

05.23.17
П.64

КОНТРОЛЬНЫЙ
ЭКЗЕМПЛЯР

На правах рукописи

Потапов Александр Николаевич

**МЕТОД ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА РЕАКЦИИ
ДИСКРЕТНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ
В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

Специальность 05.23.17 – «Строительная механика»

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук**

Томск

2003

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете
(г. Челябинск).

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Н.Н. Белов;

доктор технических наук, профессор Б.А. Люкшин;

доктор технических наук, старший научный сотрудник А.А. Светашков.

Ведущая организация – Воронежский государственный архитектурно-
строительный университет.

Защита состоится 17 октября 2003 г., в 14 часов, на заседании диссертационного
совета Д 212.265.01 при Томском государственном архитектурно-строительном
университете по адресу: 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, корп. 5, ауд. 307. Тел.
(8-382-2) 65-42-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан 10 сентября 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Н.К.Скрипникова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

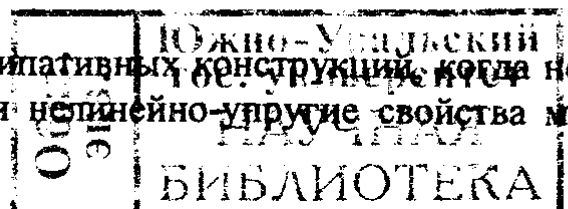
В диссертационной работе рассматриваются вопросы динамического расчета дискретных диссипативных систем (ДДС) на нестационарные воздействия в задачах строительной механики. Разработан аналитический подход к интегрированию уравнения колебаний ДДС, представляющий временной анализ общего вида, при котором учитываются внутреннее трение (на основе линейной модели вязкого сопротивления) и физическая нелинейность материала.

Обоснование темы исследований и ее актуальность. Нужды практики предъявляют весьма жесткие требования надежности и экономичности при создании инженерных конструкций, работающих в условиях усложненного характера современного производства, обусловленного нестационарными воздействиями. В большинстве случаев, для оценки реальной работы динамической системы необходим учет сил неупругого сопротивления (диссипативных сил), оказывающих свое влияние на процесс колебаний. Это ставит перед динамикой сооружений сложные задачи по построению и разработке более совершенных методов расчета. Обеспечение надежной работы конструкции должно сочетаться с разумной простотой метода, высокой точностью и эффективностью проводимого динамического анализа и, наконец, возможностью получения не только количественных, но и качественных оценок работы конструкции.

При моделировании сооружения дискретной расчетной схемой движение динамической системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Сведение к ОДУ позволяет использовать один из наиболее эффективных методов анализа дискретных систем – временной анализ реакции. Однако, несмотря на интенсивное развитие методов решения динамических задач дискретного вида, в области диссипативных конструкций временной анализ встречает большие затруднения.

Известные методы построения интеграла Дюамеля связаны только с расчетом линейно-деформируемых систем. При этом успех такого анализа, в значительной мере, зависит от типа используемых моделей демпфирования. Обычно при выборе моделей руководствуются тем, чтобы матрица демпфирования обеспечивала разделение уравнений движения ДДС в нормальных координатах. Для этой цели служат модели пропорционального (однородного) демпфирования. Учет внутреннего трения в сложных диссипативных системах, не подчиняющихся классическому пропорциональному демпфированию, сильно затрудняет проведение временного анализа, поскольку уравнения движения в общем случае не разделяются в нормальных координатах. Поэтому применение традиционных методов временного анализа к диссипативным системам с «непропорциональным» (неоднородным) демпфированием приводит либо к погрешностям при вычислении реакции (как в методе разложения по собственным формам колебаний соответствующей консервативной системы), либо к трудоемким численным процедурам по построению матрицы импульсных переходных функций (ИПФ) (как в методе функций Грина).

В задачах нелинейных колебаний диссипативных конструкций, когда необходимо учитывать упругопластические или нелинейно-упругие свойства мате-



риала, интеграл Дюамеля не используется для определения реакции сооружения вообще, ввиду крайней труднодоступности временного анализа. Следовательно, при общей предпосылке динамической задачи теория временного анализа ДДС уже в упругой постановке не располагает методами, обеспечивающими надежную оценку динамической реакции сооружения.

