УДК 517.8

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕРЫ

*М.Т. Таращанский*

**Пусть $\mu$ – неотрицательная, конечная $\sigma$-аддитивная функция множеств, определенная на $\sigma$–алгебре подмножеств $\mathfrak{B}$ непустого множества $\Omega$ и $\lambda$ – ее экстремальное продолжение на алгебру $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Тогда существует такой гомоморфизм $h$ алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{B}/\mu$ классов $\mu$-эквивалентности, что $\lambda(A) = \hat{\mu}(h(A))$ для всякого $A \in \mathfrak{A}$, где $\hat{\mu}$ - фактор мера меры $\mu$. Рассмотрены некоторые приложения этого представления экстремальных продолжений.**

*Ключевые слова: алгебра подмножеств, мера, экстремальное продолжение меры, гомоморфизм.*

**1.** Пусть $\Omega$ – непустое множество, на котором выделена некоторая алгебра подмножеств $\mathfrak{A}$. Всюду далее $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ – подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mu$ – мера (то есть конечная конечно-аддитивная неотрицательная функция множеств), определенная на алгебре $\mathfrak{B}$. Обозначим через $S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ множество всех продолжений меры $\mu$ на алгебру $\mathfrak{A}$ и пусть $\mathrm{ex}S_\mu$ – множество его экстремальных точек, называемых экстремальными продолжениями меры $\mu$.

Известно, что $S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \neq \varnothing$ и если алгебра $\mathfrak{A}$ порождена алгеброй $\mathfrak{B}$ и некоторым непустым подмножеством $A \subset \Omega,\ A \notin \mathfrak{B}$, тогда и $\mathrm{ex}S_\mu \neq \varnothing$ ([1], раздел 3). Соотношение $\mathrm{ex}S_\mu \neq \varnothing$ имеет место и во многих других случаях [1, 2].

Свойства меры $\lambda \in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ изучались в предположении, что алгебра $\mathfrak{A}$ порождена алгеброй $\mathfrak{B}$ и некоторым семейством $\mathfrak{D} \subset 2^\Omega$ [1, 3, 4]. В настоящей работе получены некоторые представления экстремальных продолжений в предположении счетной аддитивности меры $\mu$ в ситуации, когда алгебра $\mathfrak{A}$ порождена алгеброй $\mathfrak{B}$ и некоторой алгеброй подмножеств $\mathfrak{C}$, такой что $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \{\varnothing, \Omega\}$.

**2.** Пусть $\mu$ – мера, определенная на алгебре $\mathfrak{B}$. Всюду в дальнейшем предполагается, что мера $\mu$ является вероятностной, т.е. $\mu(\Omega) = 1$. Мера $\mu$ называется двузначной, если $\mu(\mathfrak{B}) = \{0,1\}$. Символами $\mu_*$ и $\mu^*$ обозначаются, соответственно, внутренняя и внешняя меры, определенные для всякого $A \in 2^\Omega$ как

$$\mu_*(A) = \inf\{\mu(B), B \subset A, B \in \mathfrak{B}\},\ \ \mu^*(A) = \sup\{\mu(B), A \subset B, B \in \mathfrak{B}\}.$$

Для $A, B \in \mathfrak{A}$ символом $A \Delta B$ будет обозначаться симметрическая разность элементов $A, B \in \mathfrak{A}$, т.е. $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, где $\overline{A}$ – дополнение элемента $A$ в алгебре $\mathfrak{A}$. Для алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной алгебрами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ будет использоваться обозначение $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})$.

Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ – подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда алгебра $\mathfrak{B}^*$, порожденная алгеброй $\mathfrak{B}$ и элементом $A \in \mathfrak{A}$, $A \notin \mathfrak{B}$ состоит из всех элементов $A^* \in \mathfrak{A}$, представимых в виде

$$A^* = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap \overline{A}),\ B_1, B_2 \in \mathfrak{B},$$

что вытекает из того, что объединение и дополнение элементов такого вида являются элементами того же вида. Отсюда следует, что если алгебра $\mathfrak{B}$ является $\sigma$-алгеброй, то и алгебра $\mathfrak{B}^*$ также будет $\sigma$-алгеброй.

Пусть $\mu$ – мера, определенная на алгебре $\mathfrak{B}$ и $\lambda$ – некоторое ее продолжение на алгебру $\mathfrak{B}^*$. Если $\mathfrak{B}$ является $\sigma$–алгеброй, а мера $\mu$ $\sigma$-аддитивна, тогда и мера $\lambda$ также $\sigma$-аддитивна ([5], лемма 4).

