

Теория расчета строительных конструкций

УДК 624.04 + 624.07

ОСНОВЫ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

А. В. Ермакова

BASIS OF ADDITIONAL FINITE ELEMENT METHOD FOR LIMIT STATE ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

A.V. Ermakova

В статье даны основные положения разрабатываемого метода дополнительных конечных элементов (МДКЭ), предназначенного для расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям. Показано решение некоторых проблем их нелинейного расчета данным методом. Эти проблемы были изложены в докладе «Актуальные проблемы нелинейного расчета железобетонных конструкций», сделанного автором на заседании Научного совета Российской академии архитектуры и строительных наук «Программные средства в строительстве и архитектуре», которое состоялось 26 ноября 2008 г.

Ключевые слова: метод дополнительных конечных элементов, предельное состояние, идеальная модель разрушения, дополнительный конечный элемент, дополнительная расчетная схема.

The paper presents the main states of the developed Additional Finite Element Method (AFEM) destined for design of reinforced concrete structures at limit states. The paper shows the way of solving of some problems in nonlinear design. These problems were included in the report "Actual problems of nonlinear design of reinforced concrete structures" delivered by the author at the conference of scientific council of Russian Academy of Architecture and Civil Engineering "Software for Architecture and Civil Engineering". 26 November 2008.

Keywords: additional finite element method, limit state, ideal failure model, additional finite element, additional design diagram.

Введение. Разрабатываемый метод дополнительных конечных элементов (МДКЭ) является логическим продолжением, развитием и обобщением проведенных в течение многих лет исследований по применению метода конечных элементов к расчету железобетонных конструкций с учетом реальных свойств железобетона, выполненных под руководством д-ра техн. наук, проф., заслуженного строителя РСФСР Оатула А.А. (1918-1996) [1]. К этим исследованиям относятся работы кандидатов технических наук Карякина А.А., Сониной С.А., Бессонова Б.Ф. и автора этой статьи. Поэтому Оатула А.А. следует считать инициатором работы по созданию и этого метода.

Основные проблемы нелинейного расчета. Нормы проектирования требуют проводить расчет конструкций по предельным состояниям с учетом их нелинейности [2] на основе использования метода предельного равновесия [3]. Реализация такого расчета возможна только при условии учета

всех физически нелинейных свойств, проявляемых этой конструкцией к моменту достижения ею предельного состояния, т.е. при учете степени влияния и времени появления каждого отдельного нелинейного свойства.

После анализа трудностей нелинейного расчета конструкций и оценки возможностей подключения метода предельного равновесия к операциям широко используемого метода конечных элементов (МКЭ) можно выделить три основные проблемы, решение которых должно быть осуществлено в первую очередь:

1) описание расчетной схемы представленной в конечных элементах рассчитываемой конструкции в соответствии с достигнутой степенью ее предельного состояния, т.е. необходимость обеспечения постепенного изменения ее жесткостных характеристик из-за проявления нелинейных свойств на каждой итерации каждого шага нагружения.

2) процедура введения в каждый КЭ постепенно меняющихся физически нелинейных свойств по мере достижения его предельного состояния, включая и следующие случаи:

а) учет работы конкретного конструктивного материала КЭ, например, для железобетонных конструкций - это бетон и арматура;

б) постепенное проявление различных нелинейных свойств по мере достижения предельного состояния отдельного конечного элемента;

в) переход от одного напряженно-деформированного состояния к другому, например, при образовании трещины или появлении остаточных деформаций после разгрузки;

г) включение механизма постепенного разрушения вплоть до полного исключения КЭ из работы всей конструкции.

3) построение и развитие итерационного процесса при решении системы линейных уравнений для всей конструкции и для отдельного КЭ на основе возможностей МКЭ для решения «нелинейных задач при выполнении условий:

а) постепенное превращение матрицы жесткости конструкции с нелинейными свойствами в ее матрицу жесткости в состоянии предельного равновесия;

б) постепенный учет каждого из нелинейных свойств, проявляемых конечными элементами к моменту их разрушения, для их исключения из работы всей конструкции по одному при пошаговом расчете по методу предельного равновесия.

Эти три взаимосвязанные проблемы определяют ход решения задачи и требуют решения сопутствующих задач.

