УДК 532.5

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОЦЕССЫ НЕЛИНЕЙНОГО СПИН-АПА И СПИН-ДАУНА В ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

О.А. Головня, А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко

Исследовано влияние магнитного поля на процессы нелинейного спин-апа и спин-дауна в проводящей жидкости. Обсуждены механизмы ускорения и торможения частиц жидкости в присутствии поля. Показано, что в пределе больших полей асимметрия между этими процессами исчезает, как это имеет место в линейном случае.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, спин-ап, численные методы.

Введение

Если неподвижный вначале цилиндрический сосуд, заполненный вязкой жидкостью, привести во вращение с постоянной угловой скоростью, то спустя некоторое время жидкость придет в состояние твердотельного вращения с той же угловой скоростью, что и сосуд. Этот переходный процесс - возбуждение углового момента в жидкости - называется спин-апом . Противоположный процесс - затухания углового момента (спин-даун - *spin-down)* - возникает как следствие торможения или остановки сосуда с жидкостью, ранее находившейся в состоянии равномерного вращения. Подобные процессы привлекают внимание исследователей в связи с многочисленными приложениями, начиная от технических (центробежные насосы, миксеры, трансмиссии и пр.) и кончая фундаментальными вопросами метеорологии, гео- и астрофизики (взаимодействие газовой или жидкой оболочки с твердым вращающимся ядром). Влияние магнитного поля на процессы спин-апа первоначально изучалось в связи с астрофизическими проблемами. Позднее влияние магнитного поля на движение вращающейся жидкости стало интенсивно исследоваться в связи с совершенствованием металлургических технологий и, в частности, в связи с технологиями выращивания кристаллов по методу Чохральского (см., например, [1]). Обзор результатов, полученных к середине 70-х годов (к началу эпохи компьютеров и численных методов) дан в [2]. Они касались, в основном, идеализированной постановки задачи, когда боковые стенки цилиндра отсутствуют и течение не ограничено в радиальном направлении. Кроме того, аналитические решения удалось получить только для случая так называемого линейного спин-апа (спин-дауна), когда жидкость, уже находящаяся в состоянии твердотельного вращения с угловой скоростью Ω, возмущается малым изменением $\Delta\Omega$ угловой скорости границ. В этом случае (малых чисел Россби: $\varepsilon = \Delta\Omega / \Omega < 1$) уравнения ее движения можно линеаризовать, что и оправдывает название процесса. Когда спин-ап происходит из состояния покоя (или спин-даун в состояние покоя), тогда задача оказывается существенно нелинейной ($\varepsilon = 1$) и аналитические решения не найдены даже при отсутствии боковых стенок. В такой ситуации возможен только численный анализ задачи. Процессы спин-апа в цилиндре конечных размеров в отсутствии магнитного поля изучены сравнительно слабо, а в его присутствии - (нам) известна только одна работа [3], появившаяся недавно. В ней авторы ограничились рассмотрением только процесса спин-апа, но не спин-дауна.

Ранее мы сделали попытки [4, 5] оценить влияние магнитного поля на движение крутильного вискозиметра, заполненного проводящим расплавом. Эта задача родственна обсуждаемой выше, поскольку в процессе колебаний вискозиметра в расплаве непрерывно возбуждается или затухает угловой момент под действием той же причины - вязкого трения о стенки. При очевидной разнице в постановках этих двух задач можно предположить, что механизмы, с помощью которых жидкость изменяет момент количества своего движения, в них одинаковы или сходны. Можно даже сказать, что в процессе спин-апа эти механизмы проявляются в «наиболее чистом виде». В этом - главная причина нашего интереса к рассматриваемой задаче. Вторая же причина в том, что влияние магнитного поля на эти процессы для цилиндров конечных размеров изучено слабо, как уже отмечалось выше. Ниже мы попытаемся исследовать это влияние с помощью численных моделей и для тех условий, которые характерны для вискозиметрических экспериментов над жидкими металлами.

