УДК 517.977.80

ОДНА ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ СКОРОСТИ УБЕГАЮЩЕГО

В.И. Ухоботов, О.В. Зайцева

ABOUT ONE PROBLEM OF IMPULSE PURSUIT AT THE LIMITED VELOCITY OF THE ESCAPING

V.I. Ukhobotov, O.V. Zayceva

Преследователь управляет реактивной силой точки переменной массы. Убегающий управляет ограниченной по величине скоростью. Найдены оптимальное время преследования и оптимальные управления игроков.

Ключевые слова: импульсное преследование, область поражения, оптимальные управления.

The persecutor operates jet force of a point of variable weight. Escaping operates the speed limited on size. Optimum time of pursuit and optimum managements of players are found.

Keywords: impulse pursuit, defeat area, optimum managements.

Введение

В работе [1] рассмотрена игровая задача преследования, в которой преследователь управляет точкой переменной массы, движущейся только под действием реактивной силы. Убегающий управляет своей ограниченной по величине скоростью.

В статье рассматривается усложненный вариант задачи, когда на точку переменного состава действует сила, пропорциональная ее скорости.

Движение точки переменной массы описывается уравнением Мещерского [2], которое в соответствующих безразмерных величинах запишем в следующем виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y},\ \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{y} + \left(\ln m(t)\right) \cdot \mathbf{u}. \qquad (1)$$

Здесь вектор $\mathbf{x} \in R^n$ задает положение точки; $\mathbf{y} \in R^n$ - скорость точки; и - вектор относительной скорости отделяющихся частиц, норма $\| \mathbf{u} \| = a$ которого является постоянной; $m(t) = 1 + m_1(t)/m_0$, где $m_1(t)$ - масса топлива в момент времени t, m_0 - неизменяемая часть массы.

Условие неперерасхода имеющегося запаса топлива $m_1(t) \geq 0$ принимает вид

$$m(t) \geq 1. \qquad (2)$$

Считаем, что наряду с непрерывным изменением массы $m(t)$ в отдельные моменты времени t может происходить мгновенное отделение конечного количества массы $0 < \Delta m \leq m(t) - 1$ со скоростью $u(t)$. Это приводит к мгновенному изменению скорости [2]

$$\mathbf{y}(t+) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}(t) \ln \frac{m(t+)}{m(t)},\ m(t+) = m(t) - \Delta m. \qquad (3)$$

Положение убегающего задается вектором $\mathbf{z} \in R^n$, и его уравнение движения имеет вид

$$\mathbf{z} = \mathbf{v},\ \| \mathbf{v} \| \leq 1. \qquad (4)$$

Задано число $\varepsilon > 0$, с помощью которого цель преследования записывается неравенством

$$\| \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t) \| \leq \varepsilon. \qquad (5)$$

1. Формулировка результатов

Введем в рассмотрение функцию

$$g(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon - t, & \text{при } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ -\left(1 - e^{-t}\right) \ln \dfrac{e^t - 1}{e^\varepsilon - 1}, & \text{при } \varepsilon \leq t. \end{cases} \qquad (6)$$

Обозначим $S = \{ s \in R^n : \| s \| \leq 1 \}$ - круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Ухоботов Виктор Иванович - д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации Челябинского государственного университета; alex62@ph.chel.ru

Зайцева Оксана Витальевна - старший преподаватель кафедры теории управления и оптимизации Челябинского государственного университета; alex62@ph.chel.ru

Ukhobotov Victor Ivanovich - PhD, professor, head of Theory of management and optimization department of Chelyabinsk State University; alex62@ph.chel.ru

Zayceva Oksana Vitalievna - senior lecturer of Theory of management and optimization department of Chelyabinsk State University; alex62@ph.chel.ru

При

$$0 \le t \le \ln\left(1+\left(e^{\varepsilon}-1\right)m^{a}\right)=\mathrm{T}(m,\varepsilon) \qquad (7)$$

обозначим

$$\mathrm{K}(\mathbf{y},m,\varepsilon,t)=$$

$$=\bigcup_{0\le s\le t}\left(\left(1-e^{-s}\right)y+\left[a\left(1-e^{-s}\right)\ln m+g(s,\varepsilon)\right]S\right) \qquad (8)$$

Теорема 1. *Пусть начальное состояние таково, что*

$$\mathbf{z}\,\overline{\in}\,\mathbf{x}+\mathrm{K}(\mathbf{y},m,\varepsilon,\mathrm{T}(m,\varepsilon)). \qquad (9)$$

Тогда убегающий может построить свое управление таким образом, что

$$\|\mathbf{z}(t)-\mathbf{x}(t)\|>\varepsilon \text{ при всех } t\ge 0 \qquad (10)$$

и при любом поведении преследователя.

