УДК 517.948

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ МЕТОДОМ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ[1]

А.С. Кутузов

В статье показана эффективность применения метода квазиобращения для решения одной граничной обратной задачи тепловой диагностики на кольце. Впервые этим методом для такого рода двумерных задач получена зависимость погрешности приближённого решения от погрешности задания входных данных.

Ключевые слова: граничные обратные задачи, некорректно поставленные задачи, метод квазиобращения, оптимальные по порядку оценки.

Одним из методов, предназначенных для численного решения некоторых классов граничных обратных задач, некорректных по Адамару, является метод квазиобращения, описанный в монографии [1]. Основная идея метода квазиобращения заключается в надлежащем изменении операторов, входящих в задачу. Это изменение может быть произведено, например, введением добавочных дифференциальных членов, которые достаточно «малы», то есть могут быть устремлены к нулю. Основная ценность метода квазиобращения состоит в возможности сведения исходной некорректно поставленной задачи к другой задаче - «близкой» к исходной, но являющейся уже корректной по постановке. Приближённые решения, получаемые таким образом, уже являются устойчивыми.

1. Постановка граничной обратной задачи на кольце. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \Delta u(x,y,t), \tag{1}$$

в котором $x,y \in K$, K – кольцо, ограниченное окружностями Γ_1 и Γ_2 с радиусами r_1 и r_2 соответственно, $t \ge 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Пусть известны следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,y,0) = 0, \quad x,y \in K, \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad t \ge 0, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_0} = f(t); \quad \Gamma_0 = \left\{x,y \in K : x^2 + y^2 = r_0^2, r_1 < r_0 < r_2\right\}, t \ge 0, \tag{4}$$

а граничное значение $u|_{\Gamma_2}$ функции $u(x,y,t)$ подлежит определению.

Будем искать решение этой задачи, являющееся осесимметричным, то есть таким, что

$$u(x,y,t) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}, t\right). \tag{5}$$

Выполним замену переменной $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда задача (1)–(4) сводится к следующей:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \quad t \ge 0, \quad r_1 \le z \le r_2, \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad r_1 \le z \le r_2, \tag{7}$$

$$u|_{z=r_1} = 0, \quad t \ge 0, \tag{8}$$

$$u|_{z=r_0} = f(t), \quad t \ge 0, \quad r_1 < r_0 < r_2, \tag{9}$$

а определить требуется $u|_{z=r_2} = u_0(r_2,t), \quad t \ge 0$.

[1] Работа поддержана грантом РФФИ № 07–01–96001_ р_урал_а

Для решения задачи (6)–(9) необходимо сначала рассмотреть вспомогательную задачу на отрезке $[r_1, r_0]$. Найдя её решение методом разделения переменных, можно затем вычислить значение функции $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=r_1}$ и, решая полученную задачу Коши, найти искомое решение $u|_{z=r_2}$. Однако, задача дифференцирования является некорректной по постановке (см. [2]), значит и задача (6)–(9) является некорректно поставленной.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in L_2[0,\infty)$ существует точное решение $u_0(r_2,t) \not\equiv 0$ поставленной задачи, которое принадлежит пространству $W_2^1[0,\infty)$, причем для этого решения $u_0(r_2,0) = 0$ и существует число $T > 2$ такое, что при $t \ge T$

$$u_0(r_2,t) = 0. \tag{10}$$

Кроме того, $u_0(r_2,t) \in M_r$, где

$$M_r = \left\{u_0 \in W_2^1[0,\infty) : \|u_0\|^2_{W_2^1} \le r^2\right\}. \tag{11}$$

Однако точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \le \delta. \tag{12}$$

Требуется, используя исходные данные f_δ, δ, и M_r задачи (6)–(9) построить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|u_0 - u_\delta\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t) = u_0(r_2,t)$.

