УДК 517.925

СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ «НЕРЕЗОНАНСНЫМИ» МЕТОДАМИ

А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими правыми частями. Предлагается метод получения периодических решений в резонансном случае.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, периодические решения, резонанс.

Введение

В работе [5] рассматривались методы нахождения T-периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(x,t), \tag{1}$$

где x - искомый и-мерный вектор; $f(x,t)$ - заданная и-мерная вектор-функция, $A(t)$ - квадратная матрица порядка n. Для определенности считаем, что $A(t)$ и $f(x,t)$ непрерывны в области своего определения, причем по аргументу t они непрерывны на всей числовой прямой и удовлетворяют условиям:

$$A(t+T) = A(t), \qquad f(x,t+T) = f(x,t). \tag{2}$$

Пусть $P(t)$ - фундаментальная нормированная матрица решений системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{3}$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t), \tag{4}$$

$$P(0) = E(\textit{единичная матрица}), \tag{5}$$

$$\det P(t) \neq 0, \tag{6}$$

Обозначим

$$P_T = P(T). \tag{7}$$

В нерезонансном случае множество T-периодических решений системы дифференциальных уравнений (1) совпадает с множеством T-периодических решений системы интегральных уравнений:

$$x(t) = P(t)(E - P_T)^{-1} \int\limits_{t-T}^{t} P^{-1}(\tau) f(x(\tau),\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

В нерезонансном случае матрица E - P_T не вырождена.

В работе [5] установлены некоторые достаточные условия существования и единственности Т-периодического решения системы (8), связанные с сжимаемостью интегрального оператора в правой части этой системы, и предложен алгоритм численного получения такого решения.

Резонансным случаем называется факт существования Т-периодических решений системы (3), т.е. случай вырожденности матрицы E - P_T.

1. Редукция **резонансного случая к нерезонансному**

В случае резонанса и в околорезонансном случае (когда определитель матрицы E - P_T близок к нулю) достаточные условия существования решения системы (8) не выполняются.

В работе [5] получена система интегральных уравнений, соответствующая резонансному случаю, однако, решение такой системы связано с аппаратом теории неявных функций, что затрудняет дальнейшие теоретические и практические разработки. Но, тем не менее, за счет неких приемов удается получить периодические решения таких систем с помощью «нерезонансных» методов.

Вместо системы (1) рассмотрим систему:

$$\frac{dx}{dt}=B(t)+F(x,t), \tag{9}$$

где

$$F(x,t)=f(x,t)+(A-B)x, \tag{10}$$

а для фундаментальной нормированной матрицы $Q(t)$ однородной системы

$$\frac{dx}{dt}=B(t)x \tag{11}$$

выполнялось бы условие:

$$|\det(E-Q(t))|\geq a>0. \tag{12}$$

Пусть $q(t)$- монотонно возрастающая дифференцируемая функция, определенная на всей числовой прямой, причем, q(0) = 0, $S=S(t)$ - невырожденная квадратная матрица, элементы которой дифференцируемы на всей числовой прямой. Положим

$$Q(t)=S(t)P(q(t))S^{-1}(0). \tag{13}$$

Тогда матрица $B(f)$ примет вид:

$$B(t)=S(t)A(q(t))S^{-1}(t)\frac{dq}{dt}+\frac{dS(t)}{dt}S^{-1}(t).$$

Действительно:

$$Q(0)=S(0)P(0)S^{-1}(0)=S(0)ES^{-1}(0),$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{dS(t)}{dt}P(q(t))S^{-1}(0)+S(t)\frac{dP(q(t))}{dt}\frac{dq(t)}{dt}S^{-1}(0)=$$

$$=\frac{dS(t)}{dt}P(q(t))S^{-1}(0)+S(t)A(q(t))P(q(t))\frac{dq(t)}{dt}S^{-1}(0)=$$

$$=(\frac{dS(t)}{dt}S^{-1}(t)+S(t)A(q(t))S^{-1}(t)\frac{dq(t)}{dt})S(t)P(q(t))S^{-1}(0)=B(t)Q(t).$$

При этом матрицу $S(t)$ и функцию q(0 надо выбрать так, чтобы матрица $B(t)$ была T-периодической.

