УДК 517.711.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Т. Г. Сукачева

THE UNSTEADY LINEARIZED MODEL OF MOVEMENT OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID OF HIGH ORDER

T.G. Sukacheva

Рассматривается первая начально-краевая задача для системы уравнений Осколкова, моделирующей в линейном приближении динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина - Фойгта высокого порядка. Данная задача исследуется в рамках теории линейных неоднородных уравнений Соболевского типа. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, и получено описание ее расширенного фазового пространства.

Ключевые слова: уравнение Соболевского шипа, расширенное фазовое пространство, относительно p-ограниченный оператор, система уравнений Осколкова.

The author considers the first initial boundary-value problem for the Oskolkov equation system modeling the dynamics of the incompressible viscoelastic liquid of Kelvin - Voight of high order in the linear approximation. This problem is solved within the frameworks of the theory of the linear heterogeneous Sobolev type equations. The author proves the existence theorem of the unique solution of the problem and finds the description of its extended phase space.

Keywords: equations of the Sobolev type, extended phase space, relatively p-bounded operator, Oskolkov system of equations

Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)u_t = \nu\nabla^2 u - (\tilde{u}\cdot\nabla)u - (u\cdot\nabla)\tilde{u} \\ + \sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{s=1}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot u, \\ \dfrac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = u + \alpha_m w_{m,s}\ , \quad m=\overline{1,\ M}, \\ \dfrac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}\ , \quad s=\overline{1,\ n_m-1}, \\ \alpha_m < 0, A_{m,s} > 0 \end{cases} \tag{1}$$

моделирует в линейном приближении течение вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина - Фойгта порядка $k > 0$, $k = n_1 + n_2 + ... + n_M$ ([1]). Данная система получена в результате линеаризации соответствующей модели [2].

Функция $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, где $u_i = u_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$ означает вектор скорости жидкости, вектор-функция $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$ характеризует объемные силы, $p = p(x,t)$ отвечает давлению жидкости. Вектор-функция $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ...\tilde{u}_n)$, $\tilde{u}_\imath = \tilde{u}_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ соответствует стационарному решению исходной системы (так как таких стационарных решений может быть несколько, то мы не должны ограничиваться рассмотрением только одного — нулевого стационарного решения). Параметры $\nu \in \mathbb{R}_+$, $\text{æ} \in \mathbb{R}$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $A_{m,s}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим задачу Коши-Дирихле *для* системы (1):

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = u_0(x), & w_{m,s}(x,0) = w^0_{m,s}(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & w_{m,s}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ m = \overline{1,\ M}, & s = \overline{1,\ n_m - 1}. & \end{array} \quad \textbf{(2)}$$

В случае, когда $f = f(x)$, $k = 0$ задача (1), (2) рассматривалась в [3] , в автономном случае при $\kappa > 0$ в [4] . Нашей целью будет являться изучение разрешимости задачи (1), (2)при нестационарном свободном члене $f = f(x,t)$. Эту задачу мы исследуем в рамках теории линейных уравнений Соболевского типа. Поэтому в первой части статьи кратко рассматривается абстрактная задача Коши для указанного класса уравнений, а во второй части задача (1), (2) изучается как конкретная интерпретация абстрактной задачи.

1. Абстрактная задача

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ и $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Пусть интервал $I^b_a = (a,b)$ содержит точку 0 и вектор-функция $f \in C^\infty(I^b_a;\mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad \textbf{(3)}$$

для линейного операторного уравнения Соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad \textbf{(4)}$$

где операторы L и M определены выше.

Хорошо известно, что задача (3), (4) однозначно разрешима не для всех начальных данных u_0 из банахова пространства U. Поэтому актуальным является описание множества корректности указанной задачи. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 1.

Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ назовем расширенным фазовым пространством задачи (3), (4), если:

(i) любое решение $u \in C^\infty(I^b_a;\mathcal{U})$ уравнения (4) лежит в $\mathcal{B}^t$, т.е. $(u(t),t) \in \mathcal{B}^t$ для любого $t \in I^b_a$;

(ii) при любом $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (3), (4)-

Замечание 1.