Благодаря условию (10), можно показать, используя сведения из теории бесселевых функций [см. 3], что к задаче (6)–(9) можно применять интегральное преобразование, на полупрямой $t \in [0,\infty)$ аналогичное преобразованию Фурье, в предположении, что

$$u(z,t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \tag{13}$$

2. Точное решение задачи (6)–(9). Учитывая (13), в качестве рабочего пространства $\overline{H}$ возьмем комплексный вариант $L_2[0,\infty)$ над полем действительных чисел, то есть его элементы имеют вид $u(t) + iv(t)$, где $u, v \in L_2[0,\infty)$ и норма в нем определяется по формуле $\|u+iv\|_{\overline{H}}^2 = \|u\|^2_{L_2} + \|v\|^2_{L_2}$. Тогда пространство $\overline{H}$ будет гильбертовым, а преобразование Фурье на нем определим формулой

$$F[u(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) e^{-i\tau t} dt, \quad \tau \ge 0. \tag{14}$$

Лемма. Преобразование F, определённое формулой (14), изометрично.

Доказательство. Обозначим $\hat{u}(z,\tau) = F[u(z,t)]$, тогда из (13) и (14) следует, что

$$\hat{u}(z,\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(z,t) e^{-i\tau t} dt, & \tau \ge 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(z,t) e^{i|\tau| t} dt, & \tau < 0. \end{cases}$$

Тогда получаем, что $\|\hat{u}(z,\tau)\|^2_{L_2(-\infty,\infty)} = \int_0^\infty |\hat{u}(z,\tau)|^2 d\tau + \int_0^\infty \left|\overline{\hat{u}(z,\tau)}\right|^2 d\tau = 2\int_0^\infty |\hat{u}(z,\tau)|^2 d\tau$, поскольку очевидно, что $|\hat{u}(z,\tau)| = \left|\overline{\hat{u}(z,\tau)}\right|$.

Кроме того, из теоремы Планшереля, сформулированной в [4], следует, что

$$\|\hat{u}(z,\tau)\|^2_{L_2(-\infty,\infty)} = \|u(z,t)\|^2_{L_2(-\infty,\infty)},$$

откуда и получаем утверждение леммы.

Применяя к уравнению (6), с учетом условия (13), преобразование Фурье F, получаем

$$\frac{d^2\hat{u}(z,\tau)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\hat{u}(z,\tau)}{dz}=i\tau\hat{u}(z,\tau);\quad \tau\ge 0,\quad r_1\le z\le r_2. \tag{15}$$

Для уравнения (15) поставим задачу, добавив условия

$$\hat{u}(r_1,\tau)=0,\quad \tau\ge 0, \tag{16}$$

$$\hat{u}(r_0,\tau)=\hat{f}(\tau),\quad \tau\ge 0, \tag{17}$$

где $\hat{f}(\tau)=F[f(t)]$.

Из (15)–(17) требуется определить $\hat{u}(r_2,\tau)=\hat{u}_0(\tau),\quad \tau\ge 0.$

Выполним замену

$$\hat{u}(z,\tau)=\hat{v}(z,\tau)\cdot z^{-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

предложенную в [3, с. 131], чтобы привести уравнение (15) к нормальному виду.

После преобразований задача (15)–(17) сводится к следующей:

$$\frac{d^2\hat{v}(z,\tau)}{dz^2}+\frac{1}{4z^2}\hat{v}(z,\tau)=i\tau\hat{v}(z,\tau);\quad \tau\ge 0,\quad r_1\le z\le r_2, \tag{19}$$

$$\hat{v}(r_1,\tau)=0,\quad \tau\ge 0, \tag{20}$$

$$\hat{v}(r_0,\tau)=\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0},\quad \tau\ge 0. \tag{21}$$

Далее, пусть

$$z=\theta+r_1,\quad \hat{v}(\theta+r_1,\tau)=\hat{w}(\theta,\tau). \tag{22}$$

Тогда из (19)–(21) имеем

$$\frac{d^2\hat{w}(\theta,\tau)}{d\theta^2}+\frac{1}{4(\theta+r_1)^2}\hat{w}(\theta,\tau)=i\tau\hat{w}(\theta,\tau);\quad \tau\ge 0,\quad 0\le\theta\le r_2-r_1, \tag{23}$$

$$\hat{w}(0,\tau)=0,\quad \tau\ge 0, \tag{24}$$

$$\hat{w}(r_0-r_1,\tau)=\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0},\quad \tau\ge 0, r_1\le r_0\le r_2. \tag{25}$$