Например, если $S_0(t)$ - T-периодическая матрица, $\omega(t)$ - T-периодическая функция, то можно положить:

$$S(t)=e^{\int_0^1\omega(\tau)d\tau}S_0(t), \tag{15}$$

$$Q(t)=e^{\int_0^1\omega(\tau)d\tau}S_0(t)P(t)S_0^{-1}(0). \tag{16}$$

Тогда

$$B(t)=S_0(t)A(t)S_0^{-1}(t)+\omega(t)E+\frac{dS_0(t)}{dt}S_0^{-1}(t) \tag{17}$$

(здесь E - единичная матрица).

Если при этом A - постоянная матрица, то для любого положительного числа λ можно положить:

$$Q(t)=e^{\int_0^1\omega(\tau)d\tau}S_0(t)P(\lambda t)S_0^{-1}(0), \tag{18}$$

тогда

$$B(t)=S_0(t)A(t)S_0^{-1}(t)\lambda+\omega(t)E+\frac{dS_0(t)}{dt}S_0^{-1}(t). \tag{19}$$

Если матрица E-$P(T)$ вырождена, то выполнение условия (18) достигается, в основном, за счет того, что $q(T) \neq T$.

Рассмотрим как работает данный метод на простом примере системы двух уравнений.

2. Пример. Рассматривается система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y, \\ \dot{y} = -\omega x + \dfrac{1}{\omega} f(x,t), \end{cases} \tag{20}$$

где

$$f(x,t+2\pi) = f(x,t). \tag{21}$$

Фундаментальная нормированная матрица системы (20): $P(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$,

матрица коэффициентов линейной части системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ω не является целым числом (нерезонансный случай), то периодические решения системы (20) совпадают с периодическими решениями системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2\omega\sin\omega\pi} \displaystyle\int_{t-2\pi}^{t} f(x(\tau),\tau)\cos(\omega(t-\tau-\pi))\,d\tau, \\ y(t) = -\dfrac{1}{2\omega\sin\omega\pi} \displaystyle\int_{t-2\pi}^{t} f(x(\tau),\tau)\sin(\omega(t-\tau-\pi))\,d\tau. \end{cases} \tag{22}$$

Если ω близко к целому числу, то знаменатель в правых частях системы (22) близок к нулю, и итерационный процесс оказывается расходящимся.

1. Первый подход. Если .ω близко к целому числу, то можно выбрать некоторое число ω (близкое к полуцелому значению) и применить следующую процедуру:

1) Производим замену:

$$\begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega}{\overline{\omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

в результате которой система (20) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \overline{\omega}\tilde{y} \\ \tilde{y} = -\dfrac{\omega^2}{\overline{\omega}} x + \dfrac{1}{\overline{\omega}} f(x,t). \end{cases}$$

2) Полагаем $q(t) = (\omega/\tilde{\omega})t$, $Q(t) = \begin{pmatrix} \cos\overline{\omega}t & \sin\overline{\omega}t \\ -\sin\overline{\omega}t & \cos\overline{\omega}t \end{pmatrix}$.

В итоге, вместо системы (20) рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = \overline{\omega}\tilde{y} \\ \tilde{y} = -\overline{\omega}x + \dfrac{1}{\overline{\omega}}[(\overline{\omega}^2 - \omega^2)x + f(x,t)] \end{cases} \tag{23}$$

(при этом по сравнению с системой (20) $\overline{\omega}\overline{y} = \omega y$.

