УДК 517.948

О ПРОБЛЕМЕ ПОТЕРИ ТОЧНОСТИ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ИНФОРМАЦИИ

Н.Ю. Колесникова, Т.Н. Рудакова, А.В. Танана

THE PROBLEMS OF THE ACCURACY LOST DURING INFORMATION TRANSFER

N.Y. Kolesnikova, T.N. Rudakova, A.V. Tanana

Рассматривается метод М.М. Лаврентьева решения операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Получены точные оценки погрешности, доказывающие его оптимальность. Этот метод применён к решению обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности. Показано, что при преобразовании информации этим методом происходит минимальная потеря точности.

Ключевые слова: операторные уравнения, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

In this paper, we proved the optimality of M.M. Lavrentiev method for solving of the ill-posed problems. The precise estimations of the accuracy of this method were obtain. This method has been applied to the inverse problem of Cauchy for heat transfer equation. When we used this method the transfer information will be with minimum loss of accuracy.

Keywords: operator equations, regularization, the optimal method, error estimate, ill-posed problem.

Пусть F и U - некоторые гильбертовы пространства, а T - неограниченный оператор, действующий из F в U. Предположим, что нам требуется определить значение $u_0 = Tf_0$, но вместо f_0 в качестве исходной информации нам известна пара (f_δ, δ), в которой $f_\delta \in F$, а $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$. Требуется эту информацию преобразовать в пару $(u_\varepsilon, \varepsilon)$, в которой $u_\varepsilon \in U$, а $\|u_\varepsilon - u_0\| \le \varepsilon$.

Так как оператор T неограничен, то без дополнительной информации о значении u_0 $\varepsilon =$, что совершенно неудовлетворительно. Поэтому в качестве дополнительной информации можем использовать задание класса корректности Mc U, которому должно принадлежать точное значение u_0. Примером такого класса корректности может служить множество M из U, удовлетворяющее условию

$$T \in C\left[T^{-1}(M)\right]$$

Одна из основных проблем математической информатики заключается в разработке методов преобразования информации (f_δ, δ) в (u_ε, ε) и определении нижней грани ε среди всех возможных.

В настоящей работе методом М.М. Лаврентьева [1] решено операторное уравнение первого рода

$$Au = f_\delta; u \in U, f_\delta \in F,$$

в предположении, что $\|A^{-1}\| = \infty$, а $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$. Доказана оптимальность этого метода и найдена нижняя грань ε среди всех возможных. Результаты работы проиллюстрированы на обратной задаче Коши для уравнения теплопроводности.

1. Понятие метода преобразования информации

Пусть U, F и V - гильбертовы пространства, A - инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий U в F и имеющий неограниченный обратный, B - линейный ограни-

Колесникова Наталья Юрьевна - старший преподаватель кафедры вычислительной математики ЮУрГУ; Natasha720221 @mail.ru

Рудакова Татьяна Николаевна - канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики ЮУрГУ, rtn@susu.ac.ru

Танана Алексей Витальевич - канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики Уральского горного университета, г Екатеринбург; tvpa@susu.ac.ru

Kolesnikova Natalia Yurievna - senior lecturer of Computational mathematics department of SUSU; Natasha720221@mail.ru

Rudakova Tatiana Nikolaevna - PhD, associate professor of Computational mathematics department of SUSU; rtn@susu.ac.ru

Tanana Aleksei Vitalievich - PhD, associate professor of Mathematics department of Ural Mountain University, Yekaterinburg; tvpa@susu.ac.ru

ченный оператор, отображающий V в U, а $M_r = B\overline{S}_r$, где $\overline{S}_r = \{v : v \in V, \|v\| \le r\}$.

Предположим, что

$$A^{-1} \in C\left[A(M_r)\right]. \quad (1)$$

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au = f \quad \textbf{(2)}$$

и предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (2), которое принадлежит множеству M_r, но вместо f_0 нам известны $f_\delta \in F$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \le \delta$$

Требуется, используя априорную информацию M_r, f_δ и δ, определить приближенное решение u_δ уравнения (2) наименее уклоняющееся от точного решения u_0 и оценить уклонение $\|u_\delta - u_0\|$ на классе M_r.

Определение 1 Оператор P непрерывно отображающий пространство F в U будем называть методом приближенного решения уравнения (2) на множестве M_r.

