УДК 515.128

О ВЛОЖЕНИИ БЭРОВСКОГО ПРОСТРАНСТВА *B(κ)* В АБСОЛЮТНЫЕ A-МНОЖЕСТВА

С.В. *Медведев*

В статье доказывается теорема о вложении бэровского пространства *B(κ)* в абсолютные A-множества в качестве замкнутого подмножества.

Ключевые слова: абсолютные A-множества, бэровское пространство.

Все пространства, рассматриваемые в статье, предполагаются метрическими.

В теории A-множеств важную роль играет пространство иррациональных чисел I, поэтому интересен вопрос о том, когда некоторое пространство содержит копию I. В 1928 г. Гуревич выяснил условия, при которых сепарабельное абсолютное A-множество содержит замкнутую копию пространства I, и, соответственно, сепарабельное абсолютное CA-множество содержит замкнутую копию пространства рациональных чисел Q. В 1976 г. А.В. Островский доказал теорему о том, что несепарабельное не σ-компактное абсолютное A-множество содержит замкнутую копию пространства I. Несепарабельным аналогом пространства I является бэровское пространство $B(k)$ веса k, ведь пространство $B(\omega)$ гомеоморфно I. В статье [1] описано пространство $Q(k)$ веса k, которое можно рассматривать как обобщение пространства рациональных чисел Q на несепарабельный случай; в частности, пространство $Q(\omega) \approx Q$. Топологическая характеристика пространства $Q(k)$ даётся следующей теоремой.

Теорема 1 [1]. Пусть X – метрическое σ-дискретное однородное по весу пространство веса k. Тогда X гомеоморфно $Q(k)$.

В настоящей статье обобщается теорема Гуревича на случай несепарабельных пространств; а именно, доказывается следующая теорема 2 (определения и обозначения даны ниже):

Теорема 2. Пусть дано A-множество Y в полном метрическом пространстве X и $Z = X–Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) множество Y не представимо в виде $Y = Y_1 \cup Y_2$, где Y_1 – множество типа F_σ в пространстве X, а Y_2 является $\sigma LW(<k)$-пространством;
2) множество Z не представимо в виде $Z = Z_1 – Z_2$, где Z_1 – множество типа G_δ в пространстве X, а Z_2 является $\sigma LW(<k)$-пространством;
3) существует такое замкнутое множество $M \subset X$, что $M \cap Y \approx B(k)$, $M \cap Z \approx Q(k)$, $M \approx B^*(k)$, а множества $M \cap Y$ и $M \cap Z$ всюду плотны в M.

Основные *определения и обозначения* – стандартные [3]. Запись $X \approx Y$ означает, что X и Y – гомеоморфные пространства. $w(X)$ – вес пространства X. Чертой сверху $\overline{F}$ обозначается замыкание $\mathrm{cl}_X F$ множества F в пространстве X. Для индексированной системы множеств $\mathfrak{A} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ из пространства X через $|\mathfrak{A}|$ обозначается мощность этого семейства, $\cup\mathfrak{A} = \cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ – тело семейства $\mathfrak{A}$, $\mathrm{mesh}(\mathfrak{A})$ – мелкость семейства (верхняя грань диаметров множеств из $\mathfrak{A}$).

Под ординалом α понимается множество $\{\beta$ – ординал: $\beta < \alpha\}$, а под кардиналом – наименьший ординал данной мощности; в частности, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – наименьший бесконечный кардинал. Через k^+ обозначается кардинал, непосредственно следующий за кардиналом k. Для множества X через X^n обозначается множество упорядоченных последовательностей (кортежей) $s = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ длины n элементов из X; в частности, $\langle x_{-1}\rangle = \Lambda$ – единственный кортеж нулевой длины. Если длина $\mathrm{lh}s$ кортежа s равна n и $i < n$, то sYi – это начальный фрагмент $\langle x_0, \ldots, x_{i-1}\rangle$ длины i кортежа s. Если $s \in X^n$ и $x_n \in X$, то кортеж $s\hat{\ }x_n = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$. Пусть $X^{<\omega} = \cup\{X^n : n \in \omega\}$. Через $B^*(k)$ обозначаем бэровское пространство $B(k) = k^\omega$ веса k при $k < \omega$ или канторово множество C при $k = \omega$. Если кортеж $s = \langle i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}\rangle \in \omega^n$, то положим $|s| = i_0 + i_1 + \ldots + i_{n-1}$; по определению $|\Lambda| = -1$.