Пусть $q_\mu$ – канонический гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}/\mu$ классов $\mu$-эквивалентности. Обозначим через $\hat{\mu}$ фактор-меру, определенную на алгебре $\mathfrak{B}/\mu$ равенствами

$$\hat{\mu}(q_\mu(B)) = \mu(B), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Если $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$ – гомоморфизм, продолжающий гомоморфизм $q_\mu$, тогда равенства

$$\lambda(A) = \hat{\mu}(h(A)), \quad A \in \mathfrak{A}$$

определяют некоторое продолжение меры $\mu$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Обозначим через $H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ множество всех таких продолжений. Из ([3], теорема 1) вытекает, что $H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \subset \mathrm{ex}S_\mu$, но эти множества не совпадают, как показывает следующий пример.

**Пример 1.** Пусть $\Omega$ – счетное множество, на котором выделена некоторая алгебра, но не $\sigma$-алгебра подмножеств $\mathfrak{B}$, содержащая все одноточечные подмножества $\Omega$, например, алгебра, порожденная всеми конечными подмножествами $\Omega$. Положим $\mu(\{\omega_n\}) = 2^{-n}$, $n = 1,2,...$ для $\omega_n \in \Omega$. Таким образом, определена мера на $\mathfrak{B}$. Пусть, далее, $C \subset \Omega$, $C \notin \mathfrak{B}$. Определим $\mathfrak{A}$ как алгебру, порожденную $\mathfrak{B}$ и $\tilde{N}$, и положим

$$\lambda(A) = \mu_*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C') \text{ для всякого } A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда $\lambda$ – строго положительная мера на $\mathfrak{A}$ и экстремальное продолжение меры $\mu$ (см. [3], пример 1). Ясно, что не существует такого гомоморфизма $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, что $\lambda(A) = \mu(h(A))$, $A \in \mathfrak{A}$. Более того, в этом примере вообще не существует ни одного гомоморфизма $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, оставляющего неподвижными элементы из алгебры $\mathfrak{B}$. Действительно, если предположить существование такого гомоморфизма $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, что $h(B) = B$ для всякого $B \in \mathfrak{B}$ и положить $\nu(A) = \mu(h(A))$ для $A \in \mathfrak{A}$, то $\nu \in S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ и для $A \in h^{-1}(\varnothing)$ получим $0 = \nu(A) \geq \mu_*(A) > 0$, т.е. $h^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Однако алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не изоморфны, то есть $H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \varnothing$.

Тем не менее, если алгебра $\mathfrak{B}$ является $\sigma$-алгеброй, а мера $\mu$ $\sigma$-аддитивна, тогда будет выполняться равенство $H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \mathrm{ex}S_\mu$.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathfrak{B}$ является $\sigma$-алгеброй, мера $\mu$ $\sigma$-аддитивна и $\lambda \in S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*(1) $\lambda \in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$;*

*(2) для всякого $A \in \mathfrak{A}$ существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $\lambda(A \Delta B) = 0$;*

*(3) существует такой гомоморфизм $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$, что $B \in h(B)$ для всякого $B \in \mathfrak{B}$ и $\lambda(A) = \hat{\mu}(h(A))$ для всякого $A \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Действительно, для всякого $A \in \mathfrak{A}$ существуют такие $B_n \in \mathfrak{B}$, $n \in \mathbb{N}$, что $\lambda(A \Delta B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\lambda(B_k \Delta B_n) \to 0$ при $k,n \to \infty$. Так как $\mu$ – $\sigma$-аддитивна, а $\mathfrak{B}$ является $\sigma$-алгеброй, то существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $\lambda(B \Delta B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда $\lambda(A \Delta B) = 0$, что доказывает требуемую импликацию.

$(2) \Rightarrow (3)$. Для каждого $A \in \mathfrak{A}$ положим $h(A) = q_\mu(B)$, где множество $B \in \mathfrak{B}$ удовлетворяет условию $\lambda(A \Delta B) = 0$. Для проверки корректности этого определения необходимо показать, что элемент, стоящий в правой части, не зависит от выбора множества $B \in \mathfrak{B}$. Другими словами, необходимо показать, что если множества $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ удовлетворяют условиям $\lambda(A \Delta B_i) = 0$, $i = 1,2$, то $\mu(B_1 \Delta B_2) = 0$. Действительно, пусть $\lambda(A \Delta B_i) = 0$, $i = 1,2$. Справедливы соотношения

$$(B_1 \cap \bar{A}) \cup (\bar{B}_1 \cap A) \supseteq (\bar{B}_2 \cap B_1 \cap \bar{A}) \cup (B_2 \cap \bar{B}_1 \cap A),$$

$$(B_2 \cap \bar{A}) \cup (\bar{B}_2 \cap A) \supseteq (B_2 \cap \bar{B}_1 \cap \bar{A}) \cup (\bar{B}_2 \cap B_1 \cap A).$$