Понятие расширенного фазового пространства обобщает понятие фазового пространства [3] на неавтономный случай, и представленные в этом параграфе результаты изложены в соответствии с работами [3, 5]

Замечание 2. Ранее вместо термина <<расширенное фазовое пространство>> использовался термин «конфигурационное пространство> [4], что вносило некоторую путаницу в терминологию [5].

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда задача (3), (4) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{cases} R\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1} f^0\ , & u^0(0) = u_0^0, \\ \dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1} f^1\ , & u^1(0) = u_0^1, \end{cases} \tag{5}$$

где $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $u^k \in \mathcal{U}^k$, $f^k \in \mathcal{F}^k$, $k = 0,1$; $\mathcal{U}^k$, $(\mathcal{F}^k)$ - подпространства банахова пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$, такие, что $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1 = \mathcal{U}$ $(\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1 = \mathcal{F})$, ; M_k и L_k - сужение оператора M и L соответственно на подпространство $\mathcal{U}^k$. По построению $S \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$. Тогда вторая задача (5) имеет единственное решение $u^1 \in C^\infty(I_a^b;\mathcal{U}^1)$,, представимое в виде

$$u^1(t) = \exp(tS)u_0^1 + \int\limits_0^t \exp((t-s)S)L_1^{-1}f^1(s)\,ds, \quad t \in I_a^b,$$

причем $\exp(tS) = U_1^t$ — полугруппа, являющаяся сужением разрешающей полугруппы U^t однородного уравнения, соответствующего уравнению (4), на $\mathcal{U}^1$, а $\exp((t-s)S) = U_1^{t-s}$. Для рассмотрения первой задачи (5) предположим, что ∞ — устранимая особая точка либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M, т.е. оператор M относительно p-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$ [5]. Тогда, последовательно дифференцируя ρ раз первое уравнение (5) по t и умножая слева на оператор R, получим

$$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p} R^q M_0^{-1} \frac{d^q f^0}{dt^q}(t)\ , \quad t \in I_a^b. \tag{6}$$

Отсюда видно, что первая задача (5) неразрешима, если

$$u_0^0 \neq -\sum_{q=0}^{p} R^q M_0^{-1} \frac{d^q f^0}{dt^q}(0).$$

С другой стороны, если (6) выполняется, то первая задача имеет единственное решение $u^0 \in C^\infty(I_a^b;\mathcal{U}^0)$.

Из соотношения (6) следует, что расширенное фазовое пространство задачи (5), а следовательно, и задачи (3), (4) имеет вид

$$\mathcal{B}^t = \{(u(t),t) : u \in \mathrm{dom}\, M, t \in \mathbb{R}, \quad (I-Q)(Mu + \sum_{q=0}^{p} \tilde{R}^q \frac{d^q f}{dt^q}(t)) = 0\},$$

где $\tilde{R} = L_0 M_0^{-1}(I-Q)$, Q - проектор на подпространство $\mathcal{F}^1$

Теорема 1. *Пусть оператор M* (L, *ρ) -ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$. Тогда при любом $f \in C^\infty(I_a^b;\mathcal{F})$ и при любом u_0 таком, что $(u_0,0) \in \mathcal{B}^0$, существует единственное решение $u \in C^\infty(I_a^b;\mathcal{U})$ задачи (3), (4), имеющее вид:*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} R^q M_0^{-1}(I-Q)\frac{d^q f}{dt^q}(t) + U_1^t u_0^1 + \int\limits_0^t U_1^{t-s}L^{-1}Qf(s)\,ds.$$

2. Конкретная интерпретация

Рассмотрим задачу (2) для системы Осколкова (1), представленной в виде [4]

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)u_t = \nu\nabla^2 u - (\tilde{u}\cdot\nabla)u - (u\cdot\nabla)\tilde{u} \\ +\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{s=1}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \overrightarrow{p} + f, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot u), \\ \dfrac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = u + \alpha_m w_{m,s}, \quad m = \overline{1,\ M}, \\ \dfrac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \quad s = \overline{1,\ n_m - 1}, \\ \alpha_m < 0, \quad A_{m,s} > 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь $\nabla p = \overrightarrow{p}$, т.к. во многих гидродинамических задачах знание градиента давления предпочтительнее, чем знание давления [6]. Далее сведем задачу (7), (2) к задаче Коши (3) для уравнения (4). Редукцию проведем, следуя [2, 4].