Тривиальным является факт того, что решение задачи (23), (24) линейно зависит от решения задачи

$$\frac{d^2e(\theta,\tau)}{d\theta^2}+\frac{1}{4(\theta+r_1)^2}e(\theta,\tau)=i\tau e(\theta,\tau);\quad \tau\ge 0,\quad 0\le\theta\le r_2-r_1, \tag{26}$$

$$e(0,\tau)=0,\quad \tau\ge 0, \tag{27}$$

$$e'_\theta(0,\tau)=1,\quad \tau\ge 0, \tag{28}$$

то есть имеет место соотношение

$$\hat{w}(\theta,\tau)=l(\tau)e(\theta,\tau),\quad \tau\ge 0, \theta\in[0,r_2-r_1], \tag{29}$$

где $l(\tau)$ – произвольная функция.

Используя (25), находим

$$l(\tau)=\frac{\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0-r_1,\tau)},\quad \tau\ge 0. \tag{30}$$

Из (18), (22), (29), (30) следует, что

$$\hat{u}(z,\tau)=\frac{\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0-r_1,\tau)}e(z-r_1,\tau)z^{-\frac{1}{2}},\quad z\in[r_1,r_2], \tau\ge 0. \tag{31}$$

Тогда при $\tau\ge 0$ $\hat{u}(r_2,\tau)=\dfrac{\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0-r_1,\tau)\sqrt{r_2}}e(r_2-r_1,\tau).$

Далее рассмотрим пространство $H_0 = L_2[0, r_0 - r_1]$ над полем комплексных чисел ($r_0 > r_1$) и оператор $A_1 : H_0 \to H_0$, определяемый формулами

$$A_1 u = \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{4(\theta + r_1)^2} u, u \in D(A_1), \text{ где } D(A_1) = \{u : u, A_1 u \in H_0, u(0) = u(r_0 - r_1) = 0\} \tag{32}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что оператор A_1 самосопряжен, поэтому согласно условиям и теоремам, например, из [4, 5], $Sp(A_1) \subset \mathbb{R}$.

Нетрудно установить, что при условии $\frac{r_0}{r_1} < 2\pi + 1$ оператор A_1 является отрицательно определенным и нулевая точка не лежит в спектре оператора A_1.

Тогда, как и в [6], справедлива

Теорема 1. При условии $r_0/r_1 < 2\pi + 1$ функция $l(\tau)$, определенная формулой (30) непрерывна при $\tau \ge 0$.

Перепишем уравнение (26) в виде $\frac{d^2 e(\theta,\tau)}{d\theta^2} - i\tau e(\theta,\tau) = -\frac{1}{4(\theta + r_1)^2} e(\theta,\tau)$. Решая полученное уравнение методом вариации постоянных и используя условия (27), (28), сведем задачу (26)–(28) к следующему интегральному уравнению

$$e(\theta,\tau) = \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}\theta}{\mu_0\sqrt{\tau}} - \int_0^\theta \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(\theta - \xi)}{\mu_0\sqrt{\tau}} \frac{1}{4(\xi + r_1)^2} e(\xi,\tau) d\xi, \tag{33}$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\theta, \xi \in [0, r_2 - r_1]$.