Объединяя эти соотношения, получаем $(A \Delta B_1) \cup (A \Delta B_2) \supseteq (B_1 \Delta B_2)$. Отсюда

$$\mu(B_1 \Delta B_2) = \lambda(B_1 \Delta B_2) \leq \lambda(A \Delta B_1) + \lambda(A \Delta B_2) = 0.$$

Таким образом, равенство $h(A)=q_\mu(B)$ однозначно определяет отображение алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}/\mu$, причем $h(B)=q_\mu(B)$ для $B\in\mathfrak{B}$. Осталось показать, что это отображение является гомоморфизмом.

Пусть $A\in\mathfrak{A}$ и $B\in\mathfrak{B}$ таковы, что $\lambda(A\Delta B)=0$. Тогда $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$ и, следовательно, $h(\overline{A})=\overline{h(A)}$. Пусть, далее, $A_1,A_2\in\mathfrak{A}$ и $B_1,B_2\in\mathfrak{B}$ таковы, что $\lambda(A_1\Delta B_1)=0$ и $\lambda(A_2\Delta B_2)=0$. Тогда

$$(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)=\left((A_1\cup A_2)\cap(\overline{B}_1\cap\overline{B}_2)\right)\cup\left((B_1\cup B_2)\cap(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)\right).$$

Поскольку

$$(A_1\cup A_2)\cap(\overline{B}_1\cap\overline{B}_2)\subseteq(A_1\cap\overline{B}_1)\cup(A_2\cap\overline{B}_2),$$
$$(B_1\cup B_2)\cap(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)\subseteq(B_1\cap\overline{A}_1)\cup(B_2\cap\overline{A}_2),$$

то $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subseteq(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$ и, значит,

$$\lambda\left((A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\right)\le\lambda(A_1\Delta B_1)+\lambda(A_2\Delta B_2)=0.$$

Отсюда следует, что $h(A_1\cup A_2)=h(A_1)\cup h(A_2)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Эта импликация непосредственно следует из ([3], теорема 1) поскольку для всякого $A\in\mathfrak{A}$ множество $B\in q_\mu^{-1}(h(A))$ удовлетворяет соотношению $\lambda(A\Delta B)=0$. Теорема доказана.

Следующий результат характеризует экстремальные продолжения $\lambda^*\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ максимальностью идеала $\lambda^{*^{-1}}(0)$ множеств меры нуль. (В несколько иной ситуации эта характеризация была получена в [4].) Более точно, введем отношение предпорядка на множестве $S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, полагая $\lambda_1\gg\lambda_2$ если $\lambda_1^{-1}(0)\subseteq\lambda_2^{-1}(0)$. Символом $S_\mu^*$ будем обозначать множество минимальных элементов относительно введенного порядка.

**Следствие 1.** *Пусть $\mathfrak{B}$ является $\sigma$-алгеброй, мера $\mu$ $\sigma$-аддитивна и $\lambda\in S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Тогда*

*(i) найдется такая мера $\lambda^*\in H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\subseteq\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, что $\lambda^{*^{-1}}(0)\supseteq\lambda^{-1}(0)$;*

*(ii) если $\lambda^*\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ и $\lambda^{*^{-1}}(0)\subseteq\lambda^{-1}(0)$ тогда $\lambda^*=\lambda$;*

*(iii) $S_\mu^*=\mathrm{ex}S_\mu$, причем равенство понимается в том смысле, что либо оба множества пусты, либо, если хотя бы одно из них не пусто, тогда не пусто и другое и эти множества совпадают.*

Доказательство. (*i*). Для всякого $\hat{B}\in\mathfrak{B}/\mu$ положим $i(\hat{B})=q_\lambda(B)$ для некоторого $B\in\hat{B}$. Поскольку $\lambda^{-1}(0)\supseteq\mu^{-1}(0)$, то $i(\hat{B})$ не зависит от выбора $B\in\hat{B}$, и значит, таким образом, корректно определено отображение алгебры $\mathfrak{B}/\mu$ в алгебру $\mathfrak{A}/\lambda$. Ясно, что ядро этого отображения пусто. Кроме того, если $B_1\in\hat{B}$ и $B_2\in\overline{\hat{B}}$ для некоторого $\hat{B}\in\mathfrak{B}/\mu$, то $B_1\cap B_2\in\mu^{-1}(0)$ и $\Omega\setminus(B_1\cup B_2)\in\mu^{-1}(0)$. Значит, $i(\overline{\hat{B}})=\overline{i(\hat{B})}$. Аналогично проверяется равенство $i(\hat{B}_1\cup\hat{B}_2)=i(\hat{B}_1)\cup i(\hat{B}_2)$ для $\hat{B}_1,\hat{B}_2\in\mathfrak{B}/\mu$. Следовательно, $i$ – изоморфизм. В условиях следствия алгебра $\mathfrak{B}/\mu$ является полной булевой алгеброй. Согласно ([6], теорема 33.1) изоморфизм $i^{-1}$ может быть продолжен до гомоморфизма $h:\mathfrak{A}/\lambda\to\mathfrak{B}/\mu$. Поэтому в силу предыдущей теоремы мера $\lambda^*$, определенная равенствами

