УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДА ТИХОНОВА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОРРЕКТНОСТИ

Н.М. Япарова

В работе проведено исследование величины погрешности метода регуляризации Тихонова нулевого порядка. Доказана оптимальность по порядку этого метода на некоторых классах корректности.

Ключевые слова: метод решения операторных уравнений, метод регуляризации, оптимальность по порядку, модуль непрерывности, погрешность метода.

При решении практических задач большое внимание уделяется выбору оптимального метода. В том случае, когда построение оптимального метода является трудновыполнимой задачей, вместо оптимального метода используют метод, имеющий тот же порядок погрешности, что и оптимальный, то есть применяют метод, оптимальный по порядку. Оптимальные по порядку методы имеют широкое применение при решении обратных задач математической физики неустойчивых относительно возмущения исходных данных.

Одним из распространенных методов решения подобного рода задач является метод регуляризации Тихонова нулевого порядка [1]. При численном решении обратной задачи физики твердого тела [2] было замечено, что этот метод позволяет получать более точные результаты, связанные с «тонкой» структурой решения, чем другие методы регуляризации. Это послужило поводом для исследования данного метода на оптимальность.

В работе установлено, что одним из факторов, влияющих на оптимальность метода, является структура множества, которому принадлежит искомое решение. Метод регуляризации Тихонова нулевого порядка был исследован на оптимальность по порядку на различных классах корректности и для этого метода доказана оптимальность по порядку на некоторых из рассматриваемых классов.

1. Постановка задачи

Пусть H - гильбертово пространство, а $A : H \to H$ - инъективный линейный ограниченный оператор. Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au = f, \quad u, f \in H. \tag{1}$$

Предполагается, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in M$, но вместо f_0 дано некоторое приближение $f_\delta \in H$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется по исходным данным задачи M, f_δ и δ определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения.

Опишем множество M. Пусть оператор A_1 определен соотношениями: $A_1 = A^* A$, спектр $Sp(A_1) = \left[0, \|A\|^2\right]$. Рассмотрим множество $S_r = \left\{v : v \in H, \|v\| \le r\right\}$ и линейный, ограниченный оператор $B : H \to H$ такой, что для оператора $B_1 = BB^*$ выполнено соотношение

$$B_1^{1/2} = G\left(A_1^{1/2}\right), \tag{2}$$

где функция $G(\sigma)$ – непрерывна, строго возрастает на $\left[0, \|A\|\right]$ и $G(0) = 0$. Тогда множество M есть множество $M_r = BS_r$.

Определение 1. Семейство непрерывных операторов $\left\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на M_r, если $\forall \delta \in \left(0, \delta_0\right]$, оператор $T_\delta : H \to H$ и

$$T_\delta f_\delta \to u_0 \quad при \quad \delta \to 0$$

равномерно на множестве M_r при условии, что $\|f_\delta - Au_0\| \le \delta$.

Для дальнейшего изложения нам потребуется понятие и свойства модуля непрерывности $\omega(\tau, M_r)$ обратного оператора в нуле [4]

$$\omega(\tau, r) = \sup\left\{\|u\| : u \in M_r,\ \|Au\| \le \tau\right\}.$$

Если $\omega(\tau, r) \to 0$ при $\tau \to 0$, то M_r является классом корректности для уравнения (1).

Определение 2. Погрешностью метода $\left\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$ на классе корректности M_r назовем функцию $\Delta\left(T_\delta\right)$ такую, что $\forall \delta \in \left(0, \delta_0\right]$:

$$\Delta\left(T_\delta\right) = \sup_{u, f_\delta}\left\{\left\|u - T_\delta f_\delta\right\| : u \in M_r,\ \left\|Au - f_\delta\right\| \le \delta\right\}. \qquad (3)$$

Определение 3. Метод $\left\{T_\delta^{opt} : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$ оптимален на классе корректности M_r, если $\forall \delta \in \left(0, \delta_0\right]$

$$\Delta\left(T_\delta^{opt}\right) = \Delta_\delta^{opt} = \inf\left\{\Delta_\delta\left(T_\delta\right) : T_\delta \in C(H, H)\right\}, \qquad (4)$$

где $\Delta_\delta(T)$ определено формулой (3).