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое топологическое свойство, тогда мы говорим, что пространство X нигде не $\mathcal{P}$, если никакое непустое открытое множество из X не обладает свойством $\mathcal{P}$. Пространство X называется *$LW(<k)$-пространством* [6], если у каждой точки из X найдется окрестность веса $< k$.

Пространство X называется $\sigma LW(<k)$*-пространством* [6], если оно представимо в виде $X = \cup\{X_n: n\in\omega\}$, где каждое X_n является $LW(<k)$-пространством. В частности, $\sigma LW(<\omega)$-пространства – это просто σ–дискретные пространства. Стоун [6] доказал, что бэровское пространство $B(k)$ нигде не является $\sigma LW(<k)$-пространством. σ-дискретное семейство $\mathfrak{B}$ называется *σ-дискретной базой* [4] для семейства $\mathfrak{A}$ в пространстве X, если каждое множество из $\mathfrak{A}$ является объединением некоторых множеств из $\mathfrak{B}$. Хансел доказал, что σ-дискретное семейство $\mathfrak{B}$ можно представить в виде $\mathfrak{B} = \cup\{\mathfrak{B}_n: n\in\omega\}$, где каждое семейство $\mathfrak{B}_n$ ε_n-метрически дискретно для некоторого $\varepsilon_n > 0$. Отображение $f:X\to Y$ называется *ко-σ-дискретным* [4], если образ любого дискретного семейства множеств из X имеет σ-дискретную базу в Y.

Множество Y называется *A-множеством* в пространстве X, если оно допускает представление вида $Y = \cup\{\cap\{F(tYn): n\in\omega\}: t\in\omega^\omega\}$, где каждое множество $F(tYn)$ замкнуто в X. Если пространство X фиксировано, то через $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$ и $\mathcal{L}_k$ обозначаются соответственно семейства всех F_σ-множеств, G_δ-множеств и $\sigma LW(<k)$-множеств из пространства X.

Теорема 2 была анонсирована автором в [2].

Доказательство теоремы 2. Проверим, что 3) $\Rightarrow$ 1). Допустим, что условие 1) не выполняется, т.е. $Y = Y_1\cup Y_2$, где Y_1 – множество типа F_σ в пространстве X, а Y_2 – $\sigma LW(<k)$-пространство. Если предположить, что $Y_1 = \varnothing$, то получим $M \approx B^*(k)\in\mathcal{L}_k$, а это противоречит теореме Стоуна [6]. Итак, $Y_1 \neq \varnothing$. Тогда множество $M-Y_1$ является абсолютным G_δ-множеством, которое содержит всюду плотное подмножество $M\cap Z \approx Q(k)$, следовательно, $M-Y_1$ является однородным по весу пространством веса k. Для $k > \omega$ по теореме Стоуна [5] это означает, что $(M-Y_1) \approx B(k)$; в то же время по построению $(M-Y_1)\in\mathcal{L}_k$. Получили противоречие, ведь $B(k)\notin\mathcal{L}_k$. Для $k = \omega$ множество $M-Y_1$ оказывается σ-дискретным абсолютным G_δ-множеством без изолированных точек, что также невозможно. Итак, импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказана.

Равносильность условий 1) $\Leftrightarrow$ 2) проверяется очевидным образом.

Докажем 1) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим множество $FL = \cup\{U$ – открытое подмножество Y: множество U представимо в виде объединения $\sigma LW(<k)$-множества и множества типа F_σ из $X\}$. Учитывая, что: а) если множество локально имеет тип F_σ, то оно и в целом имеет тип F_σ, б) если множество является локально $\sigma LW(<k)$-пространством, то оно и в целом будет $\sigma LW(<k)$-пространством [6], приходим к выводу, что множество $D = Y-FL$ не пусто, замкнуто в Y и нигде не типа $\mathcal{F}_\sigma+\mathcal{L}_k$, т.е. никакое непустое открытое в Y множество не представимо в виде $F\cup L$, где $F\in\mathcal{F}_\sigma(X)$, $L\in\mathcal{L}_k$.