Обозначим через $\mathbf{H}^2 = (W_2^2)^n$, $\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = (\overset{\circ}{W}{}_2^1)^n$, $\mathbf{L}^2 = (L^2)^n$ — соболевские пространства вектор-функций $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, определенных в области Ω. Рассмотрим линеал $\mathcal{L} = \{u \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^n \ : \ \nabla\cdot u = 0\}$ вектор-функций, соленоидальных и финитных в области Ω. Замыкание $\mathcal{L}$ по норме $\mathbf{L}^2$ обозначим через $\mathbf{H}_\sigma$. $\mathbf{H}_\sigma$ — гильбертово пространство со скалярным произведением, унаследованным из $\mathbf{L}^2$. Кроме того, существует расщепление $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где $\mathbf{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbf{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{H}_\pi$ — ортопроектор. Сужение проектора Π на пространство $\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 \subset \mathbf{L}^2$ является непрерывным оператором $\Pi : \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 \to \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$. (Обсуждение этого круга вопросов см. в [7].) Представим поэтому пространство $\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1$ в виде прямой суммы ${\mathbf{H}_\sigma}^2 \oplus {\mathbf{H}_\pi}^2$, где ${\mathbf{H}_\sigma}^2 = \ker \Pi$, ${\mathbf{H}_\pi}^2 = \operatorname{im} \Pi$. Имеет место плотное вложение $\mathcal{L} \subset \mathbf{H}_\sigma^2$ и непрерывные плотные вложения ${\mathbf{H}_\sigma}^2 \hookrightarrow \mathbf{H}_\sigma$ и ${\mathbf{H}_\pi}^2 \hookrightarrow \mathbf{H}_\pi$. Пространство ${\mathbf{H}_\pi}^2$ состоит из вектор-функций, равных нулю на $\partial\Omega$ и являющихся градиентами функций $\varphi \in W_2^3(\Omega)$.

Формулой $A = \nabla^2$ зададим линейный непрерывный оператор $A : {\mathbf{H}_\sigma}^2 \oplus {\mathbf{H}_\pi}^2 \to \mathbf{L}^2$ с дискретным, отрицательным, конечнократным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$.

Пусть $\tilde{u} \in {\mathbf{H}_\sigma}^2 \oplus {\mathbf{H}_\pi}^2$. Тогда формулой

$$B : u \to \nu\nabla^2 u - (\tilde{u}\cdot\nabla)u - (u\cdot\nabla)\tilde{u}$$

зададим линейный непрерывный оператор $B : {\mathbf{H}_\sigma}^2 \oplus {\mathbf{H}_\pi}^2 \to \mathbf{L}^2$.

Формулой $C : u \to \nabla(\nabla u)$ зададим линейный непрерывный оператор $C : {\mathbf{H}_\sigma}^2 \oplus {\mathbf{H}_\pi}^2 \to \mathbf{L}^2$, причем $\operatorname{im} C = \mathbf{H}_\pi$, $\ker C = {\mathbf{H}_\sigma}^2$.

Положим $\Sigma = I - \Pi$ и обозначим через $\tilde{A}(\tilde{B})$ сужение оператора ΣA (ΣB) на ${\mathbf{H}_\sigma}^2$.

Оператор $\tilde{A} : {\mathbf{H}_\sigma}^2 \to \mathbf{H}_\sigma$ линеен и непрерывен, его спектр $\sigma(\tilde{A})$ дискретен, отрицателен, конечнократен, сгущается лишь на $-\infty$.

Пусть $A_æ = I - æA$. Выберем параметр æ таким, чтобы $æ^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(\tilde{A})$. Обозначим через $A_{æ\sigma}(A_{æ\pi})$ сужение оператора $\Sigma A_æ(\Pi A_æ^{-1})$ на ${\mathbf{H}_\sigma}^2(\mathbf{H}_\pi)$.

Предположим, что $æ^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(\tilde{A})$. Тогда оператор $A_{æ\sigma} : {\mathbf{H}_\sigma}^2 \to \mathbf{H}_\sigma$ $(A_{æ\pi} : \mathbf{H}_\pi \to {\mathbf{H}_\pi}^2)$ — топлинейный изоморфизм.