Теорема 1. Пусть M_r - класс корректности для уравнения (1), а Δ_δ^{opt} определена формулой (4), тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}\omega(\delta, r) \le \Delta_\delta^{opt} \le \omega(\delta, r).$$

Доказательство приведено в [5].

Определение 4. Метод $\left\{\overline{T}_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$ оптимален по порядку на множестве M_r, если $\exists k$ такое, что $\forall \delta \in \left(0, \delta_0\right]$ выполнено:

$$\Delta(\overline{T}_\delta) \le k\omega(\delta, r).$$

2. Метод регуляризации Тихонова нулевого порядка

Следуя [1], метод регуляризации Тихонова нулевого порядка заключается в сведении задачи приближенного решения уравнения (1) к вариационной задаче

$$\inf_u\left\{\left\|Au - f_\delta\right\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in H\right\}, \quad \alpha > 0. \qquad (5)$$

Из работы [7] следует, что для любой $f_\delta \in H$ существует единственное решение u_δ^α задачи (5), определяемое формулой

$$u_\delta^\alpha = R_\alpha f_\delta, \qquad (6)$$

где

$$R_\alpha = \left(A_1 + \alpha E\right)^{-1} A^*, \quad \alpha > 0. \qquad (7)$$

Для оператора R_α, определенного формулой (7), имеет место следующее соотношение [8]:

$$\left\|R_\alpha\right\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \qquad (8)$$

Рассмотрим следующую величину:

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{u_0}\left\{\left\|u_0 - R_\alpha A u_0\right\| : u_0 \in M_r\right\}. \qquad (9)$$

В качестве параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ возьмем решение уравнения

$$\Delta_1(\alpha) = \left\|R_\alpha\right\| \cdot \delta. \qquad (10)$$

Пусть семейство операторов $\left\{R_\alpha : 0 < \alpha \le \alpha_0\right\}$ определено формулой (7).Уравнение (10) будет иметь единственное решение $\overline{\alpha}(\delta)$ [7]. Оценим погрешность метода $\left\{R_{\overline{\alpha}}(\delta) : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$ при выборе параметра $\overline{\alpha}$, удовлетворяющего уравнению (10), на различных классах корректности.

3. Исследование точности метода регуляризации Тихонова нулевого порядка

Покажем, что этот метод не всегда будет оптимальным по порядку. Рассмотрим величину

$$\Delta_0(\delta)=\inf_{\alpha>0}\Delta_\delta\left(R_\alpha\right), \tag{11}$$

где $\Delta_\delta\left(R_\alpha\right)$ - функция, определенная формулой (3).

Из результатов, сформулированных в [9, с. 44-46], имеем следующее утверждение

Замечание 1. Пусть $\overline{\alpha}(\delta)$ – решение уравнения (10), тогда $\forall\ \delta\in\left(0,\delta_0\right]$ и $\delta_0<rG\left(\|A\|\right)\cdot\|A\|$, имеет место оценка

$$\Delta_1(\overline{\alpha}(\delta))\le\Delta_0(\delta)\le 2\Delta_1(\overline{\alpha}(\delta)). \tag{12}$$

В качестве класса корректности рассмотрим множество $M_r = BS_r$, где оператор B определен соотношением (2), а

$$G(\sigma)=\sigma^p,\quad \delta\in\left[0,\|A\|\right],\ p>0. \tag{13}$$

Соответствующий класс корректности M_r будем называть степенным классом.

Теорема 2. Если $p\in\left(0,2\right]$, то метод $\left\{R_{\overline{\alpha}(\delta)}:0<\delta\le\delta_0\right\}$ оптимален по порядку на множестве M_r.

Доказательство. Так как множества значений $R(B)$ и $R(B\ )$ операторов B и B всюду плотны в H, то из леммы, сформулированной в [8], следует существование полярного разложения операторов B

$$B=QB_1^{1/2}, \tag{14}$$

где Q -унитарный оператор.

Подставляя в $\Delta_1^2(\alpha)$ представление (14), получаем

$$\Delta_1^2(\alpha)=\max_{\|\omega_0\|\le r}\int_0^{\|A\|}\left[\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right]^2G^2(\sigma)d\left(E_\sigma\omega_0,\omega_0\right), \tag{15}$$

где $\omega_0=Q^{-1}v_0$, а $\left\{E_\sigma:\sigma\in\left[0,\|A\|\right]\right\}$ – разложение единицы E, порожденное оператором $A_1^{1/2}$.