В литературе устоялось заимствованное из англоязычных источников название - *spin-up*.

Постановка задачи. В экспериментах с крутильным вискозиметром магнитное число Рейнольдса Re_m, сравнивающее магнитное поле, индуцируемое движением металлического расплава, с внешним полем B, имеет порядок 10^{-5} [4], что позволяет пренебречь индуцированным полем и записать уравнения магнитной гидродинамики в виде [8]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}[\mathbf{j},\mathbf{B}], \tag{1}$$

$$\Delta\Phi = B\ \mathbf{rot}\mathbf{V}, \tag{2}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\Phi + [\mathbf{V},\mathbf{B}]\right), \tag{3}$$

где V, P, j и Φ - поля скорости, давления, плотности тока проводимости и электрического потенциала соответственно, а ν, ρ и σ - вязкость, плотность и электропроводность расплава. Пусть расплав целиком заполняет сосуд, смачивая его верхнюю крышку. Считаем, что расплав и сосуд являются немагнитными (их магнитные проницаемости равны единице), а сосуд к тому же не проводит электрического тока. Тогда магнитное поле в объеме расплава совпадает с таковым, создаваемым в этом объеме внешними источниками в отсутствие расплава (и сосуда). Нормальная компонента электрического тока, индуцированного движением расплава, должна обращаться в ноль на всей границе с непроводящим сосудом. На той же границе для скорости вязкой жидкости должны быть поставлены обычные условия прилипания. В случае спин-ана сосуд и жидкость покоятся до момента времени $t = 0$, а в этот момент сосуд скачком приобретает угловую скорость Ω, направленную вдоль его геометрической оси. В этом же направлении приложено внешнее однородное и статическое магнитное поле B, созданное еще до момента начала движения. Требуется описать поведение фигурирующих в (1-3) полей, когда система «жидкость плюс сосуд» будет стремиться к новому стационарному состоянию твердотельного вращения. Аналогичным же образом ставится задача спин-дауна. Каждая из поставленных краевых задач обладает цилиндрической симметрией, такой же симметрии мы потребуем и от их решений.

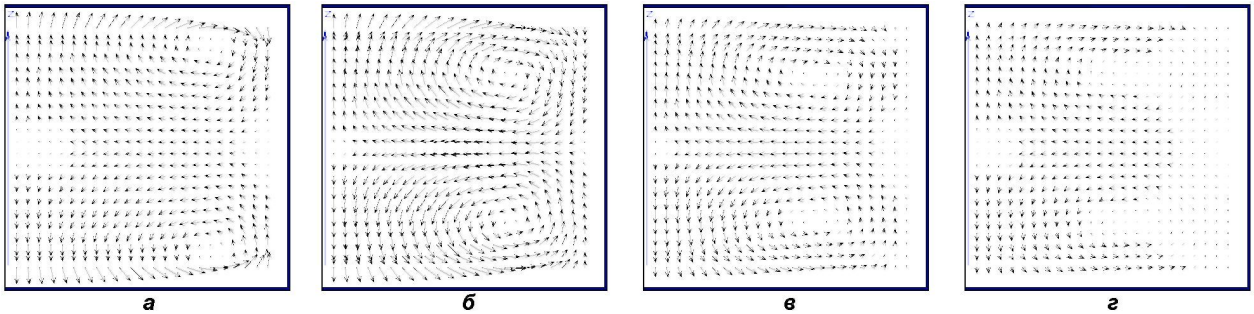
Метод решения. Сформулированная выше краевая задача решалась численно методом сеток в цилиндрической системе координат. Оставшиеся после учета соображений симметрии пространственные производные оценивались по схеме центральных разностей с точностью $(\Delta x)^2$, а временные определялись вперед по времени по односторонней схеме, имеющей точность Δt. Получаемая в результате дискретизации система нелинейных алгебраических уравнений решалась итерационным методом Ньютона, а возникающая на каждом его шаге линейная задача решалась методом Гаусса.