$$\lambda^*(A)=\hat{\mu}(h(q_\lambda(A))),\ \ A\in\mathfrak{A},$$

является экстремальным продолжением меры $\mu$. Ясно, что $\lambda^{*^{-1}}(0)\supseteq\lambda^{-1}(0)$.

(*ii*). Пусть теперь $\lambda^*\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ и $\lambda^{*^{-1}}(0)\subseteq\lambda^{-1}(0)$. Согласно теореме 1, для всякого $A\in\mathfrak{A}$ найдется такое $B\in\mathfrak{B}$, что $\lambda^*(A\Delta B)=0$. Отсюда следует, что $\lambda^*(A\cap\overline{B})=\lambda^*(\overline{A}\cap B)=0$. Тогда, в силу предположения, имеем $\lambda(A\Delta B)=0$ и потому $\lambda(A\cap\bar{B})=\lambda(\bar{A}\cap B)=0$. Значит, справедливы равенства

$$\lambda^*(B)=\lambda^*(A\cap B)+\lambda^*(\bar{A}\cap B)=\lambda^*(A\cap B),$$
$$\lambda(B)=\lambda(A\cap B)+\lambda(\bar{A}\cap B)=\lambda(A\cap B).$$

Поскольку $\lambda^*(B)=\lambda(B)$ для всякого $B\in\mathfrak{B}$, то $\lambda^*(A\cap B)=\lambda(A\cap B)$. Отсюда для всякого $A\in\mathfrak{A}$ получаем

$$\lambda^*(A)=\lambda^*(A\cap B)+\lambda^*(A\cap\bar{B})=\lambda^*(A\cap B)=\lambda(A\cap B)=\lambda(A\cap B)+\lambda(A\cap\bar{B})=\lambda(A),$$

что завершает доказательство.

($iii$). Пусть $\lambda\in S_\mu^*$. В силу утверждения ($i$) существует такая мера $\lambda^*\in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ такая что $\lambda^{*^{-1}}(0)\supseteq\lambda^{-1}(0)$. Из минимальности меры $\lambda$ следует тогда, что $\lambda^{*^{-1}}(0)=\lambda^{-1}(0)$. Согласно ($ii$) это означает, что $\lambda^*=\lambda$. С другой стороны, если $\lambda^*\in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ и для некоторой меры $\lambda\in S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ выполняется соотношение $\lambda^{*^{-1}}(0)\subseteq\lambda^{-1}(0)$, то согласно ($ii$) $\lambda^*=\lambda$, т.е. $\lambda^*\in S_\mu^*$.

**Замечания.** (1) Утверждение ($i$) остается в силе и без дополнительного предположения о $\sigma$-аддитивности меры $\mu$ если мера $\mu$ конечнозначна (в частности, двузначна), т.е. когда множество $\{\mu(B);\ B\in\mathfrak{B}\}$ – конечно, поскольку тогда алгебра $\mathfrak{B}/\mu$ является полной булевой алгеброй и в случае конечной аддитивности меры $\mu$.

(2) Для двузначной меры $\mu$ импликация (1)$\Rightarrow$(2) теоремы 1 остается справедливой и без предположения о $\sigma$-аддитивности меры $\mu$. Действительно, пусть $\nu\in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. В силу предыдущего замечания, из следствия 1($i$) вытекает существование такой меры $\lambda^*\in H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, что $\lambda^{*^{-1}}(0)\supseteq\nu^{-1}(0)$. Согласно утверждению ($ii$) следствия 1 имеем $\lambda^*=\nu$. Это означает, что существует такой гомоморфизм $h:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}/\mu$, что $\nu(A)=\hat{\mu}(h(A))$ для всякого $A\in\mathfrak{A}$. Ясно, что для всякого $A\in\mathfrak{A}$ множество $B\in q_\mu^{-1}(h(A))$ удовлетворяет соотношению $\nu(A\Delta B)=0$. Аналогичным образом можно показать, что импликация (1)$\Rightarrow$(2) теоремы 1 верна для всякой меры $\mu$ такой, что алгебра $\mathfrak{B}/\mu$ является полной булевой алгеброй.