Главная причина такого положения дел – в отсутствии разработанных в современной математической литературе эффективных аналитических процедур по решению алгебраической проблемы, которая для задачи колебаний ДДС с упруговязким сопротивлением имеет вид характеристического матричного квадратного уравнения (МКУ). Получившие за последние два-три десятилетия развитие численные методы, основанные на ортогональных преобразованиях, не дают удовлетворительного решения этой проблемы, так как алгоритмы данных методов не учитывают ни специальных свойств решений МКУ, ни его соотношений. Это является сильным тормозом в развитии теории динамического анализа ДДС в целом и требует создания таких методов временного анализа, которые были бы свободны от недостатков существующих подходов.

Отличительная черта предлагаемого подхода перед известными методами состоит в том, что его разрешающие уравнения построены на основе разработанного алгоритма решения МКУ. Метод в достаточной степени универсален. Он позволяет получать замкнутое решение при колебаниях ДДС общего вида, независимо от условий демпфирования и характера внешнего воздействия. Его можно использовать при проведении качественных оценок работы конструкции и при исследовании задач, связанных с вопросами ортогональности собственных форм колебаний и вопросами взаимности в ДДС, относящихся к фундаментальным проблемам строительной механики.

Метод допускает применение сложных постановок задач о действии динамических нагрузок в ДДС, учитывая требования сегодняшнего дня и акцентируя внимание на трудные для традиционного анализа задачи с неустановившимися режимами колебаний. Постановки задач касаются как видов динамических воздействий, так и сценариев нагружений (удары и импульсы различной природы, включая действие периодических импульсов: вибрационные силы с неодинаковыми параметрами возбуждения в различных узлах ДДС и т. д.). Кроме того, не теряя общности, данный подход можно использовать в динамическом анализе важнейшего класса нелинейных задач: колебаниях ДДС с нелинейной восстанавливающей силой (при упругопластическом и нелинейно-упругом анализе).

Таким образом, тема диссертационной работы, посвященной развитию метода временного анализа реакции ДДС общего вида, является актуальной.

Целью диссертационной работы является решение научно-технической проблемы, заключающейся в разработке теоретических основ, математического аппарата и технических принципов реализации нового эффективного метода интегрирования уравнений движения ДДС при нестационарном воздействии в задачах строительной механики – метода временного анализа ДДС.

Теоретическую основу метода составляет аналитический аппарат алгебры матриц в сочетании с разработанными приемами анализа МКУ.

Для достижения названной цели были поставлены и решены следующие задачи.

1. Проведение анализа и создание метода решения МКУ, вывод соотношений Виета, исследование структуры и свойств матричных корней МКУ.

2. Построение полной системы разрешающих уравнений метода временного анализа произвольной упругой ДДС (вывод интеграла Дюамеля).

3. Исследование основных свойств разрешающих уравнений динамической реакции ДДС с целью обобщения закона взаимности в упругих диссипативных системах. Установление аналитических соотношений для динамических матриц податливостей, жесткостей, скоростей и импульсов.

4. Разработка и анализ новых моделей неоднородного типа демпфирования, отвечающих реальным условиям колебаний строительных конструкций.

5. Формулировка общих положений (теорем), характеризующих качественные уровни состояний квазиупругой системы и оценки работы диссипативной конструкции.

6. Построение математических моделей расчета ДДС при движении с идеальной упругопластической диаграммой Прандтля на действие кратковременной нагрузки. Вывод полной системы разрешающих уравнений метода временного анализа неупругой реакции ДДС (обобщение интеграла Дюамеля).

7. Разработка технических приемов реализации разрешающих уравнений неупругих колебаний в зависимости от условий состояния квазиупругой системы.

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Предложен новый аналитический подход к динамическому расчету ДДС на нестационарные воздействия в задачах строительной механики, – метод временного анализа реакции, – базирующийся на разработанном математическом аппарате по решению матричных уравнений линейного и квадратичного видов.

2. Исследованы свойства и структура решения МКУ, доказана обобщенная теорема Виета; показано, что все решения МКУ структурированы в однотипные корневые пары (это понятие введено впервые); предложена итерационная схема определения корней, принадлежащих общей корневой паре; получено условие обобщенной ортогональности матрицы собственных векторов в спектральной задаче квадратичного вида.