Пусть в (9) стоит включение. Тогда, как следует из вида множества (8), существует число $0\le \mathrm{T}_0\le \mathrm{T}(m,\varepsilon)$ такое, что при $t=\mathrm{T}_0$ выполнено включение

$$\mathbf{z}\in\mathbf{x}+\mathrm{K}(\mathbf{y},m,\varepsilon,t), \qquad (11)$$

а при любом $0\le t<\mathrm{T}_0$ включение (11) не выполнено.

Теорема 2. *Преследователь может построить свое управление таким образом, что при некотором* $0<t\le \mathrm{T}_0$ *будет осуществлена поимка* (5) *при любом поведении убегающего.*

Теорема 3. *Для любого* $0<\mathrm{T}<\mathrm{T}_0$ *убегающий может построить свое управление таким образом, что неравенство* (10) *будет выполнено при всех* $0\le t\le \mathrm{T}$ *и при любом поведении преследователя.*

2. Задача преследования

Рассмотрим начальное состояние

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}(0),\ \mathbf{x}=\mathbf{x}(0),\mathbf{y}=\mathbf{y}(0),\ m=m(0)>1,$$

у которого $\|\mathbf{z}(0)-\mathbf{x}(0)\|>\varepsilon$ и выполнено включение (9). Тогда минимальный корень $p=t$ включения (11) является минимальным неотрицательным корнем уравнения

$$\left\|\mathbf{z}(0)-\mathbf{x}(0)-\left(1-e^{-p}\right)\mathbf{y}(0)\right\|=$$

$$=a\left(1-e^{-p}\right)\ln m(0)+g(p,\varepsilon). \qquad (12)$$

Пусть $0<p\le\varepsilon$. Преследователь мгновенно выбрасывает все топливо со скоростью (рис. 1)

$$\mathbf{u}=-a\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|},\ \mathbf{w}=\mathbf{z}(0)-\mathbf{x}(0)-\left(1-e^{-p}\right)\mathbf{y}(0). \qquad (13)$$

Тогда из формулы (12), используя формулу (3), при $t=0$ и $\Delta m=m(0)-1$, получаем, что

$$\left\|\mathbf{z}(0)-\mathbf{x}(0)-\left(1-e^{-p}\right)\mathbf{y}(0+)\right\|=\varepsilon-p.$$

Отсюда и из уравнений движения (1) и (3) следует, что для любого измеримого управления $\|\mathbf{v}(t)\|\le 1$ убегающего в момент времени $t=p$ будет осуществлена поимка (5).

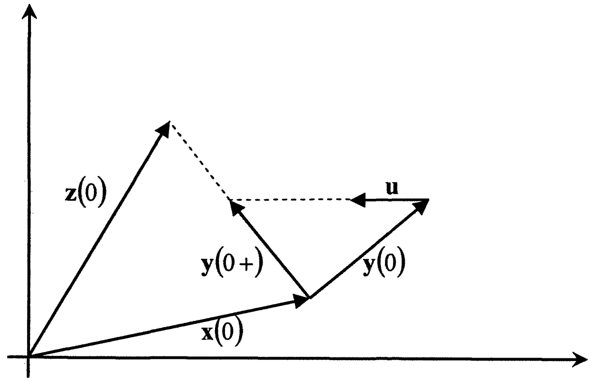

Рис. 1

Пусть $\varepsilon<p$. Тогда из формул (6) и (12) получим, что

$$\left\|\mathbf{z}(0)-\mathbf{x}(0)-\left(1-e^{-p}\right)\mathbf{y}(0)\right\|=$$

$$=\left(1-e^{-p}\right)\left(a\ln m(0)-\ln\frac{e^{p}-1}{e^{\varepsilon}-1}\right). \qquad (14)$$