Введем количественную характеристику точности метода P на множестве M_r

$$\Delta_\delta(P) = \sup_{u, f_\delta}\left\{\|u - Pf_\delta\| : u \in M_r, \|Au - f_\delta\| \le \delta\right\}. \quad (3)$$

Таким образом, метод P преобразует исходную информацию (M_r, f_δ, δ) в информацию $(Pf_\delta, \Delta_\delta(P))$

Мы заинтересованы в том, чтобы величина $\Delta_\delta(P)$ была минимальна. Для этого через $C[F,U]$ обозначим множество операторов непрерывно отображающих пространство F в U и определим число Δ_δ^{opt} формулой

$$\Delta_\delta^{opt} = \inf\left\{\Delta_\delta(P) : P \in C[F,U]\right\}, \quad \textbf{(4)}$$

где $\Delta_\delta(P)$ – определена формулой (3).

Определение 2. Метод P^{opt} будем называть оптимальным на классе M_r, если

$$\Delta_\delta\left(P^{opt}\right) = \Delta_\delta^{opt}$$

Теперь следуя [2], определим функции $\omega_1(\tau, r)$ и $\omega(\tau, r)$ формулами:

$$\omega_1(\tau, r) = \\ = \sup\left\{\|u_1 - u_2\| \cdot u_1, u_2 \in M_r, \|Au_1 - Au_2\| \le \tau\right\} \quad (5)$$

и

$$\omega(\tau, r) = \sup\left\{\|u\| \; u \in M_r, \|Au\| \le \tau\right\}, \quad (6)$$

где $\tau \ge 0$

Из леммы доказанной в [3, с. 17] следует, что

$$\omega_1(\tau, r) = \omega(\tau, 2r) \quad (7)$$

Лемма 1. Пусть $k \ge 0$. Тогда справедливо равенство $\omega(k\tau, kr) = k\omega(\tau, r)$

Доказательство. При $k = 0$ лемма очевидна. Пусть $k > 0$ и $\tau \ge r\|AB\|$ Тогда $k\tau \ge kr\|AB\|$, а из (6) следует, что

$$\omega(\tau, r) = r\|AB\| \quad (8)$$

и

$$\omega(k\tau, kr) = kr\|AB\|. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что $\omega(k\tau, kr) = k\omega(\tau, r)$ Пусть $k > 0$ и $\tau < r\|AB\|$. Тогда из того, что $u \in M_r$ и $\|Au\| \le \tau$ следует, что $ku \in M_{kr}$ и $\|A(ku)\| \le k\tau$

Таким образом

$$k\omega(\tau, r) \le \omega(k\tau, kr). \quad (10)$$

В другую сторону. Пусть $u \in M_{kr}$ и $\|Au\| \le k\tau$. Тогда $\frac{u}{k} \in M_r$ и $\left\|A\left(\frac{u}{k}\right)\right\| \le \tau$, т.е.

$$\frac{1}{k}\omega(k\tau, kr) \le \omega(\tau, r),$$

или

$$\omega(k\tau, kr) \le k\omega(\tau, r). \quad \textbf{(11)}$$

Из (10) и (11) следует утверждение леммы.

Лемма 2. Пусто $P \in C[F,U]$, а $\omega_1(\tau, r)$ определена формулой (7). Тогда справедлива оценка

$$\Delta_\delta(P) \ge \frac{1}{2}\omega_1(2\delta, r).$$

Доказательство. Пусть ε – достаточно малое положительное число. Тогда, на основании (7) существуют элементы $u_1, u_2 \in M_r$ такие, что

$$\|u_1 - u_2\| \ge \omega_1(2\delta, r) - \varepsilon, \quad (12)$$

а

$$\|Au_1 - Au_2\| \le 2\delta \quad (13)$$

Если положить $\overline{f}_\delta = \frac{(Au_1 - Au_2)}{2}$, то из (13) будет следовать, что

$$\|Au_1 - \overline{f}_\delta\| \le \delta \text{ и } \|Au_2 - \overline{f}_\delta\| \le \delta. \quad (14)$$

Так как

$$\max\left\{\|u_1 - P\overline{f}_\delta\|, \|u_2 - P\overline{f}_\delta\|\right\} \ge \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|, \quad (.15)$$

то из (12), (14) и (15) следует, что

$$\max\left\{\|u_1 - P\overline{f}_\delta\|, \|u_2 - P\overline{f}_\delta\|\right\} \ge \frac{1}{2}\omega_1(2\delta, r) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (16)$$

а из (3), что

$$\Delta_\delta(P) \ge \max\left\{\|u_1 - P\overline{f}_\delta\|; \|u_2 - P\overline{f}_\delta\|\right\}. \quad (17)$$

Таким образом, из (16) и (17) следует, что

$$\Delta_\delta(P) \ge \frac{1}{2}\omega_1(2\delta, r) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ввиду произвольности ε из (18) следует утверждение леммы.