Изучим свойства множества $E = \overline{D} - Y = \overline{D}-D$, где $\overline{D}$ – замыкание множества D в X. Очевидно, что $Y\cap E = \varnothing$. Покажем, что E всюду плотно в $\overline{D}$. Допустим, что нашлось непустое открытое в $\overline{D}$ множество U, которое не пересекается с E. Тогда множество $U\cap D = U\cap\overline{D}$ имеет тип F_σ в X, что противоречит свойствам множества D. Далее, множество E нигде не типа $\mathcal{G}_\delta-\mathcal{L}_k$, т.е. никакое непустое открытое в E множество не представимо в виде $G-L$, где $G\in\mathcal{G}_\delta(X)$, а $L\in\mathcal{L}_k$. Действительно, пусть открытое в E множество $U = G-L$, где $G\subset\overline{D}$, $L\subset\overline{D}$, G – множество типа G_δ в $\overline{D}$ (значит, и в X), а $L\in\mathcal{L}_k$. Возьмём такое открытое в $\overline{D}$ множество V, что $U = V\cap E$, тогда множество $V\cap Y=(V-G)\cup(V\cap L)$ имеет тип $\mathcal{F}_\sigma+\mathcal{L}_k$, что противоречит свойствам множества D.

Искомое множество M будет принадлежать множеству $\overline{D}$, поэтому в дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем считать, что $X = \overline{D}$, $Y = D$, Y нигде не типа $\mathcal{F}_\sigma+\mathcal{L}_k$, $Z = E$ и $\overline{Z} = X$.

Лемма А. В условиях теоремы 2 существует нульмерное полное метрическое пространство T и такое непрерывное отображение $\varphi:T\to Y$, что $\overline{\varphi(T)} = X$ и для любого открытого множества $V\subset T$, $V\neq\varnothing$, верно следующее: $\varphi(V)$ нигде не $\sigma LW(<k)$-пространство и $\overline{\varphi(V)}\cap Z \neq \varnothing$ (замыкание в X).

Доказательство леммы А. Пусть $\tau = w(Y)$. По теореме 4.1 [4] возьмём непрерывное ко-σ-дискретное отображение $\varphi:B(\tau)\to Y$, причём $\varphi(B(\tau)) = Y$. Назовём открытое множество $U\subset B(\tau)$

особым, если $\varphi(U)\subset F\cup L\subset Y$, где $F\in\mathcal{F}_\sigma(X)$, $L\in\mathcal{L}_k$. Покажем, что открытое множество $T_1=\cup\{U$: U – особое множество в $B(\tau)\}$ само является особым. Возьмём σ-дискретное покрытие γ множества T_1 из особых множеств. Тогда семейство $\{\varphi(U)$: $U\in\gamma\}$ имеет σ-дискретную базу $\mathfrak{B}=\cup\{\mathfrak{B}_n$: $n\in\omega\}$, где каждое семейство $\mathfrak{B}_n$ ε_n-метрически дискретно для некоторого $\varepsilon_n>0$. Для каждого $B\in\mathfrak{B}$ зафиксируем некоторое $U_B\in\gamma$ так, что $B\subset\varphi(U_B)\subset F_B\cup L_B\subset Y$, где $F_B\in\mathcal{F}_\sigma(X)$, а $L_B\in\mathcal{L}_k$. Множество $F^*=\cup\{\overline{B}\cap F_B$: $B\in\mathfrak{B}\}$ имеет тип F_σ в X, так как оно является счётным объединением множеств локального типа F_σ. Множество $L^*=\cup\{\overline{B}\cap L_B$: $B\in\mathfrak{B}\}$ является $\sigma LW(<k)$-пространством как счётное объединение локальных $\sigma LW(<k)$-пространств. По построению $F^*\cup L^*\subset Y$. Покажем, что $\varphi(T_1)\subset F^*\cup L^*$. Возьмём произвольную точку $x\in T_1$ и найдём особое множество $U\in\gamma$, содержащее точку x. Так как $\varphi(U)=\cup\{B$: $B\in\mathfrak{B}_0\}$ для некоторого подсемейства $\mathfrak{B}_0\subset\mathfrak{B}$, то найдётся элемент $Bx\in\mathfrak{B}_0$, содержащий точку $\varphi(x)$. Тогда $\varphi(x)\in Bx\subset\overline{Bx}\cap(F_{Bx}\cup L_{Bx})\subset F^*\cup L^*$.