Общая характеристика МДКЭ. Разрабатываемый метод дополнительных конечных элементов (МДКЭ) представляет собой вариант МКЭ, предназначенный для расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям [4, 5]. Для решения трех упомянутых проблем МДКЭ подключает элементы расчета по методу предельного равновесия и элементы метода упругих решений (дополнительных нагрузок) [6].

МДКЭ предлагает использовать дополнительные конечные элементы (ДКЭ) для постепенного превращения конечных элементов с линейными свойствами в такие же элементы, но с нелинейными свойствами, соответствующими достигнутой стадии предельного состояния конструкции. Введение таких элементов позволяет решить три основные проблемы расчета конструкций.

Идеальная модель разрушения. Для описания конструкции, работающей в стадии предельного состояния, используется понятие идеальной модели разрушения, которая представляет собой расчетную схему этой конструкции в предельном состоянии. Идеальная модель разрушения необходима для моделирования предельного состояния конструкции при использовании МКЭ.

От исходной расчетной схемы идеальная модель разрушения отличается наличием КЭ в пре-

дельном состоянии, нарушением определенных связей между некоторыми КЭ и другими изменениями, моделирующими предельное состояние рассчитываемой конструкции.

Дополнительная расчетная схема. Расчетная схема конструкции на каждом этапе формируется из двух: исходной расчетной схемы из основных КЭ с линейными свойствами и дополнительной. Дополнительная расчетная схема постепенно изменяет исходную, превращая ее в ту, что соответствует достигнутой стадии предельного состояния конструкции. Схема ее действия такова: идеальная модель разрушения (расчетная схема конструкции в предельном состоянии) = исходная расчетная схема из линейных конечных элементов + дополнительная расчетная схема для учета предельного состояния конструкции.

Такой принцип действия обусловлен требованиями метода упругих решений, согласно которому должно выполняться следующее соотношение:

$$K_{lim} = K + \Delta K_{lim}, \quad (1)$$

где K_{lim} - матрица жесткости конструкции в предельном состоянии (состоянии предельного равновесия), т.е. матрица жесткости идеальной модели разрушения этой конструкции; K - матрица жесткости конструкции, построенная на основе исходной расчетной схемы из КЭ с линейными свойствами; ΔK_{lim} - матрица жесткости дополнительной расчетной схемы этой конструкции, связанная с проявлением нелинейных свойств в конструкции в предельном состоянии.

Дополнительная расчетная схема формируется из нескольких дополнительных расчетных схем, каждая из которых превращает исходную расчетную схему с линейными свойствами в такую же схему, но с нелинейными свойствами, соответствующими достигнутой стадии предельного состояния данной конструкции.

Эти нелинейные свойства имеют различную природу и характер проявления, поэтому дополнительная матрица жесткости ΔK_{lim} также должна формироваться в зависимости от наблюдаемых в момент наступления предельного состояния физических нелинейностей:

$$\Delta K_{lim} = \sum_{i=1}^n \Delta K_{nonl,i}, \quad (2)$$

где n - число видов нелинейных свойств данной конструкции в предельном состоянии; $\Delta K_{nonl,i}$ - дополнительная матрица жесткости конструкции, учитывающая проявление ее i -го нелинейного свойства в момент наступления предельного состояния.

Дополнительные конечные элементы (ДКЭ). Дополнительная расчетная схема формируется из дополнительных конечных элементов (ДКЭ), каждый из которых превращает исходный КЭ с линейными свойствами в такой же элемент, но с нелинейными свойствами, соответствующими достигнутой стадии предельного состояния данного

КЭ. Схемы действия и формирования свойств каждого ДКЭ аналогичны тем, что используются для дополнительных расчетных схем, но касаются каждого КЭ, входящего в расчетную схему.

В том случае, если основные КЭ проходят несколько этапов на пути достижения ими предельных состояний, то дополнительная расчетная схема должна формироваться также из нескольких, каждая из которых объединяет ДКЭ, соответствующие каждому из этих этапов.

Каждый КЭ, входящий в расчетную схему, рассматривается как отдельная маленькая конструкция простой формы, имеющая свое предельное состояние, определенное заданными условиями нагружения. Для каждого типа КЭ таких предельных состояний может быть несколько. Это означает, что для реализации расчета по предельным состояниям предварительно необходимо проведение специального исследования каждого типа КЭ и определения числа предельных состояний, их вида и способа описания каждого из них.