3. Получен интеграл Дюамеля, представляющий в замкнутой матричной форме уравнение реакции упругой ДДС при нестационарном воздействии и произвольном типе демпфирования. Впервые в структуре его подынтегрального выражения содержится фундаментальная матрица соответствующего однородного дифференциального уравнения движения, построенная на основе решения МКУ. Исследованы важные для приложений динамики сооружений частные случаи интеграла Дюамеля (удар, импульс, вибрационная нагрузка и др.). Впервые в замкнутом виде решена задача о колебаниях произвольной ДДС на действие периодических импульсов.

4. Доказаны теоремы состояний, устанавливающие необходимые и достаточные условия невырожденного (вырожденного) состояния упругопластической конструкции в процессе ее реакции. Получены двухсторонние априорные

оценки спектральных норм матриц коэффициентов демпфирования и собственных частот в отдельных состояниях квазиупругой системы.

5. Разработаны математические модели неупругого расчета ДДС на основе идеальной упругопластической диаграммы Прандтля. Дано обобщение временного анализа реакции за пределом упругости при действии кратковременной нагрузки. Впервые уравнение реакции упругопластической системы получено в нетривиальной матричной форме интеграла Дюамеля.

6. Предложены новые модели неоднородного типа демпфирования (в рамках линейной теории вязкого сопротивления) для ДДС применительно к нестационарным динамическим задачам строительной механики.

7. Получены соотношения обобщенной ортогональности собственных форм колебаний произвольной упругой ДДС; дана механическая трактовка соотношений ортогональности, вытекающих из принципа Бетти.

8. Дано приложение уравнений реакции произвольной упругой ДДС к доказательству теорем взаимности, вследствие чего: расширена трактовка теорем взаимности и предложен общий метод их доказательства.

9. Впервые показано, что при общих предпосылках динамической задачи выражения векторов динамической составляющей реакции упругой ДДС и соответствующей статической составляющей связаны между собой аналитической зависимостью в виде матричной функции, характеризующей динамический эффект от действия произвольной нагрузки. Получены аналитические соотношения динамических матриц: податливостей, жесткостей, скоростей и импульсов.

На защиту выносятся.

1. Методика временного анализа реакции ДДС общего вида в динамических задачах строительной механики, теоретической основой которой является разработанный аналитический аппарат матричных уравнений.

2. Результаты исследований частных случаев интеграла Дюамеля при действии удара, вибрационной нагрузки, импульса, периодических импульсов и др.

3. Комплекс исследований по результатам анализа МКУ, в частности: свойства и структура матричных корней МКУ; обобщенная теорема Виета; итерационный алгоритм определения корней, принадлежащих общей корневой паре; условие обобщенной ортогональности матрицы собственных векторов.

4. Способ построения моделей демпфирования для учета внутреннего трения произвольной ДДС, основанный на импульсном единичном смещении дополнительных связей.

5. Результаты исследований по соотношениям обобщенной ортогональности собственных форм колебаний произвольной упругой ДДС.

6. Основные закономерности, касающиеся свойств и структуры полной системы разрешающих уравнений произвольной упругой ДДС, приводящие к выводу матричной функции, характеризующей учет динамического эффекта, и к общей схеме доказательства соотношений взаимности в диссипативных системах.

7. Теоремы состояний, формулирующие условия невырожденного (вырожденного) состояния конструкции при упругопластическом деформировании и двухсторонние априорные оценки спектральных норм матриц коэффициентов демпфирования и собственных частот.

8. Математические модели упругопластического расчета ДДС на действие кратковременной нагрузки; методика временного анализа реакции за пределом упругости, основанная на предложенных математических моделях (алгоритм, технические приемы реализации и программа расчета).

Достоверность результатов исследования подтверждается: использованием в диссертации теоретически обоснованных методов строительной механики в соединении с методами высшей математики и аппаратом матричной алгебры; замкнутой формой выведенного интеграла Дюамеля при упругих колебаниях ДДС и сравнением его частных случаев при численном решении конкретных динамических задач с известными в литературе решениями; корректным применением математических моделей неупругого расчета, обеспечивающих замкнутое решение в шаговом процессе на всех квазиупругих интервалах движения системы; получением известных классических результатов, вытекающих из общих соотношений в предельных частных случаях.