**3.** Пусть $\lambda^*\in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ и $\mathfrak{C}$ – алгебра, порожденная идеалом $\lambda^{*^{-1}}(0)$. Тогда мера $\lambda_0=\lambda^*|_{\mathfrak{C}}$, представляющая собой сужение меры $\lambda^*$ на алгебру $\mathfrak{C}$, является двузначной мерой. Согласно теореме 1 для всякого $A\in\mathfrak{A}$ найдется такое $B\in\mathfrak{B}$, что $C=A\Delta B\in\lambda^{*^{-1}}(0)$, т.е. всякое $A\in\mathfrak{A}$ может быть представлено в виде $A=B\Delta C,\ B\in\mathfrak{B},\ C\in\mathfrak{C}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{A}=a(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})$. Меры $\mu$ и $\lambda_0$ согласованы в том смысле, что $\lambda_0\big|_{\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}}=\mu\big|_{\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}}$, а мера $\lambda^*$ является совместным продолжением мер $\mu$ и $\lambda_0$. Возможно ли охарактеризовать экстремальные продолжения меры $\mu$ как совместные продолжения меры $\mu$ и некоторой двузначной меры $\lambda_0$, определенной на подалгебре $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{A}$, такой что $\mathfrak{A}=a(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})$? В этом разделе будет дан ответ на этот вопрос в том случае, когда $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}=\{\varnothing,\Omega\}$. Согласованность мер в такой ситуации означает что $\mu(\Omega)=\lambda_0(\Omega)$.

Начнем с рассмотрения следующего частного случая. Пусть $(\Omega,\mathfrak{A})$ и $(\Theta,\mathfrak{B})$ – два непустых множества с выделенными алгебрами подмножеств; $\pi_\Omega$ и $\pi_\Theta$ – канонические проекции декартова произведения $\Omega\times\Theta$ на $\Omega$ и $\Theta$, соответственно; $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ – булево произведение алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, определяемое как минимальная алгебра на множестве $\Omega\times\Theta$, содержащая $\pi_\Omega^{-1}(\mathfrak{A})$ и $\pi_\Theta^{-1}(\mathfrak{B})$.

Пусть, далее, $\mu$ – мера на алгебре $\mathfrak{A}$ и $\nu$ – мера на алгебре $\mathfrak{B}$. Существует и притом единственная мера $\mu\otimes\nu$, определенная на алгебре $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ и удовлетворяющая для всех $A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B}$ соотношению

$$(\mu\otimes\nu)(\pi_\Omega^{-1}(A)\cap\pi_\Theta^{-1}(B))=\mu(A)\cdot\nu(B).$$

Отождествляя алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ с их изоморфными образами в алгебре $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, получаем, что какова бы ни была мера $\nu$ на алгебре $\mathfrak{B}$, мера $\mu\otimes\nu$ является продолжением меры $\mu$, но не все продолжения меры $\mu$ на алгебру $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ исчерпываются мерами такого вида, как показывает следующий простой пример.

**Пример 2.** Пусть $\Omega=\Theta=\{a,b\}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ и являются алгебрами всех подмножеств, и $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=1/2$. Определим меру $\lambda$ на алгебре $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, положив $\lambda(\{a,a\})=\lambda(\{b,b\})=\frac{1}{2}\alpha$, $\lambda(\{a,b\})=\lambda(\{b,a\})=\frac{1}{2}(1-\alpha)$, $\alpha\in(0,1)$. Тогда $\lambda$ продолжает $\mu$, но не существует такой меры $\nu$ на алгебре $\mathfrak{B}$, чтобы $\lambda=\mu\otimes\nu$.

Пусть $\nu$ – двузначная (т. е. принимающая значения 0 и 1) мера на $\mathfrak{B}$, $\lambda=\mu\otimes\nu$ и $\mathfrak{I}=\nu^{-1}(0)$. Для всякого $A\in\mathfrak{A}$ положим

$$h(\pi_\Omega^{-1}(A)\cap\pi_\Theta^{-1}(B))=\begin{cases}\varnothing, & B\in\mathfrak{I};\\ q_\mu(A), & B\notin\mathfrak{I}.\end{cases}$$

Это отображение может быть продолжено до гомоморфизма $h:\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}/\mu$ (см., например, [6], теорема 12.2). Тогда для всякого $C\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ справедливо соотношение $\lambda(C)=\hat{\mu}(h(C))$. Согласно теореме 1 это означает, что $\lambda\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mathfrak{A})$.