Из формул (4), (7) и лемм 1 и 2 следует, что

$$\Delta_\delta^{opt} \geq \omega(\delta, r). \qquad (19)$$

2. Исследование на оптимальность метода М.М. Лаврентьева

Пусть $U = F = V = H$, а операторы A^*A и BB^* положительно определены. Тогда на основании леммы, доказанной в [4], для операторов A и B имеют место полярные разложения $A = Q\bar{A}$ и $B = \bar{B}P$, где Q и P – унитарные операторы, $\bar{A} = \sqrt{A^*A}$, а $\bar{B} = \sqrt{BB^*}$. Кроме того, предположим, что спектр $Sp(\bar{A})$ оператора $\bar{A}$ совпадает с отрезком $[0, \|A\|]$, а

$$\bar{B} = G(\bar{A}), \qquad (20)$$

где $G(\sigma)$ – строго возрастающая, непрерывная на отрезке $[0, \|A\|]$ и дифференцируемая на интервале $(0, \|A\|)$ функция, такая, что $G(0) = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$rG(\sigma)\sigma = \tau; \sigma \in [0, \|A\|] \qquad (21)$$

Из (21) следует, что если $\tau < 0$ и $\tau < rG(\|A\|)\|A\|$, то это уравнение имеет единственное решение $\bar{\sigma}(\tau) = \psi\left(\frac{\tau}{r}\right)$, где $\psi(x)$ – функция обратная $G(\sigma)\sigma$. Из известной теоремы об обратной функции следует, что $\psi \in C[0, G(\|A\|)\|A\|]$ и $\psi(0) = 0$

Таким образом

$$\bar{\sigma}(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to 0. \qquad (22)$$

Лемма 3. Если выполнены все условия на операторы A и B, сформулированные выше, а $\tau < r\|AB\|$, то справедлива формула

$$\omega(\tau, r) = rG[\bar{\sigma}(\tau)],$$

где $\bar{\sigma}(\tau)$ решение уравнения (21).

Доказательство. Пусть ε – достаточно малое, положительное число. Тогда, выбрав натуральное число n_0 таким, что

$$rG[\bar{\sigma}(\tau)] - rG\left[\frac{n_0 - 1}{n_0}\bar{\sigma}(\tau)\right] < \varepsilon, \qquad (23)$$

рассмотрим подпространство H_0, определяемое формулой

$$H_0 = E_{\bar{\sigma}(\tau)}H - E_{\frac{n_0-1}{n_0}\bar{\sigma}(\tau)}H, \qquad (24)$$

где $\{E_\sigma : 0 \leq \sigma \leq \|A\|\}$ – разложение единицы, порожденное оператором $\bar{A}$ [5, с. 336]. Легко проверить, что

$$M_r = \bar{B}\bar{S}_r \qquad (25)$$

Пусть $v_0 \in H_0$ и

$$\|v_0\| = r. \qquad (26)$$

Тогда из (25) и (26) следует, что

$$u_0 = \bar{B}v_0 \in M_r \qquad (27)$$

Так как $u_0 \in H_0$, то на основании (23)–(26)

$$\|u_0\| \geq rG[\bar{\sigma}(\tau)] - \varepsilon. \qquad (28)$$

Ввиду того, что $u_0, \bar{A}u_0 \in H_0$, а функция $G(\sigma)$ строго возрастает, из (24) следует, что

$$\|\bar{A}u_0\| \leq rG[\bar{\sigma}(\tau)]\bar{\sigma}(\tau) = \tau. \qquad (29)$$

Из (27) и (29) следует, что

$$\|u_0\| \leq \omega(\tau, r), \qquad (30)$$

а из (28) и (30), что

$$\omega(\tau, r) \geq rG[\bar{\sigma}(\tau)] - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε будем иметь

$$\omega(\tau, r) \geq rG[\bar{\sigma}(\tau)]. \qquad (31)$$

Теперь докажем неравенство в другую сторону. Для этого представим пространство H в виде ортогональной суммы

$$H = H_1 + H_2, \qquad (32)$$

подпространство $H_1 = E_{\bar{\sigma}(\tau)}H$, а $H_2 = \left(E - E_{\bar{\sigma}(\tau)}\right)H$.