Результаты численных экспериментов. Параметры задачи выбирались примерно совпадающими с теми, которые мы использовали в натурных экспериментах [6] с крутильным вискозиметром Швидковского в магнитном поле. Цилиндр имел размеры: радиус $R = 1{,}3$ см, высота $H = 1{,}2$ см. Он заполнялся жидкостью со свойствами жидкого галлия недалеко от точки плавления: $\nu = 2{,}4\cdot10^{-7}$ м^2/с, $\sigma = 3{,}82\cdot10^{6}$ (Ом·м)$^{-1}$, $\rho = 6094$ кг/м^3. Угловая скорость принималась равной $\Omega = 0{,}1$ с$^{-1}$, что примерно соответствует средней угловой скорости движения вискозиметра, когда период его колебаний составляет $\tau \sim 5$ с, а амплитуда $\theta_0 \sim 6°$. Магнитное поле изменялось от 0,0 *Т до* 0,063 *Т,* как и в экспериментах [6]. При дискретной аппроксимации задачи использовалась пространственная сетка 26x26.

На рис. 1 показана эволюция поля $\mathbf{V}_{rz}$ (составляющей V в плоскости r — z, описывающей вторичные течения) в процессе спин-апа в отсутствии магнитного поля. Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра и делящая его пополам, является плоскостью зеркальной симметрии задачи. Она же будет плоскостью симметрии и для всех разыскиваемых полей, если поток устойчив. Вторичные течения отсутствуют в начальном состоянии (когда жидкость и цилиндр покоятся) и в конечном состоянии (когда жидкость и цилиндр вращаются как твердое тело). Сразу после старта у торцов начинает образовываться экмановский пограничный слой, полное относительное время формирования которого (по отношению к периоду вращения T) составляет [2] $\tau_E / T \sim 2/(T\Omega) = 1/\pi \approx 1/3$. Этот этап движения показан на рис. 1, а-б и состоит в том, что вначале возникает радиальное течение вблизи торцов, которое приводит к образованию тороидаль-

ных вихрей вблизи боковой стенки. Затем вихри начинают расти, вовлекая в движение все больший объем жидкости. В конце этого этапа (при $\tau_E / T \approx 1/3$) границы верхнего и нижнего вихрей смыкаются, образуя единый радиальный поток, направленный к оси (рис. 1,б).

К моменту времени $\tau_s / T \sim (h/2\pi)(\Omega/\nu)^{1/2} \approx 0{,}63$ (условное время спин-апа [2]) весь объем жидкости будет прокачан через экмановские пограничные слои, и, следовательно, все частицы жидкости приобретут некоторую угловую скорость. После этого на боковой стенке становится заметен диффузионный пограничный слой, в котором существенна только азимутальная компонента скорости (рис. 1, в). Граница этого слоя (фронт Ведемейера [7]) постепенно перемещается от стенки цилиндра к его оси (рис. 1 в, г). Процесс заканчивается, когда в жидкости после прохождения фронта не установится (вследствие диффузии скорости) поле $V = V_\varphi = \Omega r$, отвечающее твердотельному вращению. Длительность этого диффузионного процесса составит в нашем случае $\tau_d / T \sim h^2\Omega / 2\pi\nu = 2{,}5$.