Из (15) и теоремы, сформулированной в [1], следует, что

$$\Delta_1(\alpha)=r\max_{\sigma\in\left[0,\|A\|\right]}\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}G(\sigma). \tag{16}$$

Пусть $p<2$, тогда из формул (16)и(13) следует, что

$$\Delta_1(\alpha)=r\max_{\sigma\in\left[0,\|A\|\right]}\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}G(\sigma)=r\max_{\sigma\in\left[0,\|A\|\right]}\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\sigma^p.$$

Введем функцию

$$y(\sigma)=\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\sigma^p.$$

Эта функция неотрицательная и непрерывная по σ на отрезке $\left[0,\|A\|\right]$. Тогда существует значение $\hat{\sigma}=\hat{\sigma}(\alpha)$ такое, что

$$y\left(\hat{\sigma}\right)=\max_{\sigma\in\left[0,\|A\|\right]}y\left(\hat{\sigma}\right).$$

Заметим, что функция $y(\sigma)$ дифференцируема, и в точке локального экстремума должно быть выполнено соотношение

$$\sigma^{p-1}\left(p\alpha+p\sigma^2-2\sigma^2\right)=0.$$

Отсюда следует, что либо $\sigma=0$, но тогда $y(\sigma)=0$, либо

$$\sigma^2=\frac{p\alpha}{2-p}.$$

Последнее соотношение будет иметь место при $p< 2$ и в точке

$$\sigma = \sqrt{\frac{p\alpha}{2-p}}$$

функция $y(\sigma)$ достигает максимума.

Таким образом, из (16) следует, что на степенном классе корректности

$$\Delta_1(\alpha) = \frac{r}{2}\left[\frac{p}{2-p}\right]^{\frac{p}{2}} \alpha^{\frac{p}{2}}. \tag{17}$$

Из (8), (10) и (17) следует, что

$$\overline{\alpha}(\delta) = \left[\frac{2-p}{p}\right]^{\frac{p}{p+1}} \left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{2}{p+1}}. \tag{18}$$

На основании (12), (17) и (18) имеем, что для любого $\delta \in \left(0, \delta_0\right]$

$$\Delta_\delta\left(R_{\overline{\alpha}(\delta)}\right) \le \left[\frac{p}{2-p}\right]^{\frac{p}{2(p+1)}} \cdot r^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}. \tag{19}$$

Заметим [9], что в случае функции $G(\sigma)$, определяемой формулой (13), имеет место соотношение

$$\Delta_\delta^{opt} = r^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \tag{20}$$

где $p \in (0, \infty)$, а Δ_δ^{opt} определена формулой (4).

Из (19) и (20) следует оптимальность по порядку метода $R_{\overline{\alpha}(\delta)}$ для $p \in (0, 2)$.

Пусть $p = 2$, тогда

$$\Delta_1(\alpha) = \frac{r\alpha \|A\|^2}{\|A\|^2 + \alpha} \tag{21}$$

и при достаточно малых значениях δ из (21) следует, что

$$\overline{\alpha}(\delta) \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что в этом случае

$$\Delta_\delta\left(R_{\overline{\alpha}(\delta)}\right) \le 2^{\frac{1}{3}} \cdot r^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}. \tag{23}$$

Из (20) и (23) следует оптимальность по порядку этого метода.

Теорема 3. Если $p \in (2, \infty)$, то метод $\left\{R_{\overline{\alpha}(\delta)} : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$ неоптимален по порядку для M_r.

Доказательство. Так как в этом случае

$$\Delta_1(\alpha) = \frac{r\|A\|^p \alpha}{\|A\|^2 + \alpha}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что при $\alpha \le \|A\|^2$

$$\Delta_1(\alpha) \ge \frac{r}{2}\|A\|^{p-2} \cdot \alpha, \tag{25}$$

а из (25) следует, что

$$\overline{\alpha}(\delta) \le \|A\|^{\frac{2}{3}(p-2)} \left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{26}$$

Из (26) имеем, что при достаточно малых значения δ

$$\Delta_\delta\left(R_{\overline{\alpha}(\delta)}\right) \geq \frac{1}{2}\|A\|^{\frac{2-p}{3}} \cdot r^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}.$$

Из (20) и (21) следует неоптимальность по порядку метода $\left\{R_{\overline{\alpha}(\delta)} : 0<\delta \leq \delta_0\right\}$ на классе M_r.