Из теоремы [5, с. 336] следует, что подпространства H_1 и H_2 инвариантны для операторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Из того, что $u_0 \in M_r$, а

$$\|\bar{A}u_0\| \leq \tau, \qquad (33)$$

следует существование элемента $v_0 \in H$ такого, что

$$\|v_0\| \leq r \qquad (34)$$

и

$$u_0 = \bar{B}v_0 \qquad (35)$$

Используя (32), представим элемент v_0 в виде ортогональной суммы

$$v_0 = v_1 + v_2, \qquad (36)$$

где $v_i = pr(v_0, H_i), i = 1,2.$

Пусть $r_1 = \|v_1\|$, а $r_2 = \|v_2\|$. Тогда из (34) и (36) следует, что

$$r_1^2 + r_2^2 \leq r^2 \qquad (37)$$

Из инвариантности подпространств H_1 и H_2 для оператора $\bar{B}$ и формулы (35) следует, что $u_0 = u_1 + u_2$ и

$$u_i = \bar{B}v_i \in H_i; i = 1,2. \qquad (38)$$

Из инвариантности подпространств H_1 и H_2 для оператора $\bar{A}$ будем иметь

$$\bar{A}u_i \in H_i, i = 1,2. \qquad (39)$$

Из (33), (38) и (39) следует, что

$$\|\bar{A}u_i\| \leq \frac{r_i}{r}\tau; i = 1,2. \qquad (40)$$

Так как $G(\sigma)$ строго возрастает, то из (38) следует, что

$$\|u_1\| \le r_1 G\left[\bar{\sigma}(\tau)\right], \qquad (41)$$

а из (40), что

$$\|u_2\| \le \frac{r_2}{r}\frac{\tau}{\bar{\sigma}(\tau)}. \qquad (42)$$

Ввиду того, что

$$r_2 G\left[\bar{\sigma}(\tau)\right]\bar{\sigma}(\tau) = \frac{r_2}{r}\tau, \qquad (43)$$

из (42) и (43) следует, что

$$\|u_2\| \le r_2 G\left[\bar{\sigma}(\tau)\right]. \qquad (44)$$

Из (37) и (38), (41) и (44) следует, что

$$\|u_0\| \le r G\left[\bar{\sigma}(\tau)\right]. \qquad (45)$$

Ввиду произвольности u_0 из (33) – (35) и (45) следует, что

$$\omega(\tau, r) \le r G\left[\bar{\sigma}(\tau)\right], \qquad (46)$$

а из (31) и (46), что

$$\omega(\tau, r) = r G\left[\bar{\sigma}(\tau)\right].$$

Из формулы (46) следует утверждение леммы.

Из леммы 3 и формулы (22) следует, что множество M_r является классом корректности для уравнения (2), а из формулы (19) и леммы 3 следует, что

$$\Delta_\delta^{opt} \ge r G\left[\bar{\sigma}(\tau)\right]. \qquad (47)$$

Так как, используя лемму работы [4], уравнение (2) можно заменить эквивалентным

$$\bar{A}u = g, \qquad (48)$$

где $\bar{A} = \sqrt{A^* A}$, $g = Q^* f$, а множество M_r, с учетом формулы (25) совпадает с множеством $\bar{B}S_r$, где $\bar{B} = \sqrt{BB^*}$, то задачу приближенного решения уравнения (48) поставим следующим образом.

Предположим, что при $g = g_0 \in H$ существует точное решение u_0 уравнения (48), которое принадлежит множеству M_r, но точное значение правой части g_0 нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $g_\delta \in H$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|g_\delta - g_0\| \le \delta$.

Требуется по исходным данным M_r, g_δ и δ определить приближенное решение u_δ уравнения (48), минимально уклоняющееся от u_0 на классе M_r и оценить это уклонение.

Будем решать эту задачу методом М.М. Лаврентьева [1], в котором используется регуляризующее семейство операторов $\{R_\alpha . 0 < \alpha \le \alpha_0\}$, действующих из H в H и определяемых формулой

$$R_\alpha = \bar{B}\left[\bar{C} + \alpha E\right]^{-1}, \alpha \in (0, \alpha_0], \qquad (49)$$

а $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$.