Преследователь мгновенно выбрасывает топливо

$$\Delta m=m(0)-\left(\frac{e^{p}-1}{e^{\varepsilon}-1}\right)^{1/a}\ge 0$$

со скоростью (13). Тогда из формулы (14) следует, что

$$\mathbf{z}(0)-\mathbf{x}(0)-\left(1-e^{-p}\right)\mathbf{y}(0+)=0,$$

$$m(0+)=\left(\frac{e^{p}-1}{e^{\varepsilon}-1}\right)^{1/a}\ge 1. \qquad (15)$$

Чтобы записать правило выбора управления преследователя при $0<t\le p-\varepsilon$ введем переменную

$$\mathbf{w}(t)=\mathbf{z}(t)-\mathbf{x}(t)-\left(1-e^{-p+t}\right)\mathbf{y}(t). \qquad (16)$$

Тогда из уравнений движения (1) и (4) следует, что

$$\mathbf{w}(t)=\gamma\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \dot m(t)=-\frac{\gamma}{1-e^{-p+t}}m(t). \qquad (17)$$

Догоняющий берет

$$\mathbf{u}=-a\frac{\mathbf{w}(t)}{\|\mathbf{w}(t)\|} \text{ и } \gamma=a^{-1} \text{ при } \|\mathbf{w}(t)\|>0,$$

$$\text{любое } \|\mathbf{u}\|=a \text{ и любое } 0\le\gamma\le a^{-1} \text{ при } \|\mathbf{w}(t)\|=0. \qquad (18)$$

Пусть убегающий выбрал произвольное измеримое управление $\|\mathbf{v}(t)\|\le 1$ при $0\le t\le p-\varepsilon$. Тогда уравнения (17) с управлением (18) и с начальными условиями $\mathbf{w}(0+)=0$ и $m(0+)\ge 1$ имеют решения $\mathbf{w}(t)$ и $m(t)$, определенные при $0\le t\le p-\varepsilon$ [3]. Из второго уравнения (17) и из значения $m(0+)$ (15) можно получить, что при $0<t\le p-\varepsilon$ выполнено условие (2). Показывается, что $\mathbf{w}(t)=0$ при всех $0\le t\le p-\varepsilon$ [1]. Отсюда и из (16) следует, что скорость преследователя направлена на убегающего.

На оставшемся промежутке времени $p-\varepsilon<t\le p$ преследователь не осуществляет выброс массы, т.е. $m(t)=m(p-\varepsilon)$. Тогда, как и в случае $0<p\le\varepsilon$, показывается, что в момент времени $t=p$ будет осуществлена поимка (5).

3. Задача убегания

Для построения управления убегающего потребуются некоторые свойства множества (8).

Лемма 1. *Множество* (8) *является замкнутым, ограниченным и выпуклым.*

Доказательство. Замкнутость и ограниченность множества (8) следует из непрерывности по s функции $g(s,\varepsilon)$ Для доказательства его выпуклости перейдем к новой переменной $\tau=1-e^{-s}$ Тогда множество (8) представимо в виде

$$\bigcup_{0\le\tau\le\tau(t)}\left(\tau\mathbf{y}+\left[\tau a\ln m+G(\tau,\varepsilon)\right]S\right). \qquad (19)$$

Здесь $G(\tau,\varepsilon)=g(-\ln(1-\tau),\varepsilon)$ Производная по τ функции G убывает. Следовательно, эта функция вогнута по τ. Из вогнутости следует выпуклость множества (19).

На рис. 2 изображено множество (8), обозначенное буквой K.

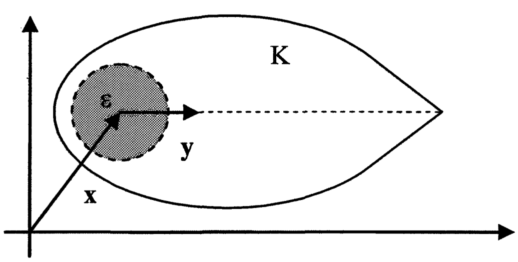

Рис. 2

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (9). *Тогда существует вектор* $\|\psi\|=1$ *такой, что*

$$\left\langle \mathbf{z}-\mathbf{x}-\left(1-e^{-s}\right)\mathbf{y},\psi\right\rangle > a\left(1-e^{-s}\right)\ln m+g(s,\varepsilon) \qquad \textbf{(20)}$$

при всех $s\ge 0$.

Здесь посредством $\langle\,,\rangle$ обозначено скалярное произведение.

Доказательство. Из (9) следует, что вектор z-x не принадлежит множеству (19), в котором объединение берется по $0\le\tau\le\tau_0$, где

$$\tau_0=\tau(\mathrm{T}(m,\varepsilon))=\frac{\left(e^{\varepsilon}-1\right)m^a}{1+\left(e^{\varepsilon}-1\right)m^a}.$$

Далее, $G(\tau_0,\varepsilon)=0$ и производная $\dot G(\tau_0,\varepsilon)<0$. Применяя лемму из работы [1], найдем требуемый вектор ψ

Геометрический смысл неравенства (20) заключается в том, что отделяет точку z от выпуклого множества (8) (рис. 3).