Тем самым, теорема доказана.

Теперь перейдем к исследованию поведения метода $\left\{R_{\overline{\alpha}(\delta)} : 0<\delta \leq \delta_0\right\}$ на других классах корректности. Пусть оператор B определен соотношением (2), а

$$G(\sigma) \sim \ln^{-q}\frac{1}{\sigma}, \quad q>0 \tag{27}$$

и $M_r = BS_r$, то класс корректности M_r будет называться логарифмическим классом.

Оценим погрешность метода $\left\{R_{\overline{\alpha}(\delta)} : 0<\delta \leq \delta_0\right\}$, заданного формулами (7) и (10), на логарифмическом классе.

Из формулы (27) и свойств модуля непрерывности обратного оператора [4] следует существование положительных чисел l_1 и l_2 таких, что

$$l_1 \cdot r\ln^{-q}\left(\frac{ar}{\tau}\right) \leq \omega(\tau, r) \leq l_2 \cdot r\ln^{-q}\left(\frac{ar}{\tau}\right). \tag{28}$$

Оценим $\Delta_1(\alpha)$

Теорема 4. Существуют положительные числа l_3 и l_4 такие, что при достаточно малых значениях α

$$l_3 \cdot r\ln^{-q}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \Delta_1(\alpha) \leq l_4 \cdot r\ln^{-q}\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Из формул (2), (27), (7) и (28) следует существование положительных чисел l_5 и l_6 таких, что

$$l_5 r \sup_{\sigma\in[0,\|A\|]}\left[\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right]\ln^{-q}\left(\frac{a}{\sigma}\right) \leq \Delta_1(\alpha) \leq l_6 r \sup_{\sigma\in[0,\|A\|]}\left[\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right]\ln^{-q}\left(\frac{a}{\sigma}\right). \tag{29}$$

Сначала получим оценку снизу. Из (16) имеем $\exists l>0$:

$$\Delta_1(\alpha) \geq lr\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}G(\sigma).$$

А так как $G(\sigma)$ - возрастающая и при $\sigma \to 0$ выполнено (27), то при $\sigma \in \left[0,\|A\|\right]$ имеет место оценка

$$\Delta_1(\alpha) \geq lr\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\ln^{-q}\left(\frac{a}{\sigma}\right). \tag{30}$$

Рассмотрим два случая. Пусть $a=\max\left(1,\|A\|\right)=1$. Тогда

$$\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\ln^{-q}\left(\frac{a}{\sigma}\right) \geq \frac{1}{2^{-q}}\ln^{-q}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \tag{31}$$

во втором случае $a=\max\left(1,\|A\|\right)=\|A\|$. Тогда будет верным соотношение

$$\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\ln^{-q}\left(\frac{a}{\sigma}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\ln\|A\| + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{-q} \geq \frac{1}{2^{-q+1}}\ln^{-q}\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{32}$$

Из (30), (31), (32) имеем оценку снизу

$$\Delta_1(\alpha) \geq \frac{1}{2}l_5 \cdot r\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}.$$

Теперь перейдем к оценке сверху. Введем функцию

$$y(\sigma)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\ln^{-q}\left(\dfrac{a}{\sigma}\right), & \text{при} \quad \sigma>0,\\ 0, & \text{при} \quad \sigma=0.\end{cases} \qquad \textbf{(33)}$$

Функция $y(\sigma)$ непрерывна и неотрицательна по σ на отрезке $\left[0,\|A\|\right]$. Тогда существует значения $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(\alpha)$ такое, что

$$y(\bar{\sigma})=\sup_{\sigma\in\left[0,\|A\|\right]} y(\sigma).$$

Точка $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(\alpha)$ либо совпадает с одним из концов отрезка $\left[0,\|A\|\right]$, либо совпадает с точкой локального максимума.