Лемма 4. Для любого $\alpha > 0$ оператор R_α, определяемый формулой (11) ограничен и

$$\|R_\alpha\| \le \max_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G(\sigma)}{G(\sigma)\sigma + \alpha}.$$

Доказательство. Так как

$$\|R_\alpha\|^2 = \sup_{\|g\| \le 1} \|R_\alpha g\|^2, \qquad (50)$$

а

$$\|R_\alpha g\|^2 = (R_\alpha g, R_\alpha g), \qquad (51)$$

то ввиду самосопряженности оператора R_α из (50) и (51) следует, что

$$\|R_\alpha\|^2 = \sup_{\|g\| \le 1} (R_\alpha g, g). \qquad (52)$$

Из (49) и (52) следует, что

$$\|R_\alpha\|^2 = \sup_{\|g\| \le 1}\left(\bar{B}^2\left[\bar{C} + \alpha E\right]^{-2} g, g\right). \qquad (53)$$

Пусть $\{E_\sigma \cdot 0 \le \sigma \le \|A\|\}$ – спектральное разложение единицы, порожденное оператором $\bar{A}$. Тогда из (49) следует, что

$$R_\alpha^2 g = \int_0^{\|A\|} \frac{G^2(\sigma)}{\left[\sigma G(\sigma) + \alpha\right]^2} dE_\sigma g, \qquad (54)$$

а из (53) и (54), что

$$\|R_\alpha\|^2 = \sup_{\|g\| \le 1} \int_0^{\|A\|} \frac{G^2(\sigma)}{\left[\sigma G(\sigma) + \alpha\right]^2} d(E_\sigma g, g) \qquad (55)$$

Учитывая (17), получим, что

$$\|R_\alpha\|^2 \le \sup_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G^2(\sigma)}{\left[\sigma G(\sigma) + \alpha\right]^2} \sup_{\|g\| \le 1} \int_0^\infty d(E_\sigma g, g), \qquad (56)$$

а из (56), что

$$\|R_\alpha\|^2 \le \sup_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G^2(\sigma)}{\left[\sigma G(\sigma) + \alpha\right]^2}. \qquad (57)$$

Так как функция $\dfrac{G^2(\sigma)}{\left[\sigma G(\sigma) + \alpha\right]^2}$ непрерывна на отрезке $\left[0, \|A\|\right]$, то существует значение $\sigma \in \left[0, \|A\|\right]$ такое, что

$$\frac{G^2(\bar{\sigma})}{\left[\bar{\sigma} G(\bar{\sigma}) + \alpha\right]^2} = \sup_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G^2(\sigma)}{\left[\sigma G(\sigma) + \alpha\right]^2}. \qquad (58)$$

Из соотношений (57) и (58) следует утверждение леммы.

Лемма 5. Для любых α и $r > 0$ справедливо соотношение

$$\sup_{\|v\| \le r} \|R_\alpha \bar{C}v - \bar{B}v\| \le r\alpha \max_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G(\sigma)}{\sigma G(\sigma) + \alpha}.$$

Доказательство. Так как

$$\bar{B}\left[\bar{C} + \alpha E\right]^{-1} \bar{C}v - \bar{B}v = -\alpha \bar{B}\left[\bar{C} + \alpha E\right]^{-1} v, \qquad (59)$$

то из (49) и (59) следует, что

$$\left\| R_\alpha \bar{C}v - \bar{B}v \right\| = \alpha \left\| \bar{B}\left[\bar{C} + \alpha E\right]^{-1} v \right\| \quad (60)$$

Если $v \neq 0$, то из (60) следует, что

$$\left\| R_\alpha \bar{C}v - \bar{B}v \right\| = \alpha \|v\| \left\| \bar{B}\left[\bar{C} + \alpha E\right]^{-1} \frac{v}{\|v\|} \right\|. \quad (61)$$

Так как

$$\sup_{\|v\| \le r} \left\| R_\alpha \bar{C}v - \bar{B}v \right\| = \sup_{0<\|v\| \le r} \left\| R_\alpha \bar{C}v - \bar{B}v \right\|,$$

то из (61) следует, что

$$\sup_{\|v\| \le r} \left\| R_\alpha \bar{C}v - \bar{B}v \right\| = r\alpha \sup_{\|w\| \le 1} \left\| \bar{B}\left[\bar{C} + \alpha E\right]^{-1} w \right\|. \quad (62)$$

Из (49) и (62) следует, что

$$\sup_{\|v\| \le r} \left\| R_\alpha \bar{C}v - \bar{B}v \right\| \le r\alpha \left\| R_\alpha \right\|. \quad (63)$$

Из (63) и леммы 4 следует утверждение леммы.