Практическая ценность работы определяется следующими положениями.

1. Общее уравнение реакции системы – интеграл Дюамеля – обладает относительно простой математической формой записи, свойственной матричной формулировке задачи. Особенно простую и компактную форму имеют его частные представления (при ударе, вибрационном воздействии и т. д.). Все вычислительные операции по данным формулам сводятся к элементарным действиям над матрицами. Поэтому данная методика временного анализа может быть рекомендована проектным организациям и различным строительным фирмам.

2. Получено решение важного в прикладном отношении класса динамических задач о колебаниях ДДС под действием периодических импульсов. Решение такого рода задач существующими методами не представляется возможным из-за сложности учета внутреннего трения в конечномерных системах.

3. Открывается возможность получения априорных оценок спектральных динамических параметров ДДС не только в процессе упругопластического решения задачи, но и на этапе, предваряющем расчет.

4. Выведенный интеграл Дюамеля сам является инструментом анализа диссипативных систем, который можно использовать как при получении соотношений взаимности, так и для построения разнообразных практических методов расчета динамических конструкций в задачах строительной механики.

5. Разработаны расчетные алгоритмы и программы по решению МКУ, которые легко адаптируются применительно к широкому спектру задач о свободных и вынужденных колебаниях ДДС. Данные алгоритмы могут быть реализованы в различных приложениях строительной механики и теории упругости. Разработаны алгоритмы и прикладные программы по вычислению упругой и упругопластической реакции каркасных многоэтажных зданий с плоской и пространственной расчетной схемой на нестационарные воздействия.

6. На основе разработанного метода временного анализа вычисленные значения параметров реакции системы в упругой и упругопластической стадии могут быть использованы при оценке погрешностей приближенных решений, полученных различными численными методами и алгоритмами.

7. Динамический анализ упругопластических ДДС легко распространяется на нелинейно-упругие задачи, что значительно расширяет класс физически-нелинейных задач строительной механики, решаемых по методике временного анализа. При этом переход от схемы упругопластического анализа к схеме нелинейно-упругого временного анализа осуществляется с минимальными затратами, связанными с коррекцией математических моделей расчета.

Проведенные в работе исследования выполнены в соответствии с планом госбюджетных научно-исследовательских работ, проводимых на кафедре строительной механики ЮУрГУ, по теме «Разработка теории и методов расчета деформируемых систем при нестационарных внешних воздействиях» (№ государственной регистрации 01.980 006125, наименование этапа: «Разработка теории, методов и программ расчета диссипативных систем при нестационарных статических и динамических воздействиях в упругой и упругопластической стадии», 1998 г.). С 1997 г. по 2000 г. работы проводились при финансовой поддержке Министерства образования РФ: грант по фундаментальным исследованиям в области архитектуры и строительных наук 1997–1998 гг. (тема проекта: «Решение некоторых задач строительной механики методом сведения к матричному квадратному уравнению»), грант по фундаментальным исследованиям в области архитектуры и строительных наук 1999–2000 гг. (тема проекта: «Использование интеграла Дюамеля в неупругом динамическом анализе конструкций»).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы по мере их получения докладывались и обсуждались: на научной конференции инженерно-строительного факультета Ставропольского политехнического института (Ставрополь, 1991); 2-й Междунар. конф. «Циклические процессы в природе и обществе» (Ставрополь, 1994); Междунар. конф. по математической физике (Челябинск, 1995); 4-й Междунар. конф. «Циклы природы и общества» (Ставрополь, 1996); ежегод. науч.-техн. конф. НГАС (Новосибирск, 1996–1997); XVI Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Методы граничных и конечных элементов» (Санкт-Петербург, 1998); Междунар. конф. «Численные и аналитические методы расчета конструкций» (Самара, 1998); Республ. науч.-техн. конф. «Архитектура и строительство. Проблемы развития теории сооружений и совершенствования строительных конструкций» (Томск, 1999); Третьих и Четвертых уральских академических чтений «Реконструкция городов, отдельных зданий, сооружений и конструкций на Урале» (Екатеринбург, 1997; Челябинск, 1999); на науч. семинаре кафедры строительной механики Уральского госуд. техн. ун-та (Екатеринбург, 1994); объедин. науч. семинаре двух кафедр («Механика сплошной среды» и «Высшая алгебра») Челябинского госуд. ун-та (Челябинск, 1995); объедин. науч. семинаре трех кафедр («Соппротивление материалов», «Механика деформируемого твердого тела и прикладная информатика» и «Высшая математика») Саратовского госуд. техн. ун-та (Саратов, 1995); на науч. семинаре кафедры механики деформируемого твердого тела и прикладной информатики Саратовского госуд. техн. ун-та (Саратов, 2002).