Так, например, треугольный бетонный КЭ балки-стенки [7, 8] имеет два вида предельных состояний: на сжатие и растяжение. Причем работа данного КЭ по каждому из этих предельных состояний имеет свои особенности. При работе на сжатие такой элемент проходит два этапа: 1) пла-

стическая работа до достижения критерия работы бетона на сжатие; 2) полное исключение из нее, т.к. после разрушения от сжатия бетон перестает существовать как конструктивный материал. При работе на растяжение этот элемент имеет уже четыре стадии: 1) пластическая работа до образования трещины; 2) частичная разгрузка после образования трещины, т.е. превращение целого КЭ в КЭ с трещиной и переход от двухосного напряженного состояния к одноосному; 3) частичная пластическая работа при повторном нагружении в условиях одноосного напряженного состояния; 4) полное исключение из работы после достижения критерия разрушения в условиях повторного одноосного напряженного состояния.

В таблице дан пример формирования свойств соответствующего бетонного треугольного ДКЭ балки-стенки для учета каждого из двух видов его предельных состояний. Основной характеристикой ДКЭ является его матрица жесткости, процесс получения которой дан в [9].

Если исходная расчетная схема состоит из треугольных бетонных КЭ, то дополнительная схема формируется из четырех дополнительных расчетных схем, каждая из которых формируется из бетонных ДКЭ балки-стенки, отражающих соответствующую стадию работы основного КЭ (рис. 1).

Формирование свойств дополнительного бетонного треугольного конечного элемента балки-стенки для учета предельного состояния

№ п/п	Этап работы основного бетонного конечного элемента	Соответствующий дополнительный КЭ (ДКЭ)	Учет при работе на предельное состояние	
			на сжатие	на растяжение
1	Пластическая работа	ДКЭ для учета пластических свойств	+	+
2	Частичная разгрузка из-за образования трещины	ДКЭ для учета остаточных деформаций при разгрузке	-	+
3	Работа с трещиной при повторном нагружении	ДКЭ для учета работы с трещиной	-	+
4	Полное исключение из работы	ДКЭ для учета полного исключения из работы	+	+

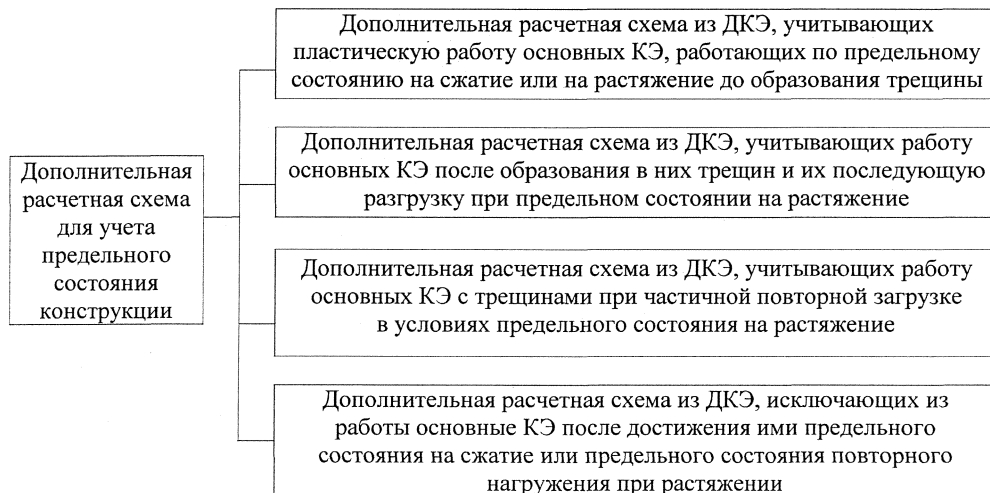


Рис. 1. Пример формирования дополнительной расчетной схемы из дополнительных конечных элементов

На рис. 2 дан пример постепенного превращения исходной расчетной схемы бетонной изги-

баемой консоли в идеальную модель ее разрушения (расчетную схему в предельном состоянии) с