Предположим, что $y(\sigma)$ достигает наибольшего значения в точке локального максимума $\hat{\sigma}$. Оценим значение $y(\sigma)$ в точке $\hat{\sigma}$

Так как $y(\sigma)$ дифференцируема при любом $\sigma\in\left[0,\|A\|\right]$, то в точке локального максимума $\sigma=\hat{\sigma}$ должно выполняться

$$\frac{2\hat{\sigma}}{\alpha+\hat{\sigma}}=\frac{q}{\hat{\sigma}\ln\dfrac{a}{\sigma}}. \qquad \textbf{(34)}$$

Вторая производная от функции $y(\sigma)$ в точке $\hat{\sigma}$ имеет вид

$$y''(\hat{\sigma})=\frac{4y}{\left(\alpha+\hat{\sigma}^2\right)^2}\left(\hat{\sigma}^2-\alpha\right).$$

Возможны два случая. В первом случае при $\sigma>\sqrt{\alpha}$ эта производная положительна и, следовательно, при $\sigma>\sqrt{\alpha}$ функция $y(\sigma)$ не может достигать локального максимума. Тогда точка локального максимума должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases}\hat{\sigma}\le\sqrt{\alpha}\\ \dfrac{2\hat{\sigma}}{\alpha+\hat{\sigma}}=\dfrac{q}{\hat{\sigma}\ln\dfrac{a}{\sigma}}\end{cases}.$$

Но при $\sigma\le\sqrt{\alpha}$ имеем $\dfrac{a}{\sigma}>\dfrac{1}{\sigma}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ и, следовательно,

$$\ln\frac{a}{\sigma}>\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что при $\sigma\le\sqrt{\alpha}$ будет справедлива оценка

$$\ln^{-q}\frac{a}{\hat{\sigma}}<2^q\ln^{-q}\frac{1}{\alpha},$$

а так как при любом значении σ имеет место неравенство

$$\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}<1,$$

то при $\sigma\le\sqrt{\alpha}$ имеет место следующая оценка:

$$\Delta_1(\alpha)\le l_3 r\sup_{\sigma\in\left[0,\|A\|\right]}\left[\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right]\ln^{-q}\left(\frac{a}{\sigma}\right)\le l_3 r\frac{\alpha}{\alpha+\hat{\sigma}^2}\ln^{-q}\frac{a}{\hat{\sigma}}\le 2^q l_3 r\ln^{-q}\left(\frac{1}{\alpha}\right). \qquad \textbf{(35)}$$

Таким образом, в точке локального максимума будет выполнено требуемое неравенство. Исследуем поведение функции $y(\sigma)$, заданную формулой (33) на концах отрезка $\left[0,\|A\|\right]$.

При $\sigma\to 0$ имеем $y(\sigma)\to 0$. Исследуем случай, когда $\sigma=\bar{\sigma}=\|A\|$. Для этого рассмотрим величину

$$\frac{y(\bar{\sigma})}{\ln^{-q}\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha \ln^{q}\frac{1}{\alpha}}{\left(\alpha + \|A\|^2\right)\ln^{q}\frac{a}{\|A\|}}.$$

Покажем, что это - ограниченная величина. Предположим противное. Однако из того, что $\alpha \to 0$ следует, что $\exists K$ такое, что

$$\left(\alpha + \|A\|^2\right)\ln^{q}\frac{a}{\|A\|} = K. \tag{36}$$

Отсюда при $\alpha \to 0$ имеем

$$\frac{\alpha \ln^{q}\frac{1}{\alpha}}{\left(\alpha + \|A\|^2\right)\ln^{q}\frac{a}{\|A\|}} \to 0, \tag{37}$$

что противоречит (36). Таким образом, из (37) следует, что существует число l_5 такое, что

$$y(\bar{\sigma}) = \frac{\alpha}{\alpha + \bar{\sigma}^2}\ln^{-q}\frac{a}{\bar{\sigma}} \le l_5 r \ln^{-q}\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{38}$$

Из (29), (35), (38) следует утверждение леммы.

Теорема 5. Пусть а и $r \ge 1$, а метод $\left\{R_{\bar{\alpha}(\delta)} : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$ определен формулами (7) и (10). Тогда этот метод оптимален по порядку на классе M_r.