Пусть $u_0 \in M_r$, а $\left\| g_\delta - \bar{A}u_0 \right\| \le \delta$ Тогда

$$\left\| u_0 - R_\alpha g_\delta \right\| \le \left\| u_0 - R_\alpha \bar{A}u_0 \right\| + \delta \left\| R_\alpha \right\|. \quad (64)$$

Так как

$$\left\| u_0 - R_\alpha \bar{A}u_0 \right\| \le \sup_{\|v_0\| \le r} \left\| R_\alpha \bar{C}v_0 - \bar{B}v_0 \right\|, \quad (65)$$

то из лемм 3, 4 и соотношений (64), (65) следует, что

$$\left\| u_0 - R_\alpha g_\delta \right\| \le (r\alpha + \delta) \max_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G(\sigma)}{\sigma G(\sigma) + \alpha}. \quad (66)$$

Обозначим через $G'(\sigma)$ производную от функции $G(\sigma)$, а через $\bar{\sigma}(\delta)$ решение уравнения (21) при $r = \delta$.

Теорема 1. Пусть для любого $\sigma \in (0, \|A\|)$ $G'(\sigma) > 0$, $\dfrac{G^2(\sigma)}{G'(\sigma)}$ возрастает, $\delta < rG(\|A\|)\|A\|$, а

$$\bar{\alpha}(\delta) = \frac{G^2(\bar{\sigma}(\delta))}{G'(\bar{\sigma}(\delta))} \quad (67)$$

Тогда

$$\Delta_\delta\left(R_{\bar{\alpha}(\delta)}\right) \le rG\left[\bar{\sigma}(\delta)\right].$$

Доказательство. Пусть u_0 произвольный элемент из множества M_r, а $\left\| g_\delta - \bar{A}u_0 \right\| \le \delta$. Тогда из формулы (66) следует, что

$$\left\| u_0 - R_{\bar{\alpha}(\delta)} g_\delta \right\| \le \left(r\bar{\alpha}(\delta) + \delta\right) \max_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G(\sigma)}{\sigma G(\sigma) + \bar{\alpha}(\delta)}. \quad (68)$$

Теперь вычислим $\max\left\{ \dfrac{G(\sigma)}{\sigma G(\sigma) + \bar{\alpha}(\delta)} \cdot 0 \le \sigma \le \|A\| \right\}$.

Для этого продифференцируем функцию $\dfrac{G(\sigma)}{\sigma G(\sigma) + \bar{\alpha}(\delta)}$

$$\left[\frac{G(\sigma)}{\sigma G(\sigma) + \bar{\alpha}(\delta)}\right]' = \frac{\bar{\alpha}(\delta) G'(\sigma) - G^2(\sigma)}{\left[\sigma G(\sigma) + \bar{\alpha}(\delta)\right]^2}, \quad (69)$$

и исследуем поведение числителя в правой части равенства (69). Получаем, что при $\sigma < \bar{\sigma}(\delta)$

$$\frac{G^2(\bar{\sigma}(\delta))}{G'(\bar{\sigma}(\delta))} G'(\sigma) - G^2(\sigma) > 0. \quad (70)$$

При $\sigma = \bar{\sigma}(\delta)$

$$\frac{G^2(\bar{\sigma}(\delta))}{G'(\bar{\sigma}(\delta))} G'(\sigma) - G^2(\sigma) = 0, \quad (71)$$

и при $\sigma > \bar{\sigma}(\delta)$

$$\frac{G^2(\bar{\sigma}(\delta))}{G'(\bar{\sigma}(\delta))} G'(\sigma) - G^2(\sigma) < 0 \quad (72)$$

Из соотношений (70)–(72) следует, что

$$\max_{0 \le \sigma \le \|A\|} \frac{G(\sigma)}{\sigma G(\sigma) + \bar{\alpha}(\delta)} = G(\bar{\sigma}(\delta)),$$

а из (21), (67) и (68), что

$$\left\| u_0 - R_{\bar{\alpha}(\delta)} g_\delta \right\| \le rG(\bar{\sigma}(\delta)). \quad (73)$$

Ввиду произвольности элементов u_0, g_δ из соотношения (73) следует утверждение теоремы.