Итак, $\varphi(T_1)\subset F^*\cup L^*\subset Y$, следовательно, T_1 – особое множество. Так как Y нигде не типа $\mathcal{F}_\sigma+\mathcal{L}_k$, то множество $Y-(F^*\cup L^*)$ не пусто и всюду плотно в Y. Без ограничения общности [6] можно считать, что множество L^* имеет тип F_σ в Y; тогда прообраз $T=\varphi^{-1}(Y-(F^*\cup L^*))$ имеет тип G_δ в $B(\tau)$ и по теореме Александрова–Хаусдорфа множество T метризуемо полной метрикой.
Возьмём произвольное непустое открытое в T множество V; пусть $V=W\cap T$, где W – открыто в $B(\tau)$. Тогда $\varphi(W)=\varphi(V)\cup\varphi(W-T)\subset\overline{\varphi(V)}\cup(F^*\cup L^*)$. Множество $\overline{\varphi(V)}$ замкнуто в X, множество W не особое, поэтому множество $\overline{\varphi(V)}-Y=\overline{\varphi(V)}\cap Z$ не пусто. Далее, пусть существует открытое в $\varphi(V)$ множество $U\in\mathcal{L}_k$. Возьмём открытое в $B(\tau)$ такое множество H, что $\varphi^{-1}(U)=H\cap T$, тогда $\varphi(H)\subset U\cup(F^*\cup L^*)\subset Y$, следовательно, H – особое множество. Поэтому $H\subset T_1$, значит, пересечение $H\cap T$ пусто, тогда и $U=\varnothing$. Итак, $\varphi(V)$ нигде не $\sigma LW(<k)$-пространство. Лемма А доказана.
Продолжаем доказательство теоремы. Пусть ρ – полная метрика на X, d – полная метрика на T, причём $\mathrm{diam}(X)\le 1$ и $\mathrm{diam}(T)\le 1$, где пространство T взято из леммы А.

Сначала рассмотрим случай $\mathrm{cf}(k)>\omega$. Индукцией по n, $n\in\omega$, построим точки $z(s;\alpha)\in Z$, открытые в X базы $\{U(s\hat{\ }i;\alpha)$: $i\in\omega\}$ в точках $z(s;\alpha)$, открытые в X множества $V(s;\alpha)$, относительно дискретные системы $\mathfrak{U}(s;\alpha)=\{V(s\hat{\ }i;\alpha\hat{\ }\alpha_n)$: $i\in\omega$, $\alpha_n\in k\}$, открыто-замкнутые множества $T(s;\alpha)\subset T$ и дизъюнктные системы множеств $\mathfrak{J}(s;\alpha)=\{\varphi(T(s\hat{\ }i;\alpha\hat{\ }\alpha_n))$: $i\in\omega$, $\alpha_n\in k\}$, связанные следующими соотношениями при любых фиксированных $s\in\omega^n$, $\alpha\in k^n$, $n\in\omega$:

1) $z(s;\alpha)\in(Z\cap\overline{\varphi(T(s;\alpha))})-\cup\{\overline{V}: V\in\mathfrak{U}(s;\alpha)\}$;
2) $\mathrm{cl}_X(\cup\{V: V\in\mathfrak{U}(s;\alpha)\})=\{z(s;\alpha)\}\cup(\cup\{\overline{V}: V\in\mathfrak{U}(s;\alpha)\})$;
3) $\mathrm{cl}_X(\cup\{W: W\in\mathfrak{J}(s;\alpha)\})=\{z(s;\alpha)\}\cup(\cup\{\overline{W}: W\in\mathfrak{J}(s;\alpha)\})$;
4) $\mathrm{diam}(V(s;\alpha))\le 2^{-|s|-n}$, $\mathrm{diam}(T(s;\alpha))\le 2^{-n}$;
5) $\overline{\varphi(T(s;\alpha))}\subset V(s;\alpha)$, причём $V(s;\alpha)=U(s\hat{\ }0;\alpha)$;
6) $\overline{U(s\hat{\ }(i+1);\alpha)}\subset U(s\hat{\ }i;\alpha)$ для любого $i\in\omega$, причём $H(s\hat{\ }i;\alpha)\cap\varphi(T(s;\alpha))\ne\varnothing$, где $H(s\hat{\ }i;\alpha)=U(s\hat{\ }i;\alpha)-\overline{U(s\hat{\ }(i+1);\alpha)}$;
7) $\overline{V(s\hat{\ }i;\alpha\hat{\ }\alpha_n)}\subset H(s\hat{\ }i;\alpha)$ и $T(s\hat{\ }i;\alpha\hat{\ }\alpha_n)\subset T(s;\alpha)$ для любых $i\in\omega$ и $\alpha_n\in k$;
8) семейство $\{V(s\hat{\ }i;\alpha\hat{\ }\alpha_n)$: $\alpha_n\in k\}$ дискретно в X для любого $i\in\omega$;
9) $\overline{V(s;\alpha)}\cap\overline{V(t;\beta)}=\varnothing$, если $(s;\alpha)\ne(t;\beta)$, где $t\in\omega^n$, $\beta\in k^n$.