Система интегральных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\overline{\omega}\sin\overline{\omega}\pi} \int_{t-2\pi}^{t} (f(x(\tau),\tau) + (\overline{\omega}^2 - \omega^2)x(\tau))\cos\overline{\omega}(t-\tau-\pi)\,d\tau \\ \tilde{y}(t) &= -\frac{1}{2\overline{\omega}\sin\overline{\omega}\pi} \int_{t-2\pi}^{t} (f(x(\tau),\tau) + (\,\overline{\omega}^2 - \omega^2)x(\tau))\sin\overline{\omega}(t-\tau-\pi)\,d\tau. \end{aligned} \tag{24}$$

Ввиду наличия в правых частях системы (24) слагаемого $(\overline{\omega}^2-\omega^2)x(\tau)$ методы оценки правых частей, которые применялись для нерезонансного случая в работе [5], теперь оказываются неэффективными.

2. Второй подход. В этом случае также выбирается число ω, близкое к полуцелому, и система (20) записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{x}=\overline{\omega}y-(\overline{\omega}-\omega)y, \\ \dot{y}=-\overline{\omega}x+(\overline{\omega}-\omega)x+\dfrac{1}{\omega}f(x,t). \end{cases} \tag{25}$$

Система интегральных уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{2\overline{\omega}\sin\overline{\omega}\,\pi}\displaystyle\int_{t-2\pi}^{t}((\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}f(x(\tau)\tau)+(\overline{\omega}^{\,2}-\omega\overline{\omega})x(\tau))\times \\ \qquad\times\cos\overline{\omega}\,(t-\tau-\pi)+(\overline{\omega}^2-\omega\overline{\omega}\,)y(\tau)\sin\overline{\omega}(t-\tau-\pi)d\tau, \\ \\ y(t)=-\dfrac{1}{2\overline{\omega}\sin\overline{\omega}\,\pi}\displaystyle\int_{t-2\pi}^{t}((\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}f(x(\tau)\tau)+(\overline{\omega}^{\,2}-\omega\overline{\omega})x(\tau))\times \\ \qquad\times\sin\overline{\omega}(t-\tau-\pi)-(\overline{\omega}^2-\omega\overline{\omega})y(\tau)\cos\overline{\omega}\,(t-\tau-\pi)d\tau. \end{cases} \tag{26}$$

Численный эксперимент показал, что более сильным является первый подход. С помощью первого подхода решение с заданной точностью получалось за меньшее число итераций, чем при использовании второго подхода. И если решение системы можно было получить вторым подходом, то первый тоже оказывался сходящимся, а наоборот - не всегда. Однако встает вопрос о нахождении условий, гарантирующих существование и единственность решения.

Литература

1. Гельфанд, И.М. Некоторые вопросы дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. - М.: Наука, 1958. - 274 с.
2. Рейслинг, Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Р. Рейслинг, Г. Сансоне, Р. Конти. - М.: Наука, 1974. - 318 с.
3. Плисе, В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений / В.А. Плисе. - М.: Наука, 1977. - 303 с.
4. Гиль, М.И. Метод операторных функций в теории дифференциальных уравнений / М.И. Гиль. - М: Наука, 1990. - 151 с.
5. Геренштейн, А.В. Периодические решения систем дифференциальных уравнений / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн. - М., 1997. - 42 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1943. - В97.

Поступила в редакцию 1 октября 2008 г.

RESONANCE SOLUTIONS OF THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY NON-RESONANSE METODS

The system of ordinary nonlinear differential equations with periodic right parts is considered. Authors offered the method of the receiving of periodic solution in non-resonance case.

Keywords: ordinary differential equation, periodic solution, resonance.

Herreinstein Arkady Wasiljevich. - Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Math. Department, South Ural State University.

Геренштейн Аркадий Васильевич - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.

Herreinstein Evgenija Arkadjewna. - Cand.Sc. (Technics), Assistant of the Applied Math. Department, South Ural State University.

Геренштейн Евгения Аркадьевна - кандидат технических наук, ассистент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: h-jane@rambler.ru