Представим пространства: $\mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = {\mathbf{H}_\sigma}^2 \times {\mathbf{H}_\pi}^2$; $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$. Положим

$$\mathcal{U} = \oplus_{i=0}^k \mathcal{U}_i \quad ; \quad \mathcal{F} = \oplus_{i=0}^k \mathcal{F}_i,$$

где $\mathcal{U}_0 = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\quad \mathcal{F}_0 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\quad \mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$, $\mathcal{U}_i = \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}^1 = {\mathbf{H}_\sigma}^2 \times {\mathbf{H}_\pi}^2$, $\mathcal{F}_i = \mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $\quad i = 1,2,...,k$. Элемент $u \in \mathcal{U}$ имеет вид: $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p, \omega_{1,0}, ..., \omega_{M,0}, \omega_{1,1}, ..., \omega_{1,n_1-1}, ..., \omega_{M,1}, ..., \omega_{M,n_M-1})$, где $u_\sigma = \Sigma u$, $\quad u_\pi = \Pi u$, $\quad u_p = \vec{p}$ а элемент $f \in \mathcal{F}:\quad f = (f_\sigma, f_\pi, 0, ..., 0)$, где $f_\sigma = \Sigma f$, $\quad f_\pi = \Pi f$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ определены в* (8). *Тогда*

(i) формулой

$$L := \begin{pmatrix} \Sigma A_{æ}\Sigma & O & O & O & \ldots & O \\ O & \Pi A_{æ}\Pi & O & O & \ldots & O \\ O & O & O & O & \ldots & O \\ O & O & O & I & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \ldots & I \end{pmatrix} \tag{9}$$

определяется линейный непрерывный оператор $L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$. Причем L —матрица порядка $(k+3)$. Если $æ^{-1} \notin \sigma(A)$, то $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k}$, $\operatorname{im} L = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_k$;

(ii) если $\tilde{u} \in {\mathbf{H}_\sigma}^2 \oplus {\mathbf{H}_\pi}^2$, то матрицей M, имеющей вид:

$$\begin{pmatrix} \Sigma B\Sigma & \Sigma B\Pi & O & A_{10}\tilde{\Delta} & \cdots & A_{M0}\tilde{\Delta} & A_{11}\tilde{\Delta} & \cdot\cdot & A_{1n_1-1}\tilde{\Delta} & \cdot & A_{M1}\tilde{\Delta} & \cdot\cdot & A_{Mn_M-1}\tilde{\Delta} \\ \Pi B\Sigma & \Pi B\Pi & -\Pi & A_{10}\hat{\Delta} & \cdot\cdot & A_{M0}\hat{\Delta} & A_{11}\hat{\Delta} & \cdot\cdot & A_{1n_1-1}\hat{\Delta} & \cdot & A_{M1}\hat{\Delta} & \cdot\cdot & A_{Mn_M-1}\hat{\Delta} \\ O & C & O & O & \cdots & O & O & \cdots & O & \cdot\cdot & O & & O \\ I & I & O & \alpha_1 & \cdot & O & O & \cdot\cdot & O & \cdot & O & \cdot & O \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\ I & I & O & O & \cdot\cdot & \alpha_M & O & \cdot\cdot & O & \cdot & O & & O \\ O & O & O & I & \cdot & O & \alpha_1 & \cdots & O & \cdot & O & \cdot\cdot & O \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ O & O & O & O & \cdot & O & O & \cdots & \alpha_1 & \cdot\cdot & O & \cdot & O \\ & \vdots & & & & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ O & O & O & O & \cdot & I & O & \cdot\cdot & O & \cdots & \alpha_M & \cdot\cdot & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \cdot & O & O & \cdot & O & \cdot & O & & \alpha_M \end{pmatrix} \tag{10}$$

определяется линейный непрерывный оператор $M : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$, здесь $\tilde{\Delta} = \Sigma\Delta$, $\quad \hat{\Delta} = \Pi\Delta$.

Редукция задачи (7), (2) к задаче Коши (3) для уравнения (4) закончена.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ определены в* (8), *а L и M– в (9) и (10) соответственно. Пусть $æ^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(\tilde{A})$, тогда оператор M $(L,1)$-ограничен.*

Доказательство. В силу леммы 1 оператор L бирасщепляющий. Поэтому для доказательства леммы ввиду [3] достаточно показать, что каждый вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один M-присоединенный вектор и $\quad M[\mathcal{U}^{01}] \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$.

