УДК 621.865.8; 004.942

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ РОТОПОДА

Л.Н. Петрова

PECULIARITIES OF INVERSE SOLUTION OF KINEMATICS PROBLEM FOR ROTOPOD

L.N. Petrova

Показано, что при решении обратной задачи кинематики о положениях применительно к механизму с параллельными кинематическими цепями типа «ротопод» возникают неоднозначности в определении значений входных координат. Предложены условия, позволяющие осуществить выбор нужного значения для каждой входной координаты.

Ключевые слова: ротопод, механизм с параллельными цепями, обратная задача кинематики о положениях, углы Крылова.

The article shows that during the inverse solution of kinematics problem of positions applied to a mechanism with parallel transmission routes of "rotopod" type some ambiguities in definition of input coordinates values appear. Conditions letting to choose the needed value for each input coordinate are offered.

Keywords: rotopod, mechanism with parallel transmission routes, inverse kinematics problem of positions, Krylov angles.

На кафедре «Автоматизация механосборочного производства» Южно-Уральского государственного университета ведутся разработки устройства формирования дополнительных технологических координат на основе механизма с параллельными кинематическими цепями, которое может быть альтернативой двухкоординатным поворотным столам.

На рис. 1 показана трехмерная модель такого устройства, которое состоит из подвижной платформы, основания, модуля привода, кольцевой направляющей, шести штанг и шести кареток, имеющих возможность движения по кольцевой направляющей. Выходным звеном механизма, лежащего в основе устройства, является подвижная платформа.

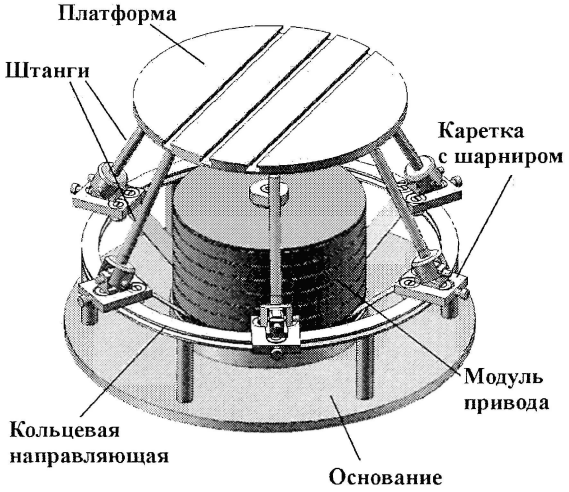

Рис. 1

При кинематическом анализе данного устройства, а также при построении алгоритмов управления движением подвижной платформы возникла потребность в решении обратной задачи кинематики о положениях, которая формулируется как определение входных (управляемых) координат устройства по известным выходным.

На рис. 2 представлена упрощенная кинематическая схема механизма, состоящая из подвижной платформы (с полюсом C), соединённой с неподвижным основанием с помощью шести штанг постоянной длины. В литературе [1] такой механизм принято называть ротоподом. Сферические шарниры B_i(i = 1...6) связывают штанги с подвижной платформой, координаты этих шарниров в связанной с платформой системе координат (СК) $OX'Y'Z'$ будем определять через углы φ_{B_i} :

$$x'_{B_i} = R_{ПЛ}\cos\varphi_{B_i},\ \ y'_{B_i} = R_{ПЛ}\sin\varphi_{B_i},\ \ i = 1\ldots6. \qquad (1)$$

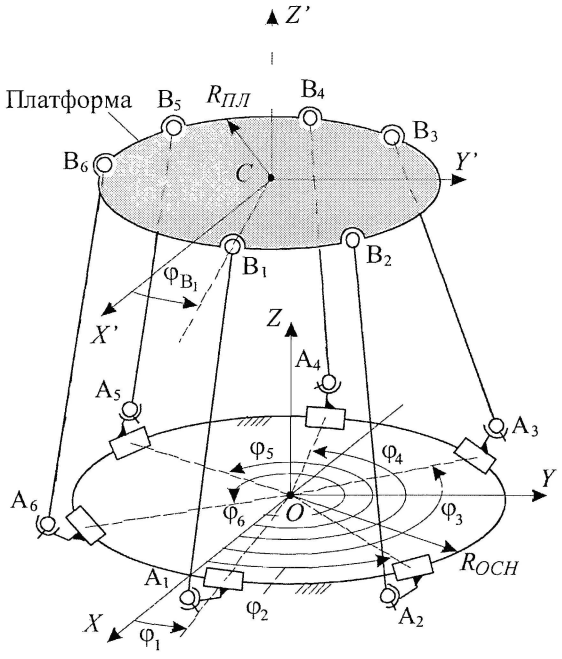

Рис. 2

Угловые положения карданових шарниров $A_i\ (i=1\ldots6)$, расположенных на каретках, могут изменяться за счёт перемещения кареток по круговой направляющей. При этом будут изменяться угловые координаты кареток $\varphi_i\ (i=1\ldots6)$. Примем эти величины за входные (управляемые) координаты. Будем считать для простоты, что координаты карданових шарниров в неподвижной СК $OXYZ$ определяются этими же координатами следующим образом:

$$x_{A_i}=R_{OCH}\cos\varphi_i,\ \ y_{A_i}=R_{OCH}\sin\varphi_i,\ \ i=1\ldots6. \quad (2)$$

Координаты z_{A_i} карданових шарниров должны быть заданы; координаты z'_{B_i} сферических шарниров примем равными нулю.