Из теоремы 1 и формулы (47) следует:

Теорема 2. Пусть для любого $\sigma \in (0, \|A\|)$ $G'(\sigma) > 0$, функция $\dfrac{G^2(\sigma)}{G'(\sigma)}$ возрастает, $\delta < rG(\|A\|)\|A\|$, а $\bar{\alpha}(\delta) = \dfrac{G^2\left[\bar{\sigma}(\delta)\right]}{G'\left[\bar{\sigma}(\delta)\right]}$. Тогда метод М.М. Лаврентьева $R_{\bar{\alpha}(\delta)}$, определяемый (49), оптимален.

3. Обратная задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} = \Delta u(\bar{x}, t), \quad (74)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ и $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

Предположим, что температурное поле $u(\bar{x}, T)$ в момент времени T нам известно приближенно, а распределение температуры $u_0(\bar{x}) = u(\bar{x}, t_0)$ в момент времени $t_0 < T$ требуется определить.

Далее обозначим $u(\bar{x}, T)$ через $f(\bar{x})$ и предположим, что u_0 и $f \in L_2(\mathbb{R}_n)$

Поставленную таким образом задачу называют обратной задачей Коши для уравнения теплопроводности. Так как эта задача [6] является примером некорректно поставленной задачи, то мы предположим, что при точном значении $f_0(\bar{x})$ существует начальное распределение температуры

$v_0(\bar{x}) = u(\bar{x},0)$, которое принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}_n)$ и

$$\|v_0\|_{L_2} \le r. \qquad (75)$$

Пусть точное значение $f_0(\bar{x})$ нам не известно, а вместо него дано некоторое δ – приближение $f_\delta(\bar{x}) \in L_2(\mathbb{R}_n)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такой, что

$$\|f_\delta - f_0\|_{L_2} \le \delta. \qquad (76)$$

Требуется, используя исходные данные (f_δ, δ, r) задачи, построить приближенное решение $u_\delta(\bar{x}) \in L_2(\mathbb{R}_n)$, наиболее близкое к точному решению $u_0(\bar{x})$, и оценить уклонение $\|u_\delta - u_0\|_{L_2}$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся преобразованием Фурье (стр. 412 [7]), которое определяется следующим образом

$$\hat{u}(\bar{\lambda}) = \Phi[u(\bar{x})] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n} u(\bar{x}) e^{-i(\bar{x},\bar{\lambda})} d\bar{x}, \qquad (77)$$

где $i=\sqrt{-1}$, $\bar{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}_n$, а $(\bar{x},\bar{\lambda})=\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i$.

Обратное преобразование Фурье Φ^{-1} будет иметь вид

$$u(\bar{x}) = \Phi^{-1}[\hat{u}(\bar{\lambda})] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n} \hat{u}(\bar{\lambda}) e^{i(\bar{\lambda},\bar{x})} d\bar{\lambda}. \qquad (78)$$

Хорошо известно, что преобразование Фурье Φ отображает пространство $L_2(\mathbb{R}_n)$ на себя и при этом имеет место теорема Планшереля [7, с. 412], которая утверждает изометричность этого преобразования, т.е. для любого $u \in L_2(\mathbb{R}_n)$

$$\|\Phi u\|_{L_2} = \|u\|_{L_2}. \qquad (79)$$

Теперь используем преобразование Фурье Φ для решения уравнения (74). Для этого дополнительно предположим, что для любого t функции $u(\bar{x},t)$, $u'_{x_i}(\bar{x},t)$ и $u''_{x_i^2}(\bar{x},t)$ абсолютно интегрируемы по всему пространству $\mathbb{R}_n$, функция $u'_t(\bar{x},t)$ имеет интегрируемую мажоранту $\psi(\bar{x})$,

$$\sup_{t\in[0,T]} |u'_t(\bar{x},t)| \le \psi(\bar{x}) \qquad (80)$$

и

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}_n} u(\bar{x},t) e^{-i(\bar{\lambda},\bar{x})} d\bar{x} \right| \le \int_{\mathbb{R}_n} \psi(\bar{x}) d\bar{x}. \qquad (81)$$

Таким образом, преобразование Фурье Φ переводит уравнение (74) в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\hat{u}'_t(\bar{\lambda},t) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \hat{u}(\bar{\lambda},t). \qquad (82)$$

Решая уравнение (82), получим

$$\hat{u}(\bar{\lambda},t) = \hat{v}_0(\bar{\lambda}) e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 t}, \qquad (83)$$

где $\hat{v}_0(\bar{\lambda}) = \Phi[v_0(\bar{x})]$, а $v_0(\bar{x}) = u(\bar{x},0)$.