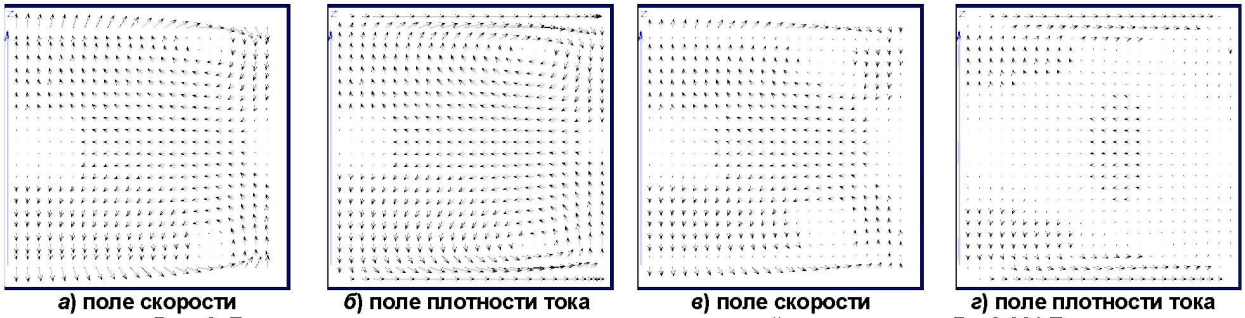


а *б* *в* *г*

Рис 1. Поля скоростей вторичных течений в меридиональной плоскости цилиндра в разные моменты времени t/T : *а* – 0,08, *б* – 0,33, *в* – 0,63, *г* – 0,8.

Согласно (1), (3) амперовские силы квадратично зависят от индукции магнитного поля и поэтому влияние последнего на движение расплава при малых B невелико. Относительная роль этих сил оценивается числом Гартмана Ha и параметром магнитного взаимодействия α, сравнивающими амперовские силы с силами вязкости и с (кориолисовыми) силами инерции соответственно:

$$Ha^2 = \left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right) B^2 R^2, \qquad \alpha^2 = \frac{\sigma B^2}{2\rho\Omega}.$$



а) поле скорости **б) поле плотности тока** **в) поле скорости** **г) поле плотности тока**

Рис. 2. Поля скорости и плотности тока в меридиональной плоскости при *B* = 0,021 Т в разные моменты времени (*а, б* – *t/T* = 0,1, *в, г* – *t/T* = 0,33 Т)

На рис. 2 показаны картины течения жидкости и электрического заряда при B = 0,021 T ($\alpha^2 = 1{,}4$, $Ha = 14{,}0$). Хотя распределение скорости по направлению имеет здесь тот же вид, что и в отсутствие поля, однако величина скорости уменьшается, как уменьшается и доля областей, занятых вторичными течениями. При увеличении магнитного поля до B = 0,063 T ($\alpha^2 = 12{,}56$, $Ha = 42{,}0$) даже спустя небольшое время после начала спин-апа скорость вторичных течений уменьшается настолько, что уже не может быть графически изображена прежним способом и в прежнем масштабе. Распределение плотности электрического тока j (точнее - его составляющей $\mathbf{j}_{rz}$ в плоскости r — z) для тех же моментов времени подобно таковому для $\mathbf{V}_{rz}$. Это объясняется тем, что векторы $\mathbf{V}_{rz}$ и $\mathbf{j}_{rz}$ удовлетворяют одним и тем же граничным условиям (непротекания

через границу) и одному и тому же уравнению $\mathrm{div}_2\left(\mathbf{j}_{rz}\right)=\mathrm{div}_2\left(\mathbf{V}_{rz}\right)=0$ для «двумерной» дивергенции в плоскости r - z, следующему из условия несжимаемости жидкости $\mathrm{div}\,\mathrm{V}=0$ и закона сохранения электрического заряда $\mathrm{div}\,\mathbf{j}=0$ при учете осевой симметрии.