Публикации. Основное содержание диссертации освещено в 26 работах, включая монографию, рецензированную доктором технических наук, профессором В.В. Петровым, которому автор выражает глубокую признательность.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, восьми глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем диссертации составляет 261 с., в том числе 174 с. основного текста, 72 рисунка и 8 таблиц на 33 с., список литературы содержит 322 наименования на 27 с., приложения изложены на 19 с.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе «Обзорная часть. Состояние вопроса» отражены проблемы динамического анализа ДДС в задачах строительной механики. Приведены обзоры научно-технической литературы и основные результаты исследований в области динамики ДДС. Дана постановка задачи и указаны предполагаемые пути ее решения.

Создание расчетных алгоритмов в области динамических конструкций и новых подходов к решению краевых и начально-краевых задач строительной механики и теории упругости связано с именами выдающихся ученых В.З. Власова, И.Г. Бубнова, Б.Г. Галеркина, А.Н. Крылова, А.М. Ляпунова, П.Ф. Папковича, С.П. Тимошенко, Дж.У. Рэлея и других. Наиболее существенные результаты по становлению ряда принципиально новых физических концепций, развитию методов расчета динамических конструкций и основная проблематика приведены в трудах специалистов И.В. Ананьева, И.М. Бабакова, С.А. Бернштейна, В.Л. Бидермана, В.В. Болотина, И.И. Воровича, В.Ф. Гладкого, И.И. Гольденבלата, О.А. Горошко, И.Л. Диковича, К.С. Завриева, А.Ю. Ишлинского, В.А. Киселева, Н.В. Колкунова, Б.Г. Коренева, И.Л. Корчинского, С.С. Кохманюка, О.В. Лужина, А.И. Лурье, А.М. Масленникова, Н.А. Николаенко, А.М. Овечкина, Я.Г. Пановко, В.В. Петрова, Н.Н. Попова, И.М. Рабиновича, А.Р. Ржаницына, Г.Н. Савина, Ю.Э. Сеницкого, А.П. Сеницына, А.Ф. Смирнова, Н.К. Снитко, Е.С. Сорокина, А.П. Филиппова, А.И. Цейтлина, В.Г. Чудновского, К. Бате, Р.Л. Бисплигхоффа, Е. Вилсона, Р. Клафа, Ч.И. Крида, Д.Ж. Пензиена, В. Прагера, Дж. Рауса, Р.Л. Халфмана, С.М. Харриса и др.

Разработке методов дискретизации двумерных задач строительной механики и методов их решения посвящено громадное число публикаций отечественных и зарубежных авторов. Наиболее значительные результаты получены в работах Н.П. Абовского, Н.П. Андреева, А.Н. Елпатьевского, И.А. Ивановского, В.А. Игнатьева, В.А. Крысько, Э.Н. Кузнецова, И.Б. Лазарева, Н.Н. Леонтьева, В.В. Мокеева, В.В. Неверова, И.Г. Овчинникова, В.В. Очинского, А.А. Петракова, В.В. Петрова, В.А. Постнова, Г.И. Пшеничнова, В.В. Рогалевича, В.И. Савченкова, А.Ф. Смирнова, Д.Н. Соболева, И.И. Трянина, А.И. Тупикина, В.Н. Филатова, А.Г. Шипилова, М.К. Бемптона, Ч. Гуна, Р.Р. Крейга, Р. Сингха, Л. Уоррена, А. Хейла, Р. Хинца, *J.J. Dubois*, *A.L. de Rouvray* и других. Учет внутреннего трения в динамическом анализе осуществляли А.И. Ананьин, Г.И. Гребенюк, А.А. Кусайнов, Г.Б. Муравский, П.Ф. Недорезов, Э.Я. Неустроев, В.Т. Рассказовский, Б.С. Расторгуев, Л.М. Резников, Е.С. Сорокин, А.П. Филиппов, А.И. Цейтлин, Д.А. Дадеппо, Т.К. Кафи, С. Кренделл, Д.У. Никольсон и многие другие.