Доказательство. Так как $u_0 \in M_r$, то

$$\left\|u_\delta^\alpha - u_0\right\| \le \Delta_1(\alpha) + \|R_\alpha\| \cdot \delta. \tag{39}$$

Из теоремы 4 и формул (8), (39) следует, что если $u_0 \in M_r$, то

$$\left\|u_\delta^\alpha - u_0\right\| \le l_4 \cdot r \ln^{-q}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}} \cdot \delta. \tag{40}$$

При $\alpha(\delta) = \delta$ из(40)следует, что

$$\left\|u_\delta^{\alpha(\delta)} - u_0\right\| \le l_4 \cdot r \ln^{-q}\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta}. \tag{41}$$

Из (41) следует существование $\delta_1 > 0$ такого, что $\delta_1 < \delta_0$ и для любого $\delta \le \delta_1$

$$\left\|u_\delta^{\alpha(\delta)} - u_0\right\| \le l_7 \cdot r \ln^{-q}\left(\frac{1}{\delta}\right), \tag{42}$$

где l_7 - некоторая константа.

Если a и $r \ge 1$, то из (42) следует, что $\exists\ \delta_2 > 0$ такое, что $\delta_2 \le \delta_1$ и для любого $\delta \le \delta_2$

$$\left\|u_\delta^{\alpha(\delta)} - u_0\right\| \le 2^q l_7 \cdot r \ln^{-q}\left(\frac{ar}{\delta}\right). \tag{43}$$

Из оценки снизу, приведенной в теореме 1, формул (28) и (43) следует оптимальность по порядку метода $\left\{R_{\alpha(\delta)} : 0 < \delta \le \delta_2\right\}$, определяемого (7) при $\alpha(\delta) = \delta$ на классе решений M_r.

Из (12) и (43) следует оптимальность по порядку на логарифмическом классе M_r метода $\left\{R_{\bar{\alpha}(\delta)} : 0 < \delta \le \delta_0\right\}$, определяемого формулами (7) и (10).

Заключение. В работе установлена оптимальность по порядку метода регуляризации Тихонова в зависимости от структуры множеств решения уравнения (1).

Литература

1. Тихонов, А.И. О регуляризации некорректно поставленных задач / А.И. Тихонов // Докл. АН СССР. - 1963. - Т. 153, № 1. - С. 49-52.

2. Лифшиц, И.М. Об определении энергетического спектра Бозе-системы по ее теплоемкости / И.М. Лифшиц // ЖЭТФ. - 1954. - Т. 26, № 5. - С. 551-556.

3. Коршунов, В.А. Определение плотности состояний по термодинамическим функциям / В.А. Коршунов, В.П. Танана// ФММ. - 1979. - Т. 48, № 5. - С. 908-915.

4. Иванов, В.К. О линейных некорректных задачах / В.К. Иванов // Докл. АН СССР. - 1962. - Т. 145, № 2. - С. 270-272.

5. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. - М.: Наука, 1978. - 208 с.

6. Иванов, В.К. Об оценке погрешности при решении некорректных задач / В.К. Иванов, Т.И. Королюк // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1969. - Т. 9, № 1. - С. 30-41.

7. Морозов, В.А. Оптимальная регуляризация некорректных нормально разрешимых операторных уравнений / В.А. Морозов, С.Ф. Гилязов. - М.: Изд-во МГУ, 1982. - 270 с.

8. Танана, В.П. Оптимизация методов решения операторных уравнений / В.П. Танана, М.А. Рекант, СИ. Янченко. - Свердловск.: Уральск, ун-т, 1987. - 200 с.

9. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. - М.: Наука, 1981. - 180 с.

10. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. - М.: Мир, 1975. - 448 с.

Поступила в редакцию 18 мая 2007 г.

ON ACCURACY OF TIKHONOV REGULARIZATION METHOD OF ZEROTH ORDER AT SOME CLASSES OF CORRECTNESS

The article presents the research of accuracy of Tikhonov regularization method of zeroth order. The optimality according to the method at some classes of correctness is proved.

Keywords: solution method of operator equations, regularization method, module of continuity, error of method.

Yaparova Natalia Mikhailovna - Candidate of Science (Physics and Mathematics), associate professor of the Calculus Mathematics department, the Mechanical-Technological Faculty, South Ural State University.

Япарова Наталья Михайловна - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

http://www.math.susu.ac.ru