Конструкция механизма обеспечивает движение инструмента (детали), закрепленного на подвижной платформе ротопода, по шести независимым координатам: трём линейным X_C, Y_C, Z_C и трём угловым ψ, ϑ, γ (на рис. 2 не показаны). В качестве линейных выступают координаты полюса C платформы в неподвижной СК $OXYZ$. Угловые координаты определяют разворот подвижной платформы вокруг полюса; в качестве этих координат могут использоваться, например, углы Крылова, определяющие разворот связанной с платформой СК $CX'Y'Z'$ относительно неподвижной СК $OXYZ$. Шесть описанных координат будут являться для рассматриваемого устройства выходными координатами.

Для получения уравнения математической модели ротопода, связывающей угловые координаты шарниров, расположенных на каретках, с выходными координатами воспользуемся уравнениями:

$$L_i^2=\left(x_{A_i}-x_{B_i}\right)^2+\left(y_{A_i}-y_{B_i}\right)^2+\left(z_{A_i}-z_{B_i}\right)^2,\ i=1\ldots6, \quad (3)$$

которые с учётом уравнений (2) примут следующий вид:

$$L_i^2=\left(R_{OCH}\cos\varphi_i-x_{B_i}\right)^2+\left(R_{OCH}\sin\varphi_i-y_{B_i}\right)^2+\left(z_{A_i}-z_{B_i}\right)^2,\ L_i=L=\text{const},\ i=1\ldots6, \quad (4)$$

где координаты x_{B_i}, y_{B_i}, z_{B_i} сферических шарниров должны быть определены в неподвижной СК $OXYZ$. Пересчет координат сферических шарниров из связанной с платформой СК $CX'Y'Z'$, в которой они заданы, в неподвижную СК $OXYZ$ осуществляется с использованием следующего матричного преобразования:

$$\begin{pmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ z_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & X_C \\ m_1 & m_2 & m_3 & Y_C \\ n_1 & n_2 & n_3 & Z_C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_{B_i} \\ y'_{B_i} \\ z'_{B_i} \\ 1 \end{pmatrix},$$

в котором направляющие косинусы $l_k, m_k, n_k\ (k=1\ldots3)$ определяются через выходные угловые координаты следующим образом (в качестве выходных угловых координат использованы углы Крылова):

$$\begin{aligned} &l_1=\cos\psi\cos\gamma+\sin\vartheta\sin\psi\sin\gamma;\ l_2=\sin\psi\cos\vartheta;\ l_3=-\cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma;\\ &m_1=-\sin\psi\cos\gamma+\sin\vartheta\cos\psi\sin\gamma;\ m_2=\cos\psi\cos\vartheta;\ m_3=\sin\psi\sin\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma;\\ &n_1=\cos\vartheta\sin\gamma;\ n_2=-\sin\vartheta;\ n_3=\cos\vartheta\cos\gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Раскрывая в (4) скобки и вводя следующие обозначения:

$$\alpha_i = -2R_{OCH}x_{B_i},\ \beta_i = -2R_{OCH}y_{B_i},$$
$$\gamma_i = L^2 - R_{OCH}^2 - z_{A_i}^2 + 2z_{A_i}z_{B_i} - x_{B_i}^2 - y_{B_i}^2 - z_{B_i}^2,\ i = 1\ldots6, \quad (6)$$

запишем (4) в упрощенном виде:

$$\alpha_i \cos\varphi_i + \beta_i \sin\varphi_i - \gamma_i = 0,\ i = 1\ldots6. \quad (7)$$

Каждое из уравнений (7) можно представить в форме квадратного относительно $\sin\varphi_i$:

$$\xi_i \sin^2\varphi_i + \eta_i \sin\varphi_i + \lambda_i = 0, \quad (8)$$

где $\xi_i = \alpha_i^2 + \beta_i^2$, $\eta_i = -2\gamma_i\beta_i$, $\lambda_i = \gamma_i^2 - \alpha_i^2$, $i = 1\ldots6$.