В статье [6] доказана

Теорема 2. Существуют числа $\tau_0 > 0$, $c_1 > 0, c_2 > 0$ такие, что для любого $\tau \ge \tau_0$ выполняется неравенство:

$$c_1 \left| \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(r_2 - r_1)}{\mu_0\sqrt{\tau}} \right| \le |e(r_2 - r_1, \tau)| \le c_2 \left| \frac{sh\mu_0\sqrt{\tau}(r_2 - r_1)}{\mu_0\sqrt{\tau}} \right|. \tag{34}$$

Кроме того, там же выводятся следующие оценки:

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\| \le c_3\delta \text{ при } \tau \in [0, \tau_0]. \tag{35}$$

и

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\| \le c_4\delta \text{ при } \tau \ge \tau_0 \tag{36}$$

Итак, согласно (29), образ точного решения можно найти в виде

$$\widehat{w}_0(\theta,\tau) = e(\theta,\tau) l_0(\tau), \quad \tau \ge 0, \theta \in [0, r_2 - r_1],$$

где функция $l_0(\tau)$ определяется формулой (30), в которой $\widehat{f}(\tau) = \widehat{f}_0(\tau)$, $e(\theta,\tau)$ – решение интегрального уравнения (33).

Согласно статье [6], задачу можно свести к следующей операторной форме

$$\frac{1}{|e(r_2 - r_1, \tau)|} \widehat{w}_0(\tau) = \hat{l}_0(\tau), \tag{37}$$

в которой $\hat{l}_0(\tau) = Q^* l_0(\tau)$, а Q^* – оператор, сопряженный с изометрическим оператором $Q(\tau) = \frac{|e(r_2 - r_1, \tau)|}{e(r_2 - r_1, \tau)}$.

3. Метод квазиобращения. Для построения устойчивого приближённого решения задачи (1)–(4) с приближённо заданными значениями функции $f(t)$ рассмотрим вспомогательную задачу для гиперболического уравнения с малым параметром:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \Delta u(x,y,t), \tag{38}$$

в котором $x,y \in K$, K – кольцо, ограниченное окружностями Γ_1 и Γ_2 с радиусами r_1 и r_2 соответственно, $t \ge 0$. Кроме этого зададим

$$u(x,y)=0, \qquad x,y \in K, \tag{39}$$

$$u\big|_{\Gamma_1}=0,\ t \ge 0, \tag{40}$$

$$u\big|_{\Gamma_0}=f_\delta(t);\quad \Gamma_0=\left\{x,y\in K: x^2+y^2=r_0{}^2, r_1<r_0<r_2\right\}, t\ge 0, \tag{41}$$

а граничное значение $u_\delta\big|_{\Gamma_2}$ и оценка $\|u_0-u_\delta\|_{L_2}$ функции $u(x,y,t)$ подлежат определению.

Здесь $\varepsilon>0$ – постоянная времени. Задача (38)–(41) поставлена корректно. Её решение на полупрямой (после предварительной замены (5)) можно найти методом Римана, изложенным, например, в [7].

В качестве приближённого решения задачи (1)–(4) будем рассматривать функцию $u_\delta(t)=u_\delta^\varepsilon\big|_{\Gamma_2}$, где $u_\delta^\varepsilon(x,y,t)$ удовлетворяет задаче (38)–(41) и $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$.

Выполняя с задачей (38)–(41) действия, абсолютно аналогичные изложенным в предыдущем пункте, получаем образ приближённого решения в виде $\hat{w}_\delta(\theta,\tau)=\bar{e}(\theta,\tau)l_\delta(\tau)$, где $\bar{e}(\theta,\tau)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d^2\bar{e}(\theta,\tau)}{d\theta^2}+\frac{1}{4(\theta+r_1)^2}\bar{e}(\theta,\tau)=i\tau\bar{e}(\theta,\tau)-\varepsilon\tau^2\bar{e}(\theta,\tau);\quad \tau\ge 0,\quad 0\le\theta\le r_2-r_1, \tag{42}$$

$$\bar{e}(0,\tau)=0,\quad \tau\ge 0, \tag{43}$$

$$\bar{e}'_\theta(0,\tau)=1,\quad \tau\ge 0. \tag{44}$$

Функция $l_\delta(\tau)$ определяется формулой (30), в которой $\hat{f}(\tau)=\hat{f}_\delta(\tau)$.

Для функции $l_\delta(\tau)$, определённой таким способом, справедлива теорема, аналогичная теореме 1.