База индукции $n=0$. Положим $T(\Lambda;\Lambda)=T$, $V(\Lambda;\Lambda)=X$, а в качестве $z(\Lambda;\Lambda)$ возьмём любую точку из непустого пересечения $\overline{\varphi(T)}\cap Z$. В точке $z(\Lambda;\Lambda)$ выберем такую базу $\{U(i;\Lambda)$: $i\in\omega\}$, что $V(\Lambda;\Lambda)=U(0;\Lambda)$ и $\overline{U(i+1;\Lambda)}\subset U(i;\Lambda)$, причём множество $H(i;\Lambda)=U(i;\Lambda)-\overline{U(i+1;\Lambda)}\ne\varnothing$ для каждого $i\in\omega$. По лемме А для любого $i\in\omega$ множество $H(i;\Lambda)\cap\varphi(T(\Lambda;\Lambda))\notin\mathcal{L}_k$, поэтому существует такое метрически дискретное в X семейство $\{V(i;\alpha)$: $\alpha\in k\}$ из открытых в X множеств диаметра

$\le 2^{-1-i}$, что каждое $\overline{V(i;\alpha)} \subset H(i;\ \Lambda)$. Множество $\varphi(T(\Lambda;\ \Lambda)) = \varphi(T)$ всюду плотно в Y, φ – непрерывное отображение, поэтому для любых $i \in \omega$ и $\alpha \in k$ в прообразе $\varphi^{-1}(V(i;\ \alpha))$ найдутся такие непустые открыто-замкнутые множества $T(i;\ \alpha) \subset T(\Lambda;\ \Lambda)$ диаметра $\le 2^{-1}$, что $\overline{\varphi(T(i;\alpha))} \subset V(i;\ \alpha)$. Нетрудно проверить, что для $n = 0$ все условия 1-9 выполняются.

Индуктивный переход. Для фиксированных $n \in \omega$, $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$ возьмём любую точку $z(s;\ \alpha) \in Z \cap \overline{\varphi(T(s;\alpha))}$ и построим для неё базу $\{U(s\hat{\ }i;\ \alpha):\ i \in \omega\}$ из открытых множеств так, чтобы выполнялось равенство $V(s;\ \alpha) = U(s\hat{\ }0;\ \alpha)$ и условие 6. Множество $H' = H(s\hat{\ }i;\ \alpha) \cap \varphi(T(s;\ \alpha)) \ne \varnothing$ по построению, тогда по лемме А имеем $H' \notin \mathcal{L}_k$, значит, для любого фиксированного $s_n \in \omega$ существует такое метрически дискретное в X семейство $\{V(s\hat{\ }i;\ \alpha\hat{\ }\alpha_n):\ \alpha_n \in k\}$ из открытых в X множеств диаметра $\le 2^{-|s|-i-n-1}$, что $V(s\hat{\ }i;\ \alpha\hat{\ }\alpha_n) \cap \varphi(T(s;\ \alpha)) \ne \varnothing$ и $\overline{V(s\hat{\ }i;\alpha\hat{\ }\alpha_n)} \subset H(s\hat{\ }i;\ \alpha)$ для $\forall \alpha_n \in k$. Далее строим систему $\{T(s\hat{\ }i;\ \alpha\hat{\ }\alpha_n):\ s_n \in \omega,\ \alpha_n \in k\}$ из открыто-замкнутых множеств, для которой выполняются условия 5, 7 и 4. Из условий 9, 8, 6 и 5 вытекают условия 2 и 3. Индуктивный переход завершён.

Для любого $n \in \omega$ положим $Z_n = \{z(s;\ \alpha):\ s \in \omega^n,\ \alpha \in k^n\}$; пусть $Z^* = \cup\{Z_n:\ n \in \omega\}$. Ясно, что $Z^* \subset Z$. Из условия 9 следует, что каждое множество Z_n относительно дискретно, поэтому Z будет σ-дискретным множеством мощности k. Возьмем произвольно точку $z \in Z^*$, тогда $z = z(s;\ \alpha)$ для некоторых $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$, $n \in \omega$. Из условий 1, 2, 6, 7 и 8 следует, что любая окрестность точки z содержит дискретное множество мощности k, следовательно, вес окрестности $\ge k$. Тогда по теореме 1 пространство Z^* гомеоморфно $Q(k)$.

Для любого $n \in \omega$ положим $P_n = \cup\{\overline{\varphi(T(s;\alpha))}:\ s \in \omega^n,\ \alpha \in k^n\}$ и $M_n = \cup\{Z_i:\ i \le n\} \cup P_{n+1}$. Определим множество $M = \cap\{M_n:\ n \in \omega\}$. Из условий 1 и 7 следует, что $Z^* \subset M_n$ и $M_{n+1} \subset M_n$, поэтому $Z^* \subset M$.