Существенный вклад в развитие качественных методов анализа внесли Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн, Я.Л. Нудельман, Р.В. Матевосян, Л.С. Ляхович, Е.А. Ларионов, А.П. Сейранян и т. д. Вопросы ортогональности собственных форм колебаний неконсервативных систем изучались И.А. Пашковым, И.Е. Трояновским, Ч.И. Кридом, С.М. Харрисом и др.

Исследования по соотношениям взаимности, начиная с трудов выдающихся ученых Дж.К. Максвелла, Э. Бетти, Рэлея, получили развитие в области строительной механики нелинейных систем (Н.И. Безухов, И.И. Гольденблат, Э.Н. Кузнецов, А.И. Лурье, В.Э. Новодворский, И.М. Рабинович, А.Р. Ржаницын и др.) и в области динамических задач теории упругости (Л.А. Айнола, D. Graffi, R.G. Dayton, F.L. Di Maggio и др.).

Создание деформационной теории пластичности (А.А. Илюшин, Генки, В.Д. Ключников) привело к активной разработке исследований в области упруго-пластических систем (Н.И. Безухов, М.П. Галин, А.А. Гвоздев, М.И. Ерхов, В.А. Пальмов, А.М. Проценко, И.М. Рабинович, А.Р. Ржаницын, А.А. Чирас и др.).

Вопросы колебаний конструкций с учетом упругопластических деформаций на нестационарные воздействия изучались в трудах отечественных (Л.А. Бородин, Г.В. Васильков, И.И. Гольденблат, С.А. Девятов, И.Л. Дикович, В.И. Жарницкий, А.В. Забегаев, А.И. Кибец, Б.Г. Коренев, В.А. Крысько, О.Г. Кумпjak, О.В. Лужин, Н.А. Николаенко, А.М. Овечкин, Л.Н. Панасюк, Г.И. Попов, Н.Н. Попов, Б.С. Расторгуев, Б.Г. Сапунов, А.П. Сеницын, Б.М. Теренин, Ю.Т. Чернов, Н.Н. Шапошников и др.) и зарубежных ученых (С.Р. Боднер, Х. Бонблюст, А. Кейл, М. Конрой, Б. Коттер, П.С. Саймондс, Д. Сейлер, В. Томпсон и др.).

По факту обзора известных аналитических методов в динамическом расчете ДДС следует, что в подавляющем большинстве динамический анализ связан с упрощающими предпосылками относительно типа внутреннего трения (пропорциональное демпфирование), режима вынужденных колебаний (установившиеся колебания) или вида динамической нагрузки (периодические воздействия). При исследовании нестационарных процессов обычно ограничиваются рассмотрением одиночных ударов или импульсов.

На основании обзора литературных источников по применению МКУ в приложениях динамики ДДС сделан вывод о том, что в анализе МКУ отсутствует единая теория и системный подход. Все решения уравнений колебаний ДДС, полученные с использованием алгебраической проблемы, — малочисленны, крайне разрозненны и громоздки. Отмечено, что разработка аналитических процедур по решению МКУ — ключ к разрешению всей проблемы динамического анализа ДДС.

Вторая глава «Матричное квадратное уравнение, его анализ и решение» посвящена разработке итерационного алгоритма решения МКУ, изучению структуры и свойств матричных корней МКУ и других соотношений. Полученные в этой главе результаты по разработке математического аппарата являются теоретической основой для всех последующих исследований.