Решение уравнений (7) позволит определить угловые координаты $\varphi_i\ (i = 1\ldots6)$ кареток (карданових шарниров), соответствующие заданным выходным координатам X_C, Y_C, Z_C, ψ, ϑ, γ, т. е. решить обратную задачу кинематики о положениях. Так как угловые координаты представляются действительными числами, то при решении уравнений необходимо контролировать выполнение следующих условий:

$$\eta_i^2 - 4\xi_i\lambda_i \geq 0;$$
$$|\sin\varphi_i| \leq 1.$$

Выражения для определения угловых координат кареток имеют следующий вид:

$$\varphi_i = \arcsin\left(\frac{-\eta_i \pm \sqrt{\eta_i^2 - 4\xi_i\lambda_i}}{2\xi_i}\right),\ i = 1\ldots6. \quad (9)$$

При вычислении углов φ_i используется круговая функция $\varphi = \arcsin x$ [2], главные значения которой лежат в диапазоне $[-\pi/2, \pi/2]$. Однако реальные углы φ_i должны принимать значения в диапазоне $[0, 2\pi]$ (см. рис. 2). Рис. 3 иллюстрирует случай, когда двум углам $\varphi^{<1>} = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi^{<2>} = \frac{5\pi}{6}$ соответствует одно значение функции $\sin\varphi = 0{,}5$. Следовательно, при расчете углов φ_i с использованием (9) без учета этой особенности функции $\varphi = \arcsin x$ часть решений может быть потеряна.

Чтобы избежать потери решений, введем следующие условия:

– если определенная с использованием (9) угловая координата лежит в диапазоне $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, то введем дополнительное значение $\varphi' = \pi - \varphi$;

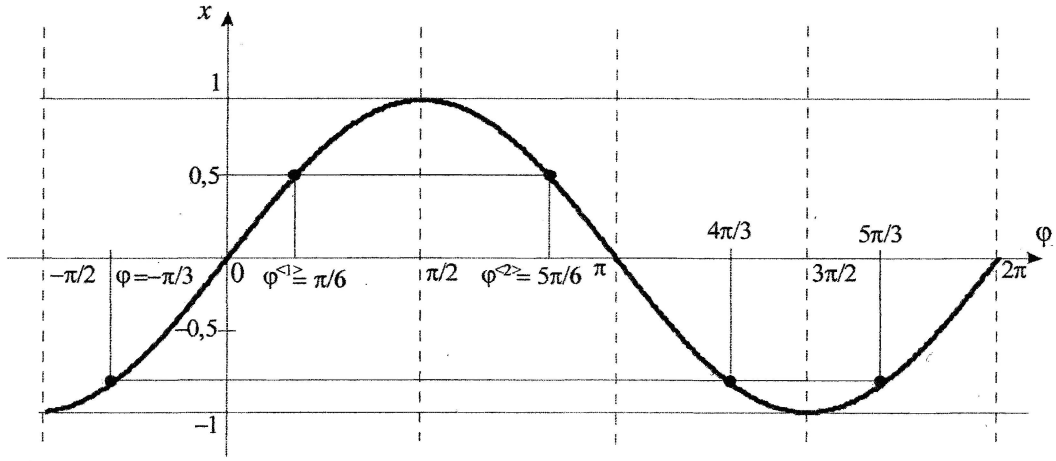

Рис. 3

– если определенная с использованием (9) угловая координата лежит в диапазоне $-\pi/2 \le \varphi < 0$ (см. случай $\varphi = -\pi/3$ на рис. 3), то введем два дополнительных значения $\varphi' = \pi - \varphi$, $\varphi'' = 2\pi + \varphi$.

Наличие знака «±» в выражениях (9) приводит к двузначности решения уравнений (7). Каждому найденному с использованием (9) значению угловой координаты будут соответствовать два значения, лежащие в диапазоне $[0, 2\pi]$. В результате для каждой угловой координаты будет получено 4 значения, удовлетворяющего соответствующему уравнению (7).

Решение прямой задачи кинематики применительно к ротоподу, имеющему следующие геометрические параметры: $\varphi_{B_i} = [10 \quad 50 \quad 130 \quad 170 \quad 250 \quad 290]$, $R_{OCH} = 200$ мм, $R_{ПЛ} = 100$ мм, $L = 143{,}5538$ мм, при выходных координатах $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 100$ мм, $\psi = 0$, $\vartheta = 0$, $\gamma = 0$ привело к следующим результатам:

$\varphi_1 = [0 \quad 20 \quad 160 \quad 180]$, $\varphi_2 = [40 \quad 60 \quad 120 \quad 140]$, $\varphi_3 = [40 \quad 60 \quad 120 \quad 140]$,

$\varphi_4 = [0 \quad 20 \quad 160 \quad 180]$, $\varphi_5 = [240 \quad 260 \quad 280 \quad 300]$, $\varphi_6 = [240 \quad 260 \quad 280 \quad 300]$.