Лемма В. Множество M замкнуто в X и гомеоморфно бэровскому пространству $B(k)$.

Доказательство леммы В. Проверим, что множество Z^* всюду плотно в M. Возьмём точку $x \in M - Z^*$ и её окрестность U в пространстве X радиуса 2^{-n} для некоторого $n \in \omega$. Так как $x \in M_n$, то $x \in \overline{\varphi(T(t;\beta))} \subset P_{n+1}$ для некоторых $t \in \omega^{n+1}$, $\beta \in k^{n+1}$. Из условий 1, 5 и 4 следует, что расстояние $\rho(x,\ z(t;\ \beta)) \le \mathrm{diam}(V(t;\ \beta)) \le 2^{-|t|-n-1}$, следовательно, $z(t;\ \beta) \in Z^* \cap U$. Итак, $\overline{Z^*} = M$. Так как $Z^* \approx Q(k)$, а $Q(k)$ – однородное по весу пространство веса k, то и M – однородное по весу пространство веса k.

Покажем по индукции, что каждое множество M_n замкнуто в X. По условию 3 множество M_0 замкнуто в X. Предположим, что множество M_{n-1} замкнуто в X, и проверим замкнутость множества M_n. Так как $M_n \subset M_{n-1}$, то $\overline{M_n} \subset M_{n-1}$. Возьмём точку $x \in \overline{M_n}$. Если $x \in Z^*$, то $x \in M_n$. Если $x \notin Z^*$, то $x \in \overline{\varphi(T(s;\alpha))} \subset P_n$ для некоторых $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$; из условий 5 и 9 следует, что эти кортежи s и α определяются однозначно. Тогда, учитывая условия 7 и 3, получаем следующую цепочку:

$$x \in \overline{\varphi(T(s;\alpha))} \cap \overline{P_{n+1}} \subset \mathrm{cl}_X(\cup\{\varphi(T(s\hat{\ }i;\ \alpha\hat{\ }\alpha_n)):\ i \in \omega,\ \alpha_n \in k\}) = \{z(s;\ \alpha)\} \cup (\cup\{\overline{W}:\ W \in \Im(s;\ \alpha)\}).$$

Из дизъюнктности семейства $\Im(s;\ \alpha)$ вытекает, что $x \in \overline{\varphi(T(s\hat{\ }i;\alpha\hat{\ }\alpha_n))}$ для некоторых $i \in \omega$ и $\alpha_n \in k$, следовательно, по определению $x \in P_{n+1} \subset M_n$. Итак, каждое множество M_n замкнуто в X. Но $M = \cap\{M_n:\ n \in \omega\}$, следовательно, множество M замкнуто в X. Так как X – полное метрическое пространство, то и M – полное метрическое пространство.

Докажем, что $\dim M = 0$. Для каждого $n \in \omega$ множество $S_n = \{s \in \omega^{<\omega}:\ |s| + \mathrm{lh}s = n+1\}$ конечное; например, $S_2 = \{\langle 2\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,0,0\rangle\}$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{A}_n = \{U(s\hat{\ }i;\ \alpha):\ \mathrm{lh}s = \mathrm{lh}\alpha,\ i \in \omega,\ s\hat{\ }i \in S_n,\ \alpha \in k^{<\omega}\}$. Возьмём два разных множества $U_1 = U(s\hat{\ }i;\ \alpha)$ и $U_2 = U(t\hat{\ }j;\ \beta)$ из семейства $\mathfrak{A}_n$. Если $\mathrm{lh}s = \mathrm{lh}t$, то $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \varnothing$ согласно свойствам 9, 6 и 5. Если $\mathrm{lh}s < \mathrm{lh}t$, то найдём $m = \max\{l \in \omega:\ s\hat{\ }iYl = t\hat{\ }jYl\}$. Так как $\mathrm{lh}(s\hat{\ }i) < \mathrm{lh}(t\hat{\ }j)$ и $|s\hat{\ }i| \le |t\hat{\ }j|$, то случай $m = \mathrm{lh}(s\hat{\ }i)$ невозможен. Значит, $m < \mathrm{lh}(s\hat{\ }i)$. Из свойств 5, 6 и 7 вытекает, что $U_1 \subset V(s\hat{\ }iY(m+1);\ \alpha Y(m+1))$ и $U_2 \subset V(t\hat{\ }jY(m+1);\ \beta Y(m+1))$. Следовательно, по свойству 9 $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \varnothing$, ведь $s\hat{\ }iY(m+1) \ne t\hat{\ }jY(m+1)$. Случай $\mathrm{lh}s > \mathrm{lh}t$ разбирается аналогично. Итак, замыкания в X множеств из семейства $\mathfrak{A}_n$ попарно не пересекаются.

