

На рис. 1 приведены аппроксимация, прогноз ряда y_k и сравнение результатов, полученных с помощью модели (3) и модели (10).

Ошибка аппроксимации по модели ARFIMA составила 8,8 %, по модели (3) – 4,5 %. Ошибка прогнозирования на 10 шагов вперед составила для модели ARFIMA 16,38 %, для модели (3) – 5 %. При этом параметры логистических отображений найдены с погрешностью не более 1 %. Для сравнения, процедура, приведенная в [7], позволяет найти параметры логистических отображений при отношении сигнал/шум не менее 20 дБ.

4. Пример прогнозирования ряда потребления электроэнергии

Модель временного ряда потребления электроэнергии:

$$y_k = y_k^T + y_k^S + \xi_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (11)$$

где y_k^T – компонента тренда, y_k^S – сезонная компонента, ξ_k – остатки.

Подходы к прогнозированию компоненты тренда и сезонной компоненты рассмотрены в [8]. Остатки модели (11) рассматриваются как шум, случайные нормально распределенные величины $\xi_k \sim N(0, \sigma^2)$. Однако анализ остатков позволяет предположить, что ряд ξ_k является детерминированным хаосом. Индекс фрактальности для ряда ξ_k равен 0,67, что соответствует антиперси-



Рис. 1. Аппроксимация и прогноз модельного ряда



Рис. 2. Аппроксимация и прогноз ряда потребления электроэнергии

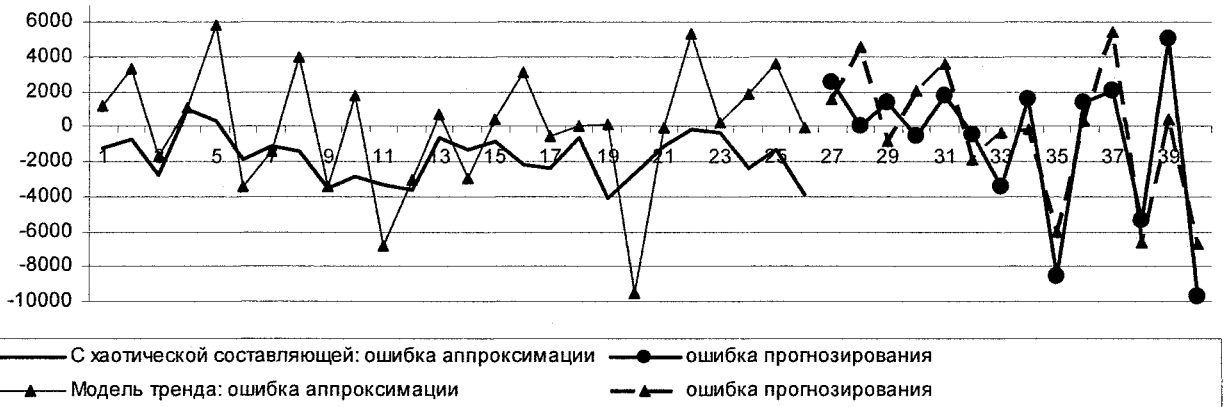


Рис. 3. Сравнение ошибок аппроксимации и прогнозирования

стентному процессу (индекс фрактальности для белого шума равен 0,5).

Для построения прогноза ряда ξ_k построена модель вида (3) с количеством слагаемых $m = 3$ для $k=1, \dots, N$. Прогноз ряда ξ_k с допустимой ошибкой не более 5 % может быть получен на 5 шагов вперед. Прогноз ξ_k включается в модель (11) наряду с прогнозом y_k^T, y_k^S

Включение в прогноз хаотической составляющей для данного ряда уменьшает среднюю ошибку прогноза на 5 шагов вперед с 16,5 % до 4,8 %, то есть в 4 раза. Результаты приведены на рис. 2, 3.

Заключение

Представленная процедура позволяет аппроксимировать хаотический временной ряд, разложив его на сумму антиперсистентных процессов. Важной особенностью решаемой задачи является малая длина выборки ($N < 25$). Полученные результаты могут найти применение для прогнозирования реальных хаотических процессов, повышения точности прогноза, а также в решениях задач фильтрации.

Литература

1. *Статистические свойства динамического хаоса* / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.А. Окрокверцхов, Г.И. Стрелкова // *Успехи физических наук*. - 2005. - Т. 175, № 2. - С. 163-179.
2. *Иванов, В.В. Прогнозирование детерминированных и хаотических временных процессов с помощью нестационарного сингулярно-спектрального анализа* / В.В. Иванов, А.В. Крынев, Г.В. Лукин // *Науч. сессия НИЯУ МИФИ-2006: сб. науч. тр.* - М.: НИЯУ МИФИ, 2006. - С. 38-39.
3. *Дубовиков, М.М. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов* / М.М. Дубовиков, А.В. Крынев, Н.В. Старченко // *Вестник РУДН*. - 2004. - Т. 3, № 1. - С. 81-95.
4. *Истомин, И.А. К проблеме обработки временных рядов: расширение возможностей метода локальной аппроксимации посредством сингулярного спектрального анализа* / И.А. Истомин, О.Л. Котляров, А.Ю. Лоскутов // *Теоретическая и математическая физика*. - 2005. - Т. 142, № 1. - С. 148-159.
5. *Кожихова, Н.А. Нейронные сети и задачи прогнозирования хаотических рядов* / Н.А. Кожихова

хова, В. И. Ширяев // Науч. сессия НИЯУ МИФИ-2010 XII Всерос. науч.-тех. конф. «Нейроинформатика-2010»: сб. науч. тр: в 2 ч. - М.: НИЯУ МИФИ, 2010. - Ч.2.-С. 122-130.

6. Ширяев, В.И. Финансовые рынки: нейронные сети, хаос и нелинейная динамика / В.И. Ширяев. — М.: Либроком, 2009. -230 с.

7. Разделение хаотических сигналов / Ю.В. Андреев, А.С. Дмитриев, Е.В. Ефремова, В.И. Пусто-

войт // Доклады РАН. - 2000. - Т. 372, № 1. - С. 36-39.

8. Granger, C. W. J. *Essays in econometrics: collected papers of Clive W.J./C W. J. Granger. - In 2 vol. Vol. 1. Spectral analysis, seasonality, nonlinearity, methodology, and forecasting* . — Cambridge: Cambridge University Press, 2001. — 523 p.

9. Galbraith John W., Zinde-Walsh Victoria. *Autoregression-Based Estimators for ARFIMA Models*. — Montreal: Fevrier, 2001. - 44 p.

Поступила в редакцию 6 апреля 2010 г.