Задача Коши (42)–(44) сводится к следующему интегральному уравнению

$$\bar{e}(\theta,\tau)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}\,\theta}{\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}}-\int_0^\theta\frac{\operatorname{sh}\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}\,(\theta-\xi)}{\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}}\frac{1}{4(\xi+r_1)^2}\bar{e}(\xi,\tau)d\xi. \tag{45}$$

Аналогично теореме 2, имеет место следующая оценка для любого $\tau\ge\tau_0$

$$c_1\left|\frac{\operatorname{sh}\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}\,(r_2-r_1)}{\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}}\right|\le\left|\bar{e}(r_2-r_1,\tau)\right|\le c_2\left|\frac{\operatorname{sh}\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}\,(r_2-r_1)}{\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}}\right|. \tag{46}$$

Переобозначим за τ_0 – максимальное из чисел, начиная с которых выполняются оценки (34) и (46).

Также как и в статье [6], сводим задачу к операторному уравнению

$$\frac{1}{\left|\bar{e}(r_2-r_1,\tau)\right|}\hat{w}_\delta(\tau)=\hat{l}_\delta(\tau), \tag{47}$$

где $\hat{l}_\delta(\tau)=Q^*{}_1 l_\delta(\tau)$, а $Q^*{}_1$ – оператор, сопряженный с изометрическим оператором $Q_1(\tau)=\dfrac{\left|\bar{e}(r_2-r_1,\tau)\right|}{\bar{e}(r_2-r_1,\tau)}$.

Обозначим за R_ε оператор, регуляризующий задачу (1)–(4) и определяемый формулой (47).

Рассмотрим оценку погрешности приближённого решения задачи (1)–(4) на логарифмическом классе равномерной регуляризации, то есть на множестве

$$M_a=\left\{\hat{w}\in W_2{}^1[0,\infty):\left\|\hat{w}\right\|^2_{L_2[0,\infty]}+\left\|\hat{w}'\right\|^2_{L_2[0,\infty]}\le a^2\right\}.$$

Поскольку $\hat{w}_0 \in M_a$, $\hat{w}_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w_0(t) e^{-i\tau t} dt$ и $\hat{w}'_0(\tau) = i\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w_0(t) e^{-i\tau t} dt = i\tau \hat{w}_0(\tau)$, то получаем, что $\left\| \sqrt{1+\tau^2}\, \hat{w}_0 \right\|^2 \le a^2$.

На отрезке $\tau \in [0, \tau_0]$ оценка погрешности приближенного решения в силу (35) имеет вид:

$$\left\| \hat{w}_\delta - \hat{w}_0 \right\| \le c_3 \delta .$$

Потому далее будем рассматривать промежуток $\tau > \tau_0$.

В качестве характеристики точности построенного приближённого решения будем использовать величину

$$\Delta = \sup \left\{ \left\| \hat{w}_\delta - \hat{w}_0 \right\| : \hat{w}_0 \in M_a, \left\| \hat{l}_0 - \hat{l}_\delta \right\| \le c_4 \delta \right\}.$$

Зависимость $\varepsilon(\delta)$ выбирается из условия минимальности погрешности полученного приближённого решения (квазиоптимальный выбор параметра регуляризации).

Если обозначить $\Delta_1 = \sup\limits_{\hat{w}_0 \in M_a} \left\| R_\varepsilon \hat{l}_0 - \hat{w}_0 \right\|$ и $\Delta_2 = \sup\limits_{\left\| \hat{l}_0 - \hat{l}_\delta \right\| \le c_4 \delta} \left\| R_\varepsilon \left(\hat{l}_\delta - \hat{l}_0 \right) \right\|$, то получим очевидную оценку

$$\Delta \le \Delta_1 + \Delta_2 . \tag{48}$$

Оценим величину Δ_2.