Из свойств 5, 6 и 7 вытекает, что семейство $\mathfrak{A}_{n+1}$ вписано в семейство $\mathfrak{A}_n$ для любого $n \in \omega$.

Проверим, что $M_n \subset \cup \mathfrak{A}_n$ для любого $n \in \omega$. Возьмём точку $z(s;\ \alpha) \in Z^* \subset M_n$. Если $|s|+\mathrm{lh}s = n$, то $z(s;\ \alpha) \in \overline{\varphi(T(s;\alpha))} \subset U(s\hat{}0;\ \alpha)$, значит, $s\hat{}0 \in S_n$ и $z(s;\ \alpha) \in \cup \mathfrak{A}_n$. Если $|s|+\mathrm{lh}s = i > n$, то $z(s;\ \alpha) \in \cup \mathfrak{A}_i \subset \cup \mathfrak{A}_n$. Если $|s|+\mathrm{lh}s = i < n$, то $z(s;\ \alpha) \in U(s\hat{}(n-i);\ \alpha) \in \mathfrak{A}_n$. Итак, доказано, что $Z^* \subset \cup \mathfrak{A}_n$. Покажем, что $P_{n+1} \subset \cup \mathfrak{A}_n$. Возьмём множество $\overline{\varphi(T(s;\alpha))} \in P_{n+1}$ для некоторых $s \in \omega^{n+1}$, $\alpha \in k^{n+1}$. Если $s = \langle 0,0,\dots,0\rangle$, то по свойствам 7 и 5 $\overline{\varphi(T(s;\alpha))} \subset U(s;\ \alpha \Upsilon n)$, значит, $\overline{\varphi(T(s;\alpha))} \subset \cup \mathfrak{A}_n$. Если s – ненулевой кортеж, то $|s|+\mathrm{lh}s = i > n+1$ и $\overline{\varphi(T(s;\alpha))} \subset U(s\hat{}0;\ \alpha)) \in \mathfrak{A}_i$, тогда $\overline{\varphi(T(s;\alpha))} \subset \cup \mathfrak{A}_i \subset \cup \mathfrak{A}_n$. Итак, доказано, что $M \subset M_n \subset Z^* \cup P_{n+1} \subset \cup \mathfrak{A}_n$ для любого $n \in \omega$. С учётом свойств 4 и 5 делаем вывод о том, что для любого $n \in \omega$ семейство $\{U \cap M\colon U \in \mathfrak{A}_n\}$ образует открытое в M дискретное покрытие множества M мелкости $\le 2^{-n}$. Тогда по теореме 7.3.1 [3] получаем, что $\dim M = 0$.

В целом, мы доказали, что M – нульмерное однородное по весу полное метрическое пространство веса k, причём в нашем случае $k > \omega$, следовательно, по теореме Стоуна [5] M гомеоморфно бэровскому пространству $B(k)$. Лемма В доказана.

Проверим, что $M - Z^* \subset Y$. Возьмём точку $y \in M - Z^*$, тогда $y \in P_n$ для любого $n \in \omega$. Из условий 5 и 9 следует, что для любого $n \in \omega$ существуют и единственные такие кортежи $s(y,n) \in \omega^n$, $\alpha(y,n) \in k^n$, что $y \in \overline{\varphi(T(s;\alpha))}$. С учётом свойства вложенности 7 построим единственные последовательности $\lambda \in \omega^\omega$ и $\delta \in k^\omega$ так, что $\lambda \Upsilon n = s(y,n)$ и $\delta \Upsilon n = \alpha(y,n)$ для любого $n \in \omega$. По теореме о вложенных шарах 4.3.8 [Eng] в полном метрическом пространстве T пересечение $\cap\{\varphi(T(\lambda \Upsilon n;\ \delta \Upsilon n))\colon n \in \omega\}$ не пусто и состоит из одной точки x. Тогда $\varphi(x) = y \in Y$.

Итак, множество $Z^* = M \cap Z \approx Q(k)$. Множество Z^* имеет тип F_σ в полном метрическом пространстве M и всюду плотно в нём, тогда множество $M \cap Y = M - Z^*$ по следствию 2.4 [5] гомеоморфно пространству $B(k)$. Теорема доказана полностью для случая $\mathrm{cf}(k) > \omega$.