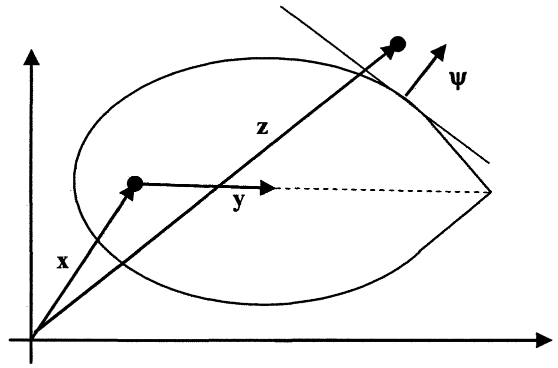

Рис. 3

Лемма 3. *При любых* $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$ *и* $t>0$ *выполнено неравенство*

$$g(t,\varepsilon_1)>g(t,\varepsilon_2)+\varepsilon_1-\varepsilon_2. \qquad (21)$$

Лемма 4. *При любых* $\varepsilon>0,\ 0\le t\le\mathrm{T}(m,\varepsilon)$, $r>0,\ m\ge 1$ *выполнено неравенство*

$$g(t+r,\varepsilon)-g(t,\varepsilon)+a\left(e^{-t}-e^{-(t+r)}\right)\ln m\ge$$

$$\ge -r+r\ln\frac{e^{\varepsilon}-1}{e^{\varepsilon+r}-1}. \qquad \textbf{(22)}$$

Доказательство неравенств (21) и (22) непосредственно следует из формулы (6).

Рассмотрим начальное состояние $\mathbf{z}=\mathbf{z}(0)$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{y}=\mathbf{y}(0)$ и $m(0)\ge 1$, для которого выполнено (9). Тогда существует число $\eta>0$ такое, что

$$\mathbf{z}(0)\,\overline{\in}\,\mathbf{x}(0)+\mathrm{K}(\mathbf{y}(0),m(0),\varepsilon(1+\eta),\mathrm{T}(m(0),\varepsilon(1+\eta))). \quad (23)$$

Зафиксируем число $\mathrm{T}>\mathrm{T}(m(0),\varepsilon(1+\eta))$. Разобьем отрезок $[0,\mathrm{T}]$ на конечное число равных частей точками $t_\iota=\iota\sigma$. Число σ возьмем из условия

$$\sigma<\varepsilon,\ \beta(\sigma)=\ln\frac{e^{\varepsilon}-1}{e^{\varepsilon+\sigma}-1}+\eta e^{-\mathrm{T}}\,\frac{1-e^{-\sigma}}{\sigma}>0. \quad \textbf{(24)}$$

Обозначим

$$\varepsilon_\iota=\varepsilon\left(1+\eta e^{-\iota\sigma}\right). \qquad \textbf{(25)}$$

Допустим, что убегающий смог обеспечить в момент времени t_ι условие

$$\mathbf{z}(t_\iota)\,\overline{\in}\,\mathbf{x}(t_\iota)+\mathrm{K}(\mathbf{y}(t_\iota),m(t_\iota),\varepsilon_\iota,\mathrm{T}(m(t_\iota),\varepsilon_\iota)). \quad (26)$$

Отметим, что, как следует из (23), при $\iota=0$ это условие выполнено.

Согласно лемме 2 существует единичный вектор ψ_ι такой, что

$$\left\langle \mathbf{z}(t_\iota)-\mathbf{x}(t_\iota)-\left(1-e^{-s}\right)\mathbf{y}(t_\iota),\psi_\iota\right\rangle >$$

$$> a\left(1-e^{-s}\right)\ln m(t_\iota)+g(s,\varepsilon_\iota) \qquad \textbf{(27)}$$

при всех $s\ge 0$.

Убегающий берет при $t_\iota\le t\le t_{\iota+1}$ управление $\mathbf{v}(t)=\psi_\iota$. Тогда $\langle \mathbf{z}(t),\psi_\iota\rangle=\langle \mathbf{z}(t_\iota),\psi_\iota\rangle+t-t_\iota$.