$$\Delta_2 \le \sup_{\left\| \hat{l}_0 - \hat{l}_\delta \right\| \le c_4 \delta} \left\| R_\varepsilon \right\| \left\| \hat{l}_\delta - \hat{l}_0 \right\| \le c_4 \delta \left\| R_\varepsilon \right\| .$$

$$\left\| R_\varepsilon \right\| = \sup_{\hat{l}_\delta \ne 0} \frac{\left\| R_\varepsilon \hat{l}_\delta \right\|}{\left\| \hat{l}_\delta \right\|} = \sup_{\hat{l}_\delta \ne 0} \frac{\sqrt{\int_{\tau_0}^\infty \left| \bar{e}(r_2 - r_1, \tau) \right|^2 \left| \hat{l}_\delta \right|^2 d\tau}}{\left\| \hat{l}_\delta \right\|} \le \sup_{\hat{l}_\delta \ne 0} \frac{\sqrt{\sup\limits_{\tau > \tau_0} \left| \bar{e}(r_2 - r_1, \tau) \right|^2} \sqrt{\int_{\tau_0}^\infty \left| \hat{l}_\delta \right|^2 d\tau}}{\left\| \hat{l}_\delta \right\|} =$$

$$= c_2 \sqrt{\sup_{\tau > \tau_0} \left| \frac{\operatorname{sh} \sqrt{i\tau - \varepsilon \tau^2}\, (r_2 - r_1)}{\sqrt{i\tau - \varepsilon \tau^2}} \right|^2} .$$

Таким образом, $\left\| R_\varepsilon \right\|^2 \le \frac{c_2^2}{\tau_0} e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$.

Окончательно получаем, что

$$\Delta_2 \le c_5 \delta e^{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}} , \tag{49}$$

где $c_5 = c_2 c_4 / \sqrt{\tau_0}$.

Оценим величину Δ_1.

$$\Delta_1 = \sup_{\hat{w}_0 \in M_a} \left\| R_\varepsilon \hat{l}_0 - \hat{w}_0 \right\| = \sup_{\hat{w}_0 \in M_a} \left\| \left(\frac{\left| \bar{e}(r_2 - r_1, \tau) \right|}{\left| e(r_2 - r_1, \tau) \right|} - 1 \right) \hat{w}_0 \right\| .$$

Легко видеть, что $\Delta_1 \le a \sup\limits_{\tau > \tau_0} \left| \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \left(\frac{\left| \bar{e}(r_2 - r_1, \tau) \right|}{\left| e(r_2 - r_1, \tau) \right|} - 1 \right) \right|$

Используя оценки (34) и (46), преобразуем выражение под знаком $\sup$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\left(\frac{|\bar{e}(r_2-r_1,\tau)|}{|e(r_2-r_1,\tau)|}-1\right)\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\left(\frac{c_2\left|\frac{\operatorname{sh}\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}(r_2-r_1)}{\sqrt{i\tau-\varepsilon\tau^2}}\right|}{c_1\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}(r_2-r_1)}{\mu_0\sqrt{\tau}}\right|}-1\right)\right| \le$$

$$\le\left|\frac{c_2}{c_1\sqrt{1+\tau^2}}\left(\frac{\left|\operatorname{sh}\left(\mu_0\sqrt{\tau}\sqrt{1+i\varepsilon\tau}(r_2-r_1)\right)\right|}{\left|\sqrt{1+i\varepsilon\tau}\right|\left|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}(r_2-r_1)\right|}-\frac{c_1}{c_2}\right)\right| \le$$

$$\le\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\left|\left|\operatorname{sh}\left(\mu_0\sqrt{\tau}\sqrt{1+i\varepsilon\tau}(r_2-r_1)\right)\right|-\left|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}(r_2-r_1)\right|\right|}{\sqrt{1+\tau^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\tau}\right|\left|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}(r_2-r_1)\right|}+\frac{\left|1-\frac{c_1}{c_2}\sqrt{1+i\varepsilon\tau}\right|}{\sqrt{1+\tau^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\tau}\right|}\right) \le$$

$$\le\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\left|\operatorname{sh}\left(\mu_0\sqrt{\tau}\sqrt{1+i\varepsilon\tau}(r_2-r_1)\right)-\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}(r_2-r_1)\right|}{\sqrt{1+\tau^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\tau}\right|\left|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}(r_2-r_1)\right|}+\frac{\left|1-\frac{c_1}{c_2}\sqrt{1+i\varepsilon\tau}\right|}{\sqrt{1+\tau^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\tau}\right|}\right).$$

Далее находим

$$\Delta_1 \le c_6\varepsilon, \tag{50}$$

где $c_6=(c_2/c_1)a$.