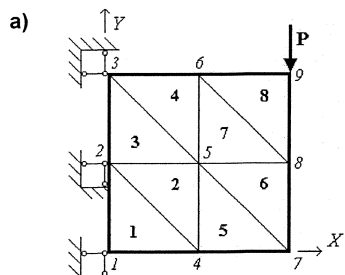
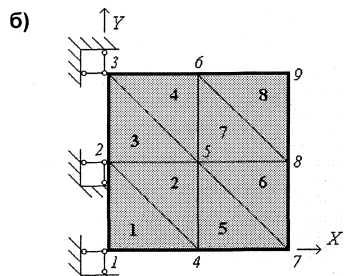
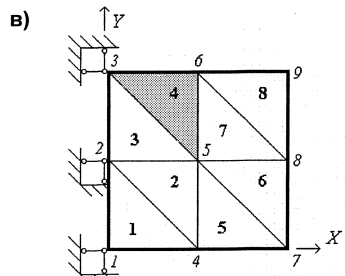


Рис. 2. Превращение исходной расчетной схемы бетонной изгибаемой консоли в идеальную модель ее разрушения (расчетную схему в предельном состоянии) с помощью дополнительных расчетных схем из дополнительных конечных элементов (ДКЭ):

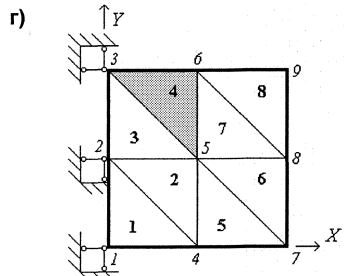
а) исходная расчетная схема из треугольных КЭ балки-стенки с линейными свойствами;



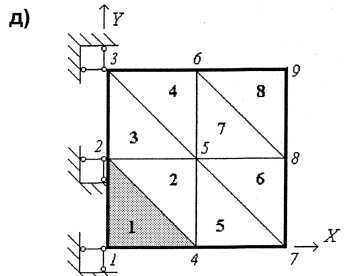
б) дополнительная расчетная схема из ДКЭ, учитывающих пластические свойства бетона (матрицы жесткости всех восьми ДКЭ не равны 0);



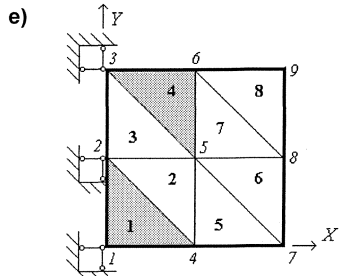
в) дополнительная расчетная схема из ДКЭ, учитывающих появление остаточных деформаций в КЭ № 4 после его частичной разгрузки вследствие образования трещины (матрица жесткости только ДКЭ № 4 не равна 0);



г) дополнительная расчетная схема из ДКЭ, учитывающих наличие трещины в КЭ № 4 (матрица жесткости только ДКЭ № 4 не равна 0);



д) дополнительная расчетная схема из ДКЭ, учитывающих исключение из работы КЭ № 1 после достижения в нем критерия предельного состояния по прочности на сжатие (матрица жесткости только ДКЭ № 1 не равна 0);



е) идеальная модель разрушения консоли (расчетная схема в предельном состоянии) после образования трещины в КЭ № 4 и достижения КЭ № 1 критерия предельного состояния по прочности на сжатие

помощью дополнительных расчетных схем из дополнительных конечных элементов (ДКЭ) [10].

В начале расчета, когда сила $P = 0$, дополнительных расчетных схем нет и используется только исходная расчетная схема, данная на рис. 2а. В нее входят восемь КЭ с линейными свойствами. С ростом нагрузки во всех элементах развиваются пластические свойства и к исходной добавляется первая дополнительная расчетная схема, представленная на рис. 2б. При $P = P_{crс}$, подключается вторая дополнительная расчетная схема (рис. 2в), обеспечивающая появление в КЭ № 4 остаточных деформаций после его частичной разгрузки в момент образования трещины. При дальнейшем увеличении силы P вводится третья дополнительная расчетная схема (рис. 2г), которая учитывает наличие трещины в этом КЭ. В предельной стадии при $P = P_{lim}$ присоединяется последняя, четвертая дополнительная расчетная схема (рис. 2д), которая исключает КЭ № 1 из работы после достижения в нем критерия предельного состояния по прочности на сжатие. В этот момент исходная расчетная схема консоли (рис. 2а) превращается в идеальную модель разрушения (рис. 2е). Как видно из этого примера, на каждом этапе работы рассчитываемой конструкции можно вводить различные модели поведения бетона, в том числе представленные в работе [11].