Естественно возникает вопрос о возможности представления всякого экстремального продолжения меры $\mu$ в виде $\mu\otimes\nu$ для некоторой двузначной меры $\nu$ на алгебре $\mathfrak{B}$.

**Предложение 1.** *Пусть $\mathfrak{A}$ является $\sigma$-алгеброй, мера $\mu$ $\sigma$-аддитивна и $\lambda\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mathfrak{A})$. Тогда найдется такая двузначная мера $\nu$ на алгебре $\mathfrak{B}$, что $\lambda=\mu\otimes\nu$.*

Доказательство. Будем отождествлять алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ с их изоморфными образами в $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. Поскольку мера $\lambda$ является экстремальным продолжением, то в силу теоремы 1 существует такой гомоморфизм $h:\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}/\mu$, что $\lambda(C)=\hat{\mu}(h(C))$ для каждого $C\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. Значит $\lambda^{-1}(0)=h^{-1}(\varnothing)$ и $h^{-1}(\varnothing)\cap\mathfrak{A}=\mu^{-1}(0)$. Положим $\mathfrak{I}_0=\lambda^{-1}(0)\cap\mathfrak{B}$ и пусть $\mathfrak{I}$ – некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{B}$, такой что $\mathfrak{I}_0\subset\mathfrak{I}$. Определим двузначную меру $\nu$ на алгебре $\mathfrak{B}$, соответствующую этому идеалу и положим $\lambda^*=\mu\otimes\nu$.

При таком определении меры $\lambda^*$ справедливо отношение $\lambda^{-1}(0)\subset\lambda^{*^{-1}}(0)$. Действительно, поскольку $A\cap B\neq\varnothing$ для произвольных $A\in\mathfrak{A}$ и $B\in\mathfrak{B}$, то $h(A\cap B)=h(A)\cap h(B)=\varnothing$ только если либо $h(A)=\varnothing$, либо $h(B)=\varnothing$. Поэтому $\lambda(A\cap B)=0$ для некоторых $A\in\mathfrak{A}$ и $B\in\mathfrak{B}$, только тогда, когда либо $\lambda(A)=0$, либо $\lambda(B)=0$. Если $\lambda(A)=0$, тогда и $\mu(A)=0$. Поэтому $\lambda^*(A\cap B)=\mu(A)\nu(B)=0$. Если $\lambda(B)=0$, то в силу определения меры $\nu$, имеем $\nu(B)=0$. Поэтому и в этом случае получаем $\lambda^*(A\cap B)=\mu(A)\nu(B)=0$.

Покажем, что справедливо и обратное включение. Пусть $C\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ и $\lambda^*(C)=0$. Согласно предыдущей теореме найдется такое $A\in\mathfrak{A}$, что $\lambda(A\Delta C)=0$, а, значит, в силу предыдущего рассуждения, и $\lambda^*(A\Delta C)=0$. Тогда из равенства $0=\lambda^*(A\Delta C)=\lambda^*(A\cap\bar{C})+\lambda^*(\bar{A}\cap C)$ и соотношения $\lambda^*(\bar{A}\cap C)\le\lambda^*(C)=0$ следует, что $\lambda^*(A\cap\bar{C})=0$. Теперь из равенства $\lambda^*(A)=\lambda^*(A\cap C)+\lambda^*(A\cap\bar{C})$ и соотношения $\lambda^*(A\cap C)\le\lambda^*(C)=0$ следует, что $\lambda^*(A)=0$.

Поскольку $\lambda^*(A)=\lambda(A)=\mu(A)$, то $\lambda(A\cap C)\le\lambda(A)=0$. Из равенства $0=\lambda(A\Delta C)=\lambda(A\cap\bar{C})+\lambda(\bar{A}\cap C)$ получаем соотношение $\lambda(\bar{A}\cap C)=0$. Поэтому $\lambda(C)=\lambda(A\cap C)+\lambda(\bar{A}\cap C)=0$. То есть $\mathfrak{I}_0=\mathfrak{I}$.

Это означает, что сужение меры $\lambda$ на алгебру $\mathfrak{B}$ совпадает с мерой $\nu$ и потому меры $\lambda$ и $\lambda^*$ совпадают на подалгебрах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Осталось показать, что $\lambda=\lambda^*$.

Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$. Если $\nu(B)=0$, тогда $\lambda(A\cap B)\le\lambda(B)=\nu(B)=0$. Значит, в этом случае $\lambda(A\cap B)=\mu(A)\cdot\nu(B)$. Если $\nu(B)=1$, тогда $\lambda(A\cap\bar B)\le\lambda(\bar B)=\nu(\bar B)=0$ и потому

$$\mu(A)=\lambda(A)=\lambda(A\cap B)+\lambda(A\cap\bar B)=\lambda(A\cap B).$$

Таким образом, и в этом случае получаем, что $\lambda(A\cap B)=\mu(A)\cdot\nu(B)$. Следовательно, $\lambda=\lambda^*$. Предложение доказано.