Для каждой из входных координат φ_i получено четыре значения. Следовательно, необходимо ввести некоторые условия, которые позволят осуществить выбор одного угла из четырех.

Одним из условий может быть контроль расстояния от шарнира B_i до возможных положений шарнира A_i, определяемых четырьмя значениями угла φ_i:

$$L_i^{<k>} = \sqrt{(R_{OCH}\cos\varphi_i^{<k>} - x_{B_i})^2 + (R_{OCH}\sin\varphi_i^{<k>} - y_{B_i})^2 + (z_{A_i} - z_{B_i})^2}\,, \quad k = 1\ldots4\,.$$

Значения углов, для которых $L_i^{<k>} \neq L$, должны быть отброшены.

После того как будут проконтролированы расстояния $L_i^{<k>}$, для каждого шарнира каретки останется только два возможных значения его угловой координаты (рис. 4). На рис. 4, а показаны все возможные положения шарниров каретки, на рис. 4, б - только те, для которых выполняются условия $L_i^{<k>} = L$.

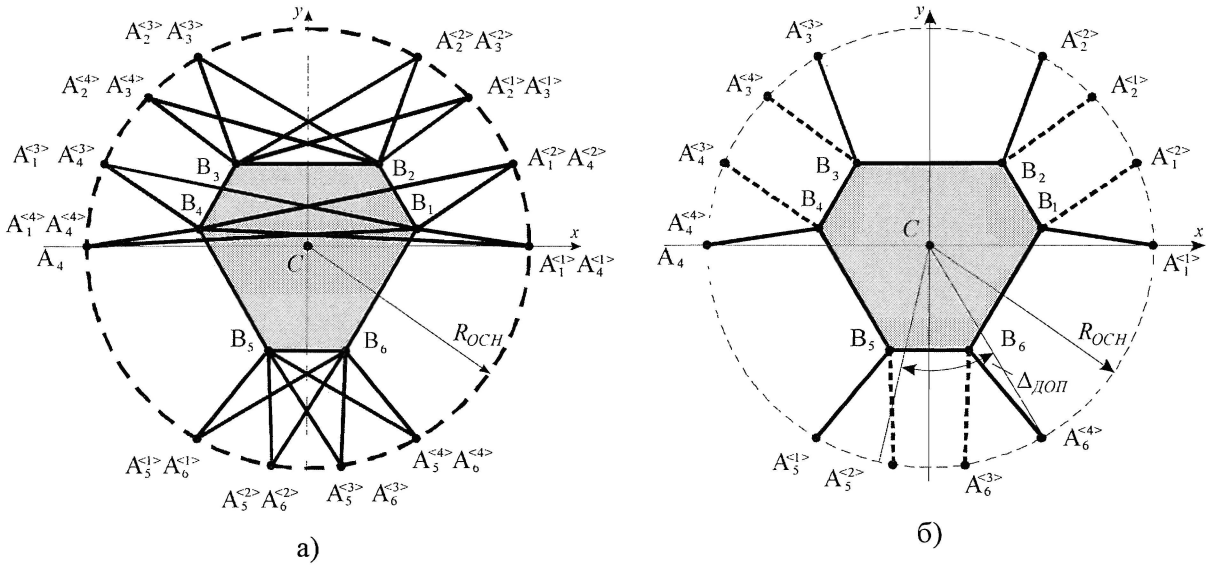

Рис. 4

При выборе одного из двух возможных положений шарнира каретки следует учитывать условие отсутствия соприкосновения кареток, которое сводится к проверке неравенств

$$|\varphi_i - \varphi_{i+1}| \ge \Delta_{ДОП}\,,$$

где угол $\Delta_{ДОП}$ задается из конструктивных соображений. На рис. 4, б отвечающие данному условию положения штанг, обозначены сплошными линиями.

Дополнительное условие, которое будет влиять на выбор единственной угловой координаты для шарнира каретки, может быть сформулировано из анализа жесткости устройства в требуемом направлении (см. статью В.А. Смирнова и Е.Ю. Сулацкой в данном Вестнике).

Все рассмотренные выше условия должны быть учтены при разработке алгоритмов управления ротоподом.

Литература

1. Подзоров, П.В. Механизмы параллельной кинематики в станкостроении / П.В. Подзоров // Справочник. Инженерный журнал. Приложение. - 2005. - № 8. — С. 2-24.

2. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М.: Физматгиз, 1963.-872 с.

***Поступила в редакцию 24 сентября 2009** г.*

Петрова Лина Николаевна. Старший преподаватель кафедры «Автоматизация механосборочного производства» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов - анализ и синтез оборудования на основе механизмов с параллельной кинематикой.

Lina N. Petrova. Senior lecturer of the Mechanical Assembly Production department of South Ural State University. Professional interests - analysis and synthesis of machinery on the basis of mechanisms with parallel kinematics.