Значит, величина невязки

$$\Delta \le c_6\varepsilon + c_5\delta e^{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}. \tag{51}$$

Выбирая зависимость $\varepsilon(\delta)$ из условия минимальности оценки погрешности $\Delta_1+\Delta_2$, получаем оценку:

$$\left[\ln^2\left(\frac{4c_6}{cc_5\delta}\right)\right]^{-1} \le \varepsilon \le \left[\ln^2\left(\frac{4c_6}{c_5\delta}\right)\right]^{-1},$$

где $0<c<1$.

Таким образом, погрешность приближённого решения на множестве M_a имеет при $\delta\to 0$ порядок

$$\Delta \sim c_6\ln^{-2}\left(\frac{4c_6}{c_5\delta}\right). \tag{52}$$

С учётом оценки погрешности оптимального по порядку метода решения задачи (1)-(4) на множестве M_a, полученной в [8], доказана

Теорема 3. Метод приближённого решения задачи (1)-(4), связанный с задачей (38)—(41), оптимален по порядку на классе M_a.

Далее остаётся проделать обратное преобразование Фурье и все обратные замены переменных.

Оценка погрешности приближённого решения поставленной задачи (1)-(4) сохранится, только с другой константой на месте c_6 перед логарифмом.

Таким образом, с использованием метода квазиобращения оказалась решена двумерная обратная граничная задача тепловой диагностики. Оценка (52) характеризует зависимость построенного устойчивого решения от погрешности задания входных данных и является точной по порядку на логарифмическом классе решений. Устойчивость построенного приближённого решения позволяет применять для его поиска обычные численные методы решения задач математической физики.

Литература

1. Латтес, Р. Метод квазиобращения и его приложения/ Р. Латтес, Ж.Л. Лионе. - М.: Мир, 1970.-336 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения/ В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. - М.: Наука, 1978. - 206 с.
3. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая/ Г.Н. Ватсон. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. - 799 с.
4. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, СВ. Фомин. - М.: Наука, 1972. - 543 с.
5. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы/ М.А. Наймарк. - М.: Наука, 1969. - 528 с.
6. Кутузов, А.С. Точная по порядку оценка приближенного решения обратной задачи для уравнения теплопроводности на кольце/ А.С. Кутузов // Вестник ЮУрГУ, Серия «Математика, физика, химия». - 2007. - Вып. 9. - № 19(91) - С. 30-36.
7. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977.-736 с.
8. Кутузов, А.С. Точная по порядку оценка приближённого решения многомерной обратной задачи для уравнения теплопроводности/ А.С. Кутузов // Проблемы развития приграничных территорий: Сб. материалов международной конференции. - Троицк: ОГУП «Увельская типография». - 2008. - С. 114-117.

Поступила в редакцию 5 ноября 2008 г.

ESTIMATION OF THE APPROACHED DECISION OF ONE BIDIMENTIONAL BOUNDARY RETURN PROBLEM OF THERMAL DIAGNOSTICS BY METHOD OF QUASICICULATION

In this article the efficiency of application of a method of quasiciculation for the decision of one boundary return problem of thermal diagnostics on a ring is demonstrated. For the first time by this method of this kind of two-dimensional sums the dependence of error of approximate decision from error of assignment of input data was received.

Keywords: boundary opposite sums, the incorrect supplied sums, the method of generalized inverse, the optimal in order marb.

Kutusov Anton Sergeevich - Teacher, Assistant of Faculty of Calculus Mathematics of the Chelyabinsk State University.

Кутузов Антон Сергеевич - преподаватель, ассистент кафедры вычислительной математики Челябинского государственного университета.

e-mail: thething84@mail.ru