Из уравнения движения (1), в котором допускается в отдельные моменты времени мгновенное изменение массы, можно получить, что

$$\left\langle \mathbf{x}(t)+\left(1-e^{-s}\right)\mathbf{y}(t),\psi_i\right\rangle \le$$
$$\le\left\langle \mathbf{x}(t_i)+\left(1-e^{-(s+t-t_i)}\right)\mathbf{y}(t_i),\psi_i\right\rangle +$$
$$+a\left(1-e^{-(s+t-t_i)}\right)\ln\frac{m(t_i)}{m(t)}.$$

Отсюда и из неравенства (27) получим, что при всех $s\ge 0$ и $t_i\le t\le t_{i+1}$ выполнено неравенство

$$\left\langle \mathbf{z}(t)-\mathbf{x}(t)-\left(1-e^{-s}\right)\mathbf{y}(t),\psi_i\right\rangle >$$
$$>a\left(1-e^{-(s+t-t_i)}\right)\ln m(t)+g(s+t-t_i,\varepsilon_i)+t-t_i. \quad \textbf{(28)}$$

Положим в этом неравенстве $s = 0$ Тогда, учитывая формулы (6) и (24), получим, что $\|\mathbf{z}(t)-\mathbf{x}(t)\|\ge\varepsilon_i>\varepsilon$ при всех $t_i\le t\le t_{i+1}$.

Положим в (28) $t = t_{i+1}$. Тогда, учитывая неравенства (21), (22) и обозначение (25), получим, что при всех $0\le s\le \mathrm{T}(m(t_{i+1}),\varepsilon_{i+1})$ выполнено

$$\left\langle \mathbf{z}(t_{i+1})-\mathbf{x}(t_{i+1})-\left(1-e^{-s}\right)\mathbf{y}(t_{i+1}),\psi_i\right\rangle -$$
$$-a\left(1-e^{-s}\right)\ln m(t_{i+1})-g(s,\varepsilon_{i+1})>\sigma\beta(\sigma)>0.$$

Следовательно, при $i+1$ выполнено соотношение (26).

По описанному выше алгоритму убегающий строит свое управление на отрезке [T,2T] и т.д. Это завершает доказательство теоремы 1.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть начальное состояние и число $0<\mathrm{T}<\mathrm{T}(m(0),\varepsilon)$ таковы, что включение (11) при $t = \mathrm{T}$ не выполнено. Тогда существует число $\eta>0$ и единичный вектор ψ такие, что при всех $0\le s\le \mathrm{T}$ выполнено неравенство (20) с заменой в нем ε на $e(1+\eta)$. Разобьем отрезок [0, T] точками $t_i = i\sigma$ Число σ выбираем из условий (24). Допустим, что в момент времени t_i выполнено неравенство (27) на некотором единичном векторе ψ_i при всех $0\le s\le \mathrm{T}-t_i$.

Убегающий берет управление $\mathbf{v}(t)=\psi_i$ при $t_i\le t\le t_{i+1}$. Тогда при всех $t_i\le t\le t_{i+1}$ и при любом $0\le s\le \mathrm{T}-t_{i+1}$ будет выполнено неравенство (28). Поэтому, если $\mathrm{T}-t_{i+1}<\mathrm{T}(m(t_{i+1}),\varepsilon_{i+1})$, то неравенство (27) выполнено при $i+1$. Если $\mathrm{T}(m(t_{i+1}),\varepsilon_{i+1})\le \mathrm{T}-t_{i+1}$, то реализовавшееся в момент времени t_{i+1} состояние удовлетворяет условию (26).

Выводы

Таким образом, с преследователем связана зона поражения, которая является выпуклым множеством. Она зависит от начальной скорости и начального запаса топлива.

Если убегающий находится в этой зоне поражения, то преследователь его догоняет за конечное время. Причем в процессе поимки скорость преследователя направлена на убегающего.

Если убегающий находится вне зоны поражения, то с помощью кусочно-постоянных управлений он может не допустить поимку.

Литература

1. Ухоботов, В.И. Модификация игры изотропной ракеты. Многокритериальные системы при неопределенности их приложения / В.И. Ухоботов // Межвузовский сборник научных трудов / Челябинский государственный университет. — Челябинск: Изд-во Башкирского университета, 1988. - С. 123-130.

2. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М.. Наука, 1970. — 420 с.

3. Филиппов, А.Ф Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью /А.Ф Филиппов. — М.. Наука, 1985.-224 с.

Поступила в редакцию 15 июня 2009 г.