Пусть $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$. Тогда в силу леммы 1 (i) вектор $\varphi = (0, 0, \varphi_p, 0, ..., 0)$, $\varphi_p \neq \{0\}$. Отсюда в силу (10) $M\varphi = (0, 0, -\varphi_p, 0, ..., 0) \in \operatorname{im} L$. Найдем $\psi \notin \ker L \setminus \{0\} : L\psi = M\varphi$.

Используя (10), получаем систему уравнений:

$$A_{æ\sigma}\psi_\sigma = 0 \quad \Pi A_{æ}\psi_\pi = -\varphi_p. \tag{И}$$

Из (11) следует, что $\psi_\pi \neq 0$, т.к. $\varphi_p \neq 0$ по условию, а значит, и $C\psi_\pi \neq 0$. Откуда

$$M\psi = \begin{pmatrix} \Sigma(B\psi_\sigma + B\psi_\pi) \\ \Pi(B\psi_\sigma + B\psi_\pi) - \psi_p \\ C\psi_\pi \\ \psi_\sigma + \psi_\pi \\ \vdots \\ \psi_\sigma + \psi_\pi \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} L.$$

Осталось доказать существование вектора $\psi \notin \ker L \setminus \{0\}$, удовлетворяющего системе (11). Для этого рассмотрим оператор

$$\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma A_{æ}^{-1}\Sigma & \Sigma A_{æ}^{-1}\Pi & O & O & \dots & O \\ \Pi A_{æ}^{-1}\Sigma & A_{æ\pi} & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\tilde{L}^{-1}L = \begin{pmatrix} \Sigma & O & O & O & \dots & O \\ O & \Pi & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}),$$

$$L\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma & O & O & O & \dots & O \\ O & \Pi & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}),$$

то компоненты ψ_σ и ψ_π вектора ψ можно найти из равенств: $\psi_\sigma = -\Sigma A_{æ}^{-1}\varphi_p$, $\psi_\pi = -A_{æ\pi}^{-1}\varphi_p$, а компоненту ψ_p можно выбрать произвольно.

Проверим второе условие $M[\mathcal{U}^{01}] \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$.

Положим $\mathcal{U}^{00} = \ker L$, $\operatorname{coim} L = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\} \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_k$. Пользуясь оператором $\tilde{L}^{-1}$, получим

$$\mathcal{F}^{00} = M[\mathcal{U}^{00}] = \{0\} \times \mathbf{H}_\pi \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{k+1} \subset \operatorname{im} L,$$

$$\mathcal{U}^{01} = \tilde{L}^{-1}[\mathcal{F}^{00}] = \Sigma A_{æ}^{-1}[\mathbf{H}_\pi] \times A_{æ\pi}[\mathbf{H}_\pi] \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{k+1}.$$

Поскольку $A_{æ\pi}[\mathbf{H}_\pi] = \mathbf{H}_\pi^2$ в силу леммы 2.4.3, то

$$\mathcal{U}^{01} = \Sigma A_{æ}^{-1} A_{æ\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{k+1} \subset \operatorname{coim} L.$$

Отсюда

$$\mathcal{F}^{01} = M[\mathcal{U}^{01}] = \Sigma B(\Sigma A_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1} + I)[\mathbf{H}_{\pi}^{2}] \times B(\Sigma A_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1} + I)[\mathbf{H}_{\pi}^{2}]\times$$

$$\times C[\mathbf{H}_{\pi}^{2}] \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Sigma A_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1} + I &= \Sigma A_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1} + A_{æ\pi}A_{æ\pi}^{-1} = \\ (\Sigma A_{æ}^{-1} + A_{æ}^{-1})A_{æ\pi}^{-1} &= A_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1}, \end{aligned}$$

$\mathcal{F}^{01} = \Sigma BA_{ae}^{-1}A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times BA_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \mathbf{H}_p\times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k} \not\subset \operatorname{im} L$, где оператор $\tilde{C}^{-1}$ — обратный к сужению $\tilde{C}$ оператора C на $\mathbf{H}_{\pi}^{2}$.