На рис. 3 показана временная зависимость всех трех компонент вектора скорости V'_r, V'_φ, V'_z, измеренной в единицах ΩR, в точке, располагающейся вблизи плоскости симметрии ($z \approx H/2$) недалеко от оси цилиндра (r = *0,09R)* при различных значениях индукции магнитного поля. Видно, что в отсутствие магнитного поля время установления состояния твердотельного вращения составляет величину порядка (1,3 - 1,6)T, что хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями [2] и численными расчетами [7]. Кроме того, в рассматриваемой точке сразу после старта существенны только радиальная и осевая компоненты скорости, а азимутальная остается малой или равной нулю, вплоть до момента времени $t=t_W\approx 0,32T$, когда к этой точке подходит фронт Ведемейера. Поскольку последний размыт вследствие диффузии скорости, величина t_w определялась как точка пересечения касательной к графику $V'_\varphi(t)$ в месте его перегиба с прямой $V'_\varphi=0$ (см. рисунок). В магнитном поле величина t_w резко уменьшается, возможно - до нуля в исследованных нами полях, и поэтому этап быстрого роста V'_φ наступает раньше. Экстремумы на зависимостях $V'_r(t)$ и $V'_z(t)$ (минимум и максимум соответственно) также смещаются в область малых времен и уменьшаются по величине и тем сильнее, чем больше магнитное поле - можно сказать, что магнитное поле «вымораживает» вторичные течения в окрестности рассматриваемой точки. Такая же качественно картина наблюдается и в других точках вблизи плоскости симметрии.

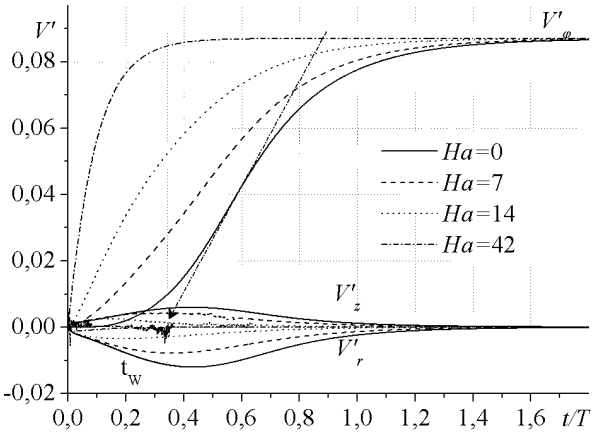


Рис. 3. Временная зависимость компонент скорости V'_r, V'_φ, V'_z в точке *z* = 0,52*H*, *r* = 0,09*R* для различных значений магнитного поля

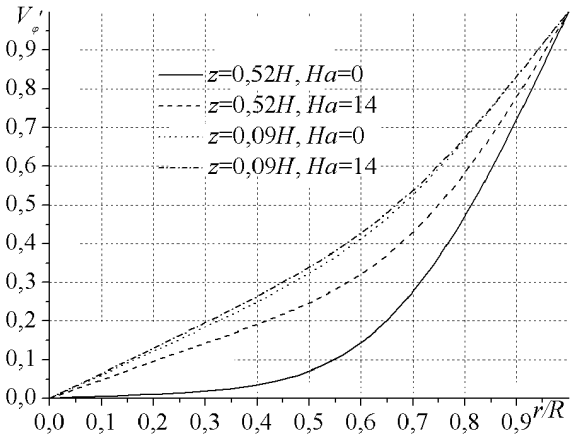


Рис. 4. Профиль азимутальной скорости в различных магнитных полях, на разных высотах на момент времени *T*/4

На рис. 4 показаны радиальные профили азимутальной скорости $V'_\varphi(r)$ ($V'_\varphi(r)=V'_\varphi(r,z^*,t^*)$, $z^*,t^*=\mathrm{const}$) вблизи плоскости симметрии (при $z=0,52/7$) и около торца цилиндра ($z=0,09H$) в присутствии и отсутствии магнитного поля для момента времени $t=T/4$. Видно, что быстрее всего профиль выравнивается около торцов, а позднее всего - около плоскости симметрии.