Решение системы уравнений. Введение ДКЭ позволяет не только объединить МКЭ и расчет конструкций по предельным состояниям, но и решить третью проблему, связанную с выбором способа решения основной системы линейных уравнений МКЭ, которая принимает следующий вид:

$$KV = P - \Delta K_{lim}V, \quad (3)$$

где V - матрица-столбец неизвестных перемещений узлов; P - матрица-столбец внешней нагрузки.

Второе слагаемое в правой части этого уравнения представляет собой ту дополнительную нагрузку F , которую нужно приложить к линейной системе вместе с основной нагрузкой P , чтобы достигнуть перемещения соответствующей нелинейной системы в предельном состоянии под действием только нагрузки P :

$$F = -\Delta K_{lim}V. \quad (4)$$

Эта дополнительная нагрузка F для всей конструкции формируется на основе дополнительной расчетной схемы из величин дополнительной нагрузки каждого из КЭ, входящего в расчетную схему. Каждая из этих величин противоположна по знаку, но равна по абсолютной величине узловым реакциям, возникающим в соответствующем ДКЭ. В этом случае итерационный процесс можно построить так, что он обеспечивает постепенное исключение каждого КЭ из работы конструкции и, как следствие, изменение свойств самой конструкции. При необходимости можно реализовать пошаговый расчет конструкции, постепенно определяя те элементы, которые нужно исключить из работы на данном шаге. Кроме того, можно опре-

делить те критические для данной конструкции конечные элементы, исключение которых из работы определяет предельное состояние данной конструкции.

Направления развития: разработка теоретических вопросов, связанных с использованием МДКЭ как численного метода для нелинейного расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям; компьютерная реализация МДКЭ в алгоритмах и программах, предназначенных для нелинейного расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям; проведение расчетов железобетонных конструкций и оценка полученных результатов.

Вывод. Разработанный МДКЭ позволяет решить ряд проблем, связанных с нелинейным расчетом железобетонных конструкций. Он носит обобщенный характер и не зависит от вида и природы проявляемого физически нелинейного свойства. Одновременно, он достаточно гибок и при всей своей обобщенности дает возможность отражать существенные особенности каждого из этих свойств. Учитывая изменения напряженно-деформированного состояния конструкции, он дает возможность реализовать пошаговый расчет железобетонной конструкции и определить ее предельное состояние.

Литература

1. Оатул, А.А. Расчет и проектирование элементов железобетонных конструкций на основе применения ЭВМ: конспект лекций / А.А. Оатул, А.А. Карякин, Ю.Ф. Кутин; под ред. А.А. Оатула. - Челябинск: ЧПИ, 1980. - Ч. 4. - 67 с.
2. СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. - М.; ФГУП ЦПП, 2004 - 26 с.
3. Гвоздев, А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Вып. 1: Сущность метода и его обоснование / А.А. Гвоздев. - М.; Госстройиздат, 1949. - 280 с.
4. Ермакова, А.В. Метод дополнительных конечных элементов для расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям / А.В. Ермакова. - М.: АСВ, 2007. - 128 с.
5. Ermakova, A. Limit State Analysis of Reinforced Concrete Structures by Additional Finite Element Method / A. Ermakova // Role for Concrete in Global Development. Proceedings of the International Conference held at the University of Dundee, Scotland, UK on 8-9 July 2008. BrePress, Dundee, Scotland, UK.-P. 763-774.
6. Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. - М.: Гостехиздат, 1948. - 376 с.
7. Карякин, А.А. Методика учета процесса трещинообразования при расчете железобетонных конструкций методом конечных элементов / А.А. Карякин, А.В. Ермакова // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям. - Челябинск: ЧПИ, 1985. - С. 131-133.

8. Ермакова, А.В. Треугольный конечный элемент балки-стенки с условной трещиной /А.В. Ермакова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». - Вып. 2. - № 7(23). - 2003. - С. 37-40.

9. Ермакова, А.В. Матрица жесткости дополнительного треугольного бетонного конечного элемента балки-стенки /А.В. Ермакова // Строительная механика и расчет сооружений. - 2008. - № 1. - С. 23-28.

10. Ермакова, А.В. Дополнительные расчетные схемы при расчете железобетонных конструкций по предельным состояниям /А.В. Ермакова // Строительная механика и расчет сооружений. - 2009.-№3.-С 48-53.

11. Карпенко, И.И. Общие модели механики железобетона / И.И. Карпенко. - М.: Стройиздат, 1996-416 с.

Поступила в редакцию 29 июня 2009 г.