Пусть теперь алгебра $\mathfrak{A}$ порождена алгеброй $\mathfrak{B}$ и некоторой алгеброй подмножеств $\mathfrak{C}$, такой что $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}=\{\varnothing,\Omega\}$, $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{C}$ – минимальная алгебра на $\Omega\times\Omega$, содержащая $\pi_1^{-1}(\mathfrak{B})$ и $\pi_2^{-1}(\mathfrak{C})$, где $\pi_1$ и $\pi_2$ – канонические проекции декартова произведения $\Omega\times\Omega$ на первый и второй сомножители, соответственно. Положим $\gamma(\pi_1^{-1}(B)\cap\pi_2^{-1}(C))=B\cap C$ для всяких $B\in\mathfrak{B}$ и $C\in\mathfrak{C}$. Множества вида $\pi_1^{-1}(B)\cap\pi_2^{-1}(C)$ порождают алгебру $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{C}$ и поскольку из соотношения $\pi_1^{-1}(B)\cap\pi_2^{-1}(C)=\varnothing$ вытекает что либо $\pi_1^{-1}(B)=\varnothing$, либо $\pi_2^{-1}(C)=\varnothing$, то это означает, что $B\cap C=\varnothing$. Согласно ([6], теорема 12.4), отображение $\gamma$ может быть продолжено до гомоморфизма алгебры $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{C}$ на алгебру $\mathfrak{A}=a(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ порождена объединением алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Тогда существует такой гомоморфизм $\gamma:\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}$, что $\gamma(\pi_1^{-1}(B))=B$ для всякого $B\in\mathfrak{B}$ и $\gamma(\pi_2^{-1}(C))=C$ для всякого $C\in\mathfrak{C}$.*

**Теорема 2.** *Пусть $\mathfrak{B}$ является $\sigma$-алгеброй, $\mathfrak{A}=a(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})$ и мера $\mu$ $\sigma$-аддитивна. Тогда $\lambda\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ в том и только в том случае, кода существует такая двузначная мера $\nu$ на алгебре $\mathfrak{C}$, что $\lambda$ является совместным продолжением мер $\mu$ и $\nu$.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde\lambda$ меру на алгебре $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{C}$, определенную равенствами $\tilde\lambda(A)=\lambda(\gamma(A))$. Поскольку $\lambda\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, тогда в силу теоремы 1 существует такой гомоморфизм $h:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}/\mu$, что $B\in h(B)$ для всякого $B\in\mathfrak{B}$ и $\lambda(A)=\hat\mu(h(A))$ для всякого $A\in\mathfrak{A}$. Тогда $\tilde\lambda(A)=\lambda(\gamma(A))=\hat\mu(h(\gamma(A)))$. Поэтому в силу теоремы 1 справедливо соотношение $\tilde\lambda\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{C},\mathfrak{B})$. Согласно предложению 1 существует такая двузначная мера $\nu$ на алгебре $\mathfrak{C}$, что $(\mu\otimes\nu)(A)=\tilde\lambda(A)$ для всякого $A\in\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{C}$.

Для всякого $C\in\mathfrak{C}$ имеем

$$\lambda(C)=\lambda(\gamma(\pi_2^{-1}(C))=\tilde\lambda(\pi_2^{-1}(C))=(\mu\otimes\nu)(\pi_2^{-1}(C))=\nu(C).$$

Это означает, что мера $\lambda$ является совместным продолжением мер $\mu$ и $\nu$.

С другой стороны, пусть $\lambda$ является совместным продолжением меры $\mu$ и некоторой двузначной меры $\nu$, определенной на алгебре $\mathfrak{C}$. Согласно утверждению (*i*) следствия 1 найдется такая мера $\lambda^*\in\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, что ${\lambda^*}^{-1}(0)\supseteq\lambda^{-1}(0)$. Обозначим через $\mathfrak{J}$ идеал в алгебре $\mathfrak{A}$ всех таких $A\in\mathfrak{A}$, что найдется такое $C\in\nu^{-1}(0)$ и $A\subseteq C$. Заметим, что $\lambda^*(A)=\lambda(A)=0$ для всякого $A\in\mathfrak{J}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}_0$ всех элементов вида $B\Delta C$, $B\in\mathfrak{B}$, $C\in\mathfrak{J}$. Поскольку $\overline{B\Delta C}=\bar B\Delta C$, это множество замкнуто относительно операции дополнения. Кроме того для $B_1,B_2\in\mathfrak{B}$ и $C_1,C_2\in\mathfrak{J}$ имеем

$$(B_1\Delta C_1)\cap(B_2\Delta C_2)=(B_1\cap B_2)\Delta(C_1\cap B_2)\Delta(B_1\cap C_2)\Delta(C_1\cap C_2)=$$
$$=(B_1\cap B_2)\Delta C_1'\Delta C_2'\Delta(C_1\cap C_2),\quad C_1'=(C_1\cap B_2),\quad C_2'=(B_1\cap C_2).$$