Представление о развитии процесса в целом можно было бы получить, проследив за изменением во времени каких-либо его интегральных характеристик. Наиболее важной такой характеристикой является полный момент импульса относительно оси цилиндра $L_z(t)$, приобретенный жидкостью к моменту t после начала спин-апа:

$$L_z(t)=\rho\int_V rV_\varphi dv=2\pi\rho\int_0^R r^2dr\int_0^H V_\varphi(r,z,t)dz\ .$$

Наряду с чисто механической характеристикой полезно рассмотреть также некоторую электродинамическую интегральную характеристику спин-апа. Учитывая вихревой характер тока,

продемонстрированный на рис. 1 и 2, в качестве таковой удобно взять полный ток $I_{EH}(t)$ в пограничном слое Экмана-Гартмана

$$I_{EH}(t) = \int_{\Sigma} j_r d\Sigma ,$$

где Σ - боковая поверхность цилиндра, коаксиального с данным и «стоящего» на (нижнем) его торце. Выбор радиуса r_0 этого цилиндра большой роли не играет, а его высота выбиралась равной толщине слоя Экмана-Гартмана при данном r_0. Зависимости $L_z(t)$ и $I_{EH}(t)$ представлены на рис. 5

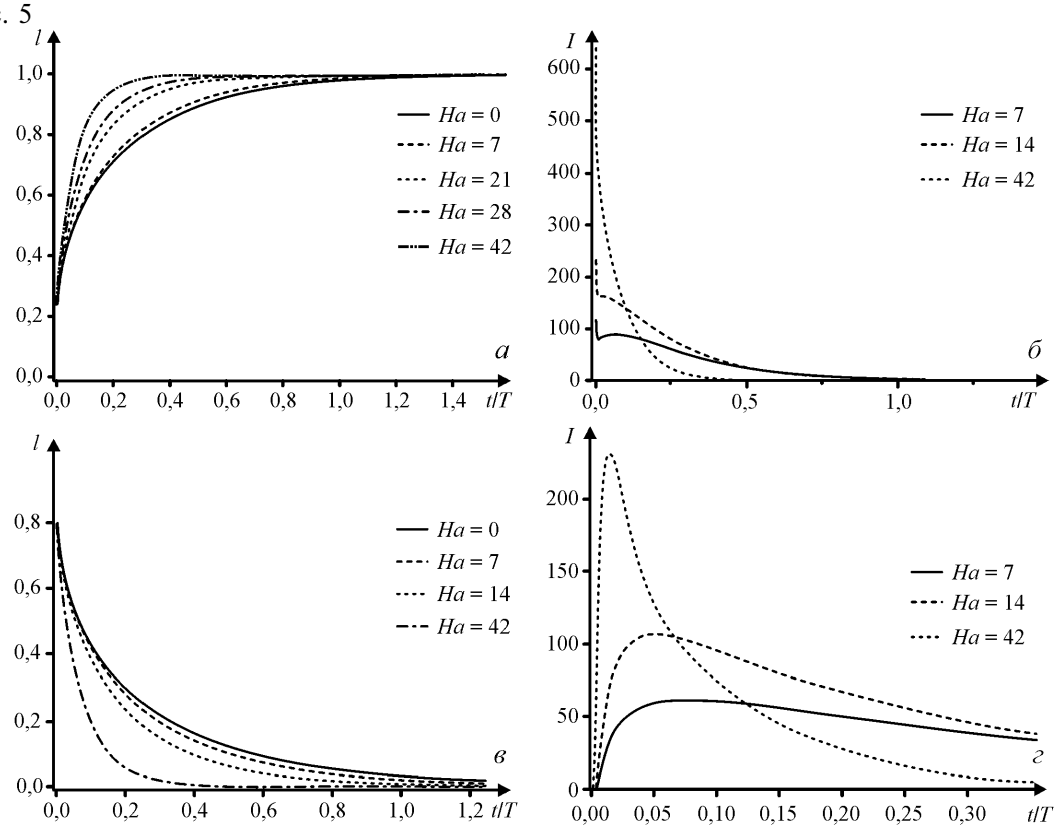


Рис. 5. Зависимость от времени момента импульса *l* и тока I_{EH} в процессах спин-апа (а, б) и спин-дауна (в, г) при разных значениях числа Гартмана. Величина момента отнесена к моменту импульса L_0 замороженной жидкости:

$l = L(t)/L_0$ **, где** $L_0 = MR^2\Omega/2$ **,** M **– масса жидкости**

Спин-даун. Рассмотрим теперь обратную задачу, когда $\Omega_1 = 0{,}1\ \text{с}^{-1}, \Omega_2 = 0$, и $\varepsilon = -1$, то есть задачу нелинейного спин-дауна в состояние покоя. В отсутствии магнитного поля на начальных этапах, когда цилиндр уже покоится, а жидкость в объеме еще вращается, у торцов также возникает пограничный слой Экмана, в котором, однако, радиальный поток направлен не в сторону боковой стенки, а к оси вращения. В силу уравнения непрерывности тогда от каждого из торцов возникают восходящие осевые потоки (явление нагнетания Бёдевадта - Bodewadt pump). Они встречаются у плоскости симметрии и вновь порождают радиальные потоки, которые в окрестности этой плоскости теперь направлены к боковой поверхности. Натекая на эту поверхность, они образуют два нисходящих к торцам осевых потока. Таким образом, вновь возникает циркуляция жидкости в меридиональном сечении цилиндра, направление которой противоположно таковому в процессе спин-апа. С точностью до направления линии тока жидкости в процессе спин-дауна и спин-апа в соответственные моменты времени весьма похожи друг на друга и различаются лишь некоторыми деталями. Например, вихри, образующиеся вблизи пересечения боковой поверхности и торцов, имеют эллиптическую форму. Большие оси этих эллипсов слегка отклоняются от радиального направления, причем в разные стороны в процессах спин-апа и спин-дауна. Заметна также некоторая разница в абсолютных значениях скорости вторичных те-

чений в одни и те же моменты времени. Отметим, что в линейном случае (когда $\varepsilon \sim 0$) существует полная симметрия между этими процессами: картины вторичных течений совпадают, если направление линий тока в одной из них поменять на противоположное. В нелинейном случае эта симметрия, как мы видим, слегка нарушается.

Заметим, что теперь радиальный электрический ток в окрестности плоскости симметрии направлен от оси к боковой стенке. Поэтому возникающая сила Ампера будет направлена против азимутальной скорости и, следовательно, будет тормозить азимутальный поток, способствуя более быстрому завершению процесса спин-дауна. На рис. 5 показано поведение во времени интегральных гидродинамических и электрических характеристик процесса: полного момента импульса L и полного тока I в экман-гартмановском слое. Для обеих величин присутствие магнитного поля столь же существенно, как и в процессе спин-апа: переход к новому стационарному состоянию происходит тем быстрее, чем больше индукция приложенного поля.

Заключение

Из представленных данных видно, что магнитное поле существенно влияет на поведение обеих введенных выше интегральных характеристик, уменьшая время перехода к новому состоянию стационарного движения тем больше, чем больше индукция поля. Ввиду того, что новое состояние твердотельного вращения достигается лишь асимптотически (при $t \to \infty$), время перехода τ_S (время спин-апа) количественно можно определить лишь условно, приняв, например, что τ_S - это такое время, что $L_z(\tau_S) = 0{,}97 L_0$. Тогда можно построить зависимость τ_S от индукции приложенного поля. Она приведена на рис. 6 вместе с аналогичной зависимостью для процесса спин-дауна. По оси абсцисс здесь откладывается обратное число Гартмана, поскольку, как отмечалось выше, для больших магнитных полей в случае линейного спин-апа справедливо соотношение

$$\tau_S = \left(\frac{h^2 \rho}{\nu \sigma B_0^2} \right)^{1/2} \sim \frac{1}{Ha}.$$

Видно, что в пределе больших магнитных полей $(1/Ha \to 0)$ оно имеет место и для нелинейных процессов спин-апа и спин-дауна. Кроме того, в этом пределе исчезает асимметрия между процессами спин-апа и спин-дауна, обусловленная их нелинейностью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 07-03-96048-р_урал_а.