Укажем изменения в доказательстве для случая $k > \omega$, $\mathrm{cf}(k) = \omega$. Пусть $k = \sup\{k_n\colon n \in \omega\}$, где $\mathrm{cf}(k_n) > \omega$ и $k_n < k_{n+1}$ для любого $n \in \omega$. При построении точек $z(s;\ \alpha)$ и множеств $U(s\hat{}i;\ \alpha)$, $V(s;\ \alpha)$ и $T(s;\ \alpha)$ кортежи α длины n мы будем брать из индексного множества $k_0 \times k_1 \times \dots \times k_{n-1}$, а не из множества k^n, как было выше. Доказательства всех свойств множества M изменяются незначительно; например, множество $M \cap Y$ будет гомеоморфно счётному произведению $k_0 \times \dots \times k_n \times \dots$ в тихоновской топологии, которое по теореме Стоуна [5] гомеоморфно пространству $B(k)$.

Для $k = \omega$ доказательство упрощается; укажем на основные изменения. Вместо точек $z(s;\ \alpha)$ и множеств $U(s\hat{}i;\ \alpha)$, $V(s;\ \alpha)$ и $T(s;\ \alpha)$ строим точки $z(s)$ и множества $U(s\hat{}i)$, $V(s)$ и $T(s)$, удовлетворяющие условиям 1-9, если везде пропустить второй индекс α. Для любого $s \in \omega^n$ последовательность $\{z(s\hat{}i)\colon i \in \omega\}$ сходится к точке $z(s)$, поэтому Z^* – счётное множество без изолированных точек и по теореме Серпинского Z^* гомеоморфно пространству рациональных чисел Q. Для любого $\varepsilon > 0$ найдём такое n, что $2^{-n} < \varepsilon$. Множество $S_n = \{s \in \omega^{<\omega}\colon |s|+\mathrm{lh}s = n+1\}$ конечное, поэтому семейство $\mathfrak{A}_n = \{U(s\hat{}i)\colon i \in \omega,\ s\hat{}i \in S_n\}$ является конечным покрытием множества M мелкости $< \varepsilon$. Тогда M – вполне ограниченное замкнутое множество в полном метрическом пространстве X, следовательно, M – компакт. Так как $\dim M = 0$ и Z^* всюду плотно в M, то по теореме Брауэра $M \approx C$. По теореме Мазуркевича множество $M \cap Y$ гомеоморфно пространству иррациональных чисел. Доказательство теоремы 2 окончено.

Следствие. Пусть дано A-множество Y в полном метрическом пространстве X и $Z = X - Y$. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) множество Y не является множеством типа F_σ в пространстве X; 2) множество Z не является множеством типа G_δ в пространстве X; 3) существует такое замкнутое множество $M \subset X$, что M гомеоморфно канторову множеству C, $M \cap Y$ гомеоморфно пространству иррациональных чисел, а $M \cap Z$ гомеоморфно пространству рациональных чисел Q.

Литература

1. Медведев, СВ. Топологические характеристики пространств $Q(k)$ и $QxB(k)$ I СВ. Медведев // Вести. Моск. ун-та. - Сер. 1. Математика. Механика. - 1986. - № 1. - С. 47-^49.

2. Медведев, С.В. Нульмерные однородные борелевские множества / С.В. Медведев. - ДАН СССР. - 1985. - Т. 283, № 3. - С. 542-545.

3. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг; пер. с англ. - М.: Мир, 1986. - 752 с.

4. Hansell, R.W. On characterizing non-separable analytic and extended Borel sets as types of continuous images / R.W. Hansell. - Proc. London Math. Soc.(3). - 1974. - V. 28. - P. 683-699.

5. Stone, A.H. Non-separable Borel sets / A.H. Stone. - Rozpr. Mat. - 1962. - V. 28. - P. 1-40.

6. Stone, A.H. Non-separable Borel sets, II / A.H. Stone. - Gen. top. and appl. - 1972. - V. 2. - P. 249-270.

Поступила в редакцию 15 июля 2008 г.

PLACEMENT OF BAIRE'S SPACE *B(k)* INTO ABSOLUTE A-SETS

In the article the proof of the theorem of placement of Baire's space into absolute A-sets as closed subset is given.

Keywords: absolute A-sets, Baire 's space.

Medvedev Sergey Vasiliyevich - Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Analisys Department, South Ural State University.

Медведев Сергей Васильевич - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.