Так как $C_1'=(C_1\cap B_2)\subseteq C_1$ и $C_2'=(B_1\cap C_2)\subseteq C_2$, то $C_1'\Delta C_2'\subseteq C_1\cup C_2\in\mathfrak{J}$. Поэтому

$$C_1'\Delta C_2'\Delta(C_1\cap C_2)\subseteq(C_1\cup C_2)\Delta(C_1\cap C_2)\subseteq(C_1\cup C_2)\in\mathfrak{J}.$$

Следовательно, множество $\mathfrak{A}_0$ замкнуто относительно операции объединения и потому является алгеброй, которая содержит алгебру $\mathfrak{B}$ и, в силу максимальности в $\mathfrak{C}$ идеала $\nu^{-1}(0)$, алгебру $\mathfrak{C}$, т.е. $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$. Другими словами, всякий элемент $A \in \mathfrak{A}$ может быть представлен в виде $A = B\Delta C,\ B \in \mathfrak{B},\ C \in \mathfrak{I}$.

Пусть $A \in \lambda^{*^{-1}}(0)$ и $A = B\Delta C,\ B \in \mathfrak{B},\ C \in \mathfrak{I}$. Поскольку $\lambda^*(C) = 0$ в силу определения идеала $\mathfrak{I}$, то отсюда следует, что

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \setminus C) + \lambda^*(B \cap C) \le \lambda^*(B\Delta C) + \lambda^*(C) = 0 .$$

Тогда

$$\lambda(A) = \lambda(B\Delta C) \le \lambda(B \cup C) \le \lambda(B) + \lambda(C) = \lambda^*(B) + \lambda(C) = 0 .$$

Таким образом, $\lambda^{*^{-1}}(0) = \lambda^{-1}(0)$. Согласно утверждению (*ii*) следствия 1 получаем отсюда что $\lambda = \lambda^* \in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Теорема доказана.

**Литература**


1. Lipecki, Z. On compactness and extreme points of some sets of quasi-measures and measures / Z. Lipecki // Manuscr. Math. – 1995. – V. 86. – P. 349–365.
2. Lipecki, Z. On extreme extensions of quasi-measures / Z. Lipecki // Arch. Math. – 1992. – V. 58. – P. 288–293.
3. Plachky, D. Extremal and monogenic additive set functions / D. Plachky // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 54. – P. 193–196.
4. Bierlein, D. On the extremality of measure extensions / D. Bierlein, W.J.A. Stich // Manuscr. Math. – 1989. – V. 63. – P. 89–97.
5. Lipecki, Z. On unique extensions of positive additive set functions / Z. Lipecki // Arch. Math. (Basel) – 1983. – V. 41. – P. 71–79.
6. Сикорский, Р. Булевы алгебры / Р. Сикорский. – М.: Мир, 1969. – 376 с.


***Поступила в редакцию 21 января 2008 г.***

## EXTREME EXTENSIONS OF MEASURES

If $\mu$ is non-negative, finite $\sigma$-additive function of sets defined on $\sigma$-algebra of sets $\mathfrak{B}$ of non-empty set, $\Omega$ and $\lambda$ is its extreme extension on algebra $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, then exists such homomorphism $h$ of algebra $\mathfrak{A}$ on algebra $\mathfrak{B}/\mu$ of $\mu$-equivalence classes that $\lambda(A) = \hat{\mu}(h(A))$ for every $A \in \mathfrak{A}$, where $\hat{\mu}$ is the quotient-measure of measure $\mu$. Some applications of this representation of extreme extensions are considered.

*Keywords: algebra of subsets, measure, extreme extension of a measure, homomorphism.*
*Mathematics Subject Classification (2000): 28A12 – 28A33 – 28A60*

**Tarashchanskii Mark Tankumovich** – Associate Professor, Cand. Sc. (Engineering), Department of Mathematical Analysis, East Ukrainian National University, Lugansk, Ukraine.

**Таращанский Марк Танкумович** – доцент, кандидат технических наук, кафедра математического анализа, Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля, Луганск, Украина.

e-mail: markt@net.lg.ua