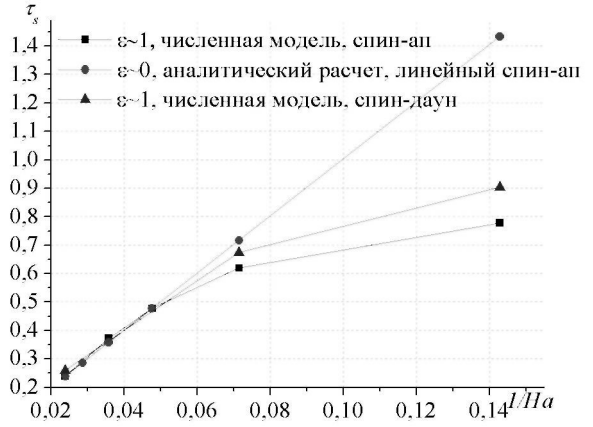


Рис. 6. Зависимость времени спин-апа и спин-дауна от числа Гартмана

Литература

1. Hurle, D.T.J. Handbook of Crystal Growth / D.T.J. Hurle // R, W. Series, in D.T.J. Hurle (Ed.), Elsevier. - 1994. - V. 2. - P. 259.

2. Benton, E.R. Spin-up / E.R. Benton, A. Clark // Annual Review of Fluid Mechanics. - 1974. - № 6. - P. 257-280.

3. Spin-up from rest in a cylinder of an electrically conducting fluid in an axial magnetic field / C.H. Lee, T. Tagawa, H. Ozoe, J.M. Hyun // Acta Mechanica. - 2006 - V. 186. - P. 203-220.

4. Крутильные колебания цилиндра, заполненного проводящей жидкостью в осевом магнитном поле / В.П. Бескачко, Г.П. Вяткин, Н.М. Писарев, М.Б. Хисматулин // Расплавы. - 1991.-№ 5.-Р. 31-38.

5. Теория крутильного вискозиметра, помещенного в осевое магнитное поле / В.П. Бескачко, Г.П. Вяткин, Н.М. Писарев, М.Б. Хисматулин //Магнитная гидродинамика. - 1992. - № 2. - С. 65-70.

6. Бескачко, В.П. Крутильный вискозиметр в осевом магнитном поле: эксперимент / В.П. Бескачко, М.Б. Хисматулин // Магнитная гидродинамика. - 1993. - № 1. - Р. 117-122.

7. William, B. Watins. Spin-up from rest in a cylinder / Watins B. William, R.G. Hussey // The Physics of Fluids. - 1977. - V. 20. - P. 1596-1604.

8. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 1982.-320 с.

Поступила в редакцию 21 мая 2009 г.

THE MAGNETIC FIELD INFLUENCE ON THE PROCESSES OF NON-LINEAR SPIN-UP AND SPIN-DOWN IN THE CONFINED CYLINDER

The magnetic field influence on the processes of non-linear spin-up and spin-down in the conductive liquid is investigated. The mechanisms of the acceleration and the deceleration of the liquid's particles in the presence of the magnetic field are discussed. It was shown, that the asymmetry between these processes disappears in the case of the strong fields, as well as in the case of linear processes.

Keywords: magnetohydrodynamics, spin-up, numerical methods.

Golovnya Oksana Aleksandrovna - engineer, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.

Головня Оксана Александровна - инженер, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: oxana@physics.susu.ac.ru

Korenchenko Anna Yevgenyevna - Dr. Sc. (Physics and Mathematics), associated professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.

Коренченко Анна Евгеньевна - доктор физико-математических наук, доцент, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: korenchenko@physics.susu.ac.ru

Beskachko Valeriy Petrovich - Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.

Бескачко Валерий Петрович - доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.