Далее, положим

$$P_0 = \begin{pmatrix} O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & \Pi & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} O & P_1^{12} & O & O & \dots & O \\ O & & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

где $P_1^{12} = \Sigma A_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1}$;

$$Q_0 = \begin{pmatrix} O & O & O & O & \dots & O \\ O & \Pi & Q_0^{23} & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} O & O & Q_1^{13} & O & \dots & O \\ O & O & Q_1^{23} & O & \dots & O \\ O & O & \Pi & O & \dots & O \\ O & O & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & O \end{pmatrix},$$

где $Q_1^{13} = \Sigma BA_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}$, $Q_1^{23} = BA_{æ}^{-1}A_{æ\pi}^{-1}\tilde{C}^{-1}$,$Q_0^{23} = -Q_1^{23}$.

Матрицы P_0, P_1, Q_0, Q_1 имеют порядок $(k+3)$. Нетрудно проверить, что операторы $P_k : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^{0k}$, $Q_k : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{0k}$, $k = 0,1$ — проекторы, причем $P_0P_1 = P_1P_0 = O$, $Q_0Q_1 = Q_1Q_0 = O$. Поэтому оператор $\tilde{Q} = I - Q_1$ тоже является проектором, причем $\operatorname{im} \tilde{Q} = \operatorname{im} L$, $\ker \tilde{Q} = \mathcal{F}^{01}$. Значит, $\mathcal{F}^{01} \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$. □

Найдем расширенное фазовое пространство задачи (7), (2).

Из леммы 2 и п.1 для задачи (7), (2) расширенное фазовое пространство $\mathcal{B}^t$ определяется равенством $(I-Q)(Mu+\tilde{R}^0\frac{d^0 f}{dt^0}+\tilde{R}^1\frac{d^1 f}{dt^1})=0$ или $(I-Q)v=0$, где $v=Mu+f(t)+\tilde{R}\frac{df(t)}{dt}$, $\tilde{R}=L_0M_0^{-1}(I-Q)\in\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{F}^0)$, а проектор $I-Q=Q_0+Q_1$. Поскольку $Q_0Q_1=Q_1Q_0=O$, то $(Q_0+Q_1)v=0$ тогда и только тогда, когда $(Q_0v=0)\wedge(Q_1v=0)$. Первое из этих равенств эквивалентно условию $u_\pi=0$, а второе выполняется тогда и только тогда, когда

$$\Pi Bu_\sigma+\Pi\sum_{m=1}^{M}\sum_{s=1}^{n_m-1}A_{m,s}\Delta\omega_{m,s}+f_\pi(t)+\tilde{R}\frac{df_\pi(t)}{dt}=u_p.$$

Итак, расширенное фазовое пространство имеет вид

$$\mathcal{B}^t=\{(u,t)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}:u_\pi=0,\quad u_p=\Pi Bu_\sigma+\Pi\sum_{m=1}^{M}\sum_{s=1}^{n_m-1}A_{m,s}\Delta\omega_{m,s}+f_\pi(t)+\tilde{R}\frac{df_\pi(t)}{dt}.\}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любого* $f\in\mathcal{F}$, $f=(f_\sigma,f_\pi,0,...,0)$ *и любого* u_0 *такого, что* $(u_0,0)\in\mathcal{B}^0$, *существует единственное решение задачи (1), (2).*

Автор вырастает признательность профессору Г.А. Свиридюку за внимание к данным исследованиям и обсуждение результатов.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. - 1988. - №179. - С. 126 - 164.
2. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина - Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Изв. вузов. Математика. - 1998. - №3(430). - С. 47 - 54.
3. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. - 1994. - Т.49, №4. - С.47 - 74.
4. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева; Новгород, гос. ун-т. - Великий Новгород, 2004. - 249 с.
5. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева//Вестн. МаГУ. Математика. - Магнитогорск, 2005. - Вып. 8. - С. 5 - 33.
6. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.- Изд. 3. - М.: Наука, 1986. - 736 с.
7. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская..- Изд. 2. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

Кафедра математического анализа,
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
tamara.sukacheva@novsu.ru

Поступила в редакцию 20 февраля 2009 г.