Из (83) следует, что

$$\hat{u}_0(\lambda) = \hat{v}_0(\bar{\lambda}) e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 t}, \qquad (84)$$

а

$$\hat{f}_0(\bar{\lambda}) = \hat{v}_0(\bar{\lambda}) e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 T}. \qquad (85)$$

Таким образом, из (84) и (85) следует, что операторы B и $C = AB$ могут быть представлены формулами

$$B\hat{v}(\bar{\lambda}) = e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 t_0} \hat{v}(\bar{\lambda}), \qquad (86)$$

а

$$C\hat{v}(\bar{\lambda}) = e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 T} \hat{v}(\bar{\lambda}), \qquad (87)$$

где $\hat{v}(\bar{\lambda})$, $B\hat{v}(\bar{\lambda})$ и $C\hat{v}(\bar{\lambda}) \in L_2(\mathbb{R}_n)$, а операторное уравнение, которое нам предстоит решать, будет иметь вид

$$A\hat{u}(\bar{\lambda}) = e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 (T-t_0)} \hat{u}(\bar{\lambda}) = \hat{f}(\bar{\lambda}). \qquad (88)$$

Из (86) и (88) следует, что

$$B = G(A), \qquad (89)$$

а из (86), (88) и (89) следует, что

$$G(\sigma) = \sigma^{\frac{t_0}{T-t_0}}. \qquad (90)$$

Используя метод М.М. Лаврентьева для решения уравнения (88), получим, что

$$\hat{u}_\delta^\alpha(\bar{\lambda}) = e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 t_0} \left[e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 T} + \alpha \right]^{-1} \hat{f}_\delta(\bar{\lambda}), \qquad (91)$$

где $\hat{f}_\delta(\bar{\lambda}) = \Phi[f_\delta(\bar{x})]$

Следуя (21), рассмотрим уравнение

$$G(\sigma)\sigma = \frac{\delta}{r}. \qquad (92)$$

Из (90) следует, что решение $\bar{\sigma}(\delta)$ уравнения (92) имеет вид

$$\bar{\sigma}(\delta) = \left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{T-t_0}{T}}. \qquad (93)$$

Из (67), (90) и (93) следует, что

$$\bar{\alpha}(\delta) = \frac{T-t_0}{t_0} \left(\frac{\delta}{r}\right) \qquad (94)$$

Из (91) и (94) следует, что приближенное решение $\hat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}(\bar{\lambda})$ уравнения (88) будет иметь вид

$$\hat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}\left(\bar{\lambda}\right)=\frac{e^{T\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2}}{e^{t_0\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2}+\bar{\alpha}\left(\delta\right)e^{\left(t_0+T\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2}}\hat{f}_\delta\left(\bar{\lambda}\right) \quad (95)$$

Из (73), (90) и (93) следует, что для приближенного решения $\hat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}\left(\bar{\lambda}\right)$, определяемого формулами (94) и (95), справедлива оценка

$$\left\|\hat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}-u_0\right\|\le r^{\frac{t_0}{T}}\delta^{\frac{T-t_0}{T}}. \quad (96)$$

Применяя к $\hat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}\left(\bar{\lambda}\right)$ обратное преобразование Фурье Φ^{-1}, получим приближенное решение $u_\delta\left(\bar{x}\right)$ задачи (74)–(76) для которого будет выполняться оценка (96).

Заключение

В работе доказана оптимальность метода М.М. Лаврентьева при решении обратных задач. Получены точные оценки погрешности и показано, что при преобразовании информации этим методом происходит минимальная потеря точности.

Литература

1 Лаврентьев, М.М. Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР - 1959. - Т. 127, № 1. - С 31-33.

2. Иванов, В.К. Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач / В.К Иванов, Т.И Королюк // ЖВМ и МФ - 1969 - Т. 9, № 1. - С. 30-41

3. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений/В.П. Танана. — М.. Наука, 1981. - 156с.

4. Менихес, Л.Д. Конечномерная аппроксимация в методе М.М. Лаврентьева / Л.Д. Менихес, В.П. Танана // Сибирский журнал вычислительной математики. — 1988, - Т 1, № 1 —С 59-66.

5. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — М.. Наука, 1965.

6. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. — М.. Наука, 1978.

7 Колмогоров, А. Н Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н Колмогоров, СВ. Фомин. - М. Наука, 1972.

Поступила в редакцию 1 июня 2009 г.