МКУ имеет вид

$$AS^2 + BS + C = 0, \quad (1)$$

где $A = A^T, B = B^T, C = C^T \in M_n(\mathbb{R})$ – заданные симметрические вещественные, $S \in M_n(\mathbb{C})$ – искомая матрицы. Матрица S , удовлетворяющая (1), является решением (корнем) МКУ. Множество всех решений обозначено через $D_n(C)$.

Всего в главе сформулировано и доказано восемь теорем, шесть следствий и две леммы, в которых обобщены основные результаты анализа МКУ.

К наиболее значительным результатам данной главы относится анализ вспомогательного матричного линейного уравнения (лемма 1, теорема 1 и два следствия) $S^{(i)T}U_0 = U_0S^{(j)}$, в котором $S^{(i)}, S^{(j)}$ – заданные матрицы, U_0 – искомая матрица. Детально изучена структура общего решения U_0 линейного уравнения. Результаты этого анализа получили развитие в теоремах Виета о сумме и произведении матричных корней МКУ (теоремы 2, 3 и следствия к ним):

Теорема 2.2 (Обобщенная теорема Виета). *Для того, чтобы матрицы $S^{(i)}, S^{(j)}$ ($i \neq j$) являлись решением МКУ (1), необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли двум матричным соотношениям:*

$$S^{(i)T}A + AS^{(j)} + B = U_0^{(ij)}, \quad S^{(i)T}AS^{(j)} - C = U_0^{(ij)}S^{(j)},$$

где $U_0^{(ij)}$ принадлежит множеству общих решений U_0 уравнения $S^{(i)T}U_0 = U_0S^{(j)}$.

Теорема 2.3 *Если в спектрах матриц $S^{(i)}, S^{(j)}$ ($i \neq j$) нет общих характеристических чисел, то для того, чтобы эти матрицы были корнями МКУ, необходимо и достаточно, чтобы $S^{(i)T}A + AS^{(j)} = -B, S^{(i)T}AS^{(j)} = C$.*

Для матрицы S с невещественными элементами формулы Виета принимают вид: $S^*A + AS = -B, S^*AS = C$ (следствие к теореме 2.3).

При $\det A \neq 0$ для МКУ получено множество решений, структурированное в однотипные корневые пары:

$$S_{1,2}^{(i)} = A^{-1}(-B + V^{(i)} \pm U^{(i)})/2 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где $V^{(i)} = -V^{(i)T}, U^{(i)} = U^{(i)T}$ – матрицы заданной структуры.

Известно, что при конечной разрешимости МКУ соответствующая этому уравнению алгебраическая (спектральная) задача

$$[A(\lambda_j^{(k)})^2 + B\lambda_j^{(k)} + C]P_j^{(k)} = 0 \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, 2)$$

имеет $2n$ различных решений в виде характеристических чисел $\lambda_j^{(k)}$:

$$\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)} \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

Здесь $P_j^{(k)}$ – собственные векторы спектральной задачи. При этом любой корень S_k из множества (2) содержит в своем спектре n собственных значений, составляющих половину спектра (3): $S_k = P^{(k)}\Lambda^{(k)}(P^{(k)})^{-1}$, где $\Lambda^{(k)} = \text{diag}(\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)})$; $P^{(k)} = [P_1^{(k)}, \dots, P_n^{(k)}]$ – преобразующая матрица. В связи с этим общее число решений МКУ, заключенных в корневых парах (2), равно числу сочетаний C_{2n}^n .

Особо отмечено, что все известные схемы решения МКУ (на основе ортогональных методов) вычисляют только один матричный корень, а не пару корней, как этого требует построение общего интеграла однородного ОДУ движения ДДС. В работе проведены исследования спектральных свойств корней МКУ:

$S_{1,2}^{(i)} = A^{-1}(-B + V^{(i)} \pm U^{(i)})/2$, $S_{1,2}^{(j)} = A^{-1}(-B + V^{(j)} \pm U^{(j)})/2 \in D_n$ в зависимости от их принадлежности к одной ($i = j$) или разным ($i \neq j$) корневым парам (теоремы 5, 6, 7 и следствия к ним). В частности, показано (теоремы 5, 6), что для любых двух корней $S^{(i)}$, $S^{(j)}$ ($i \neq j$) из разных корневых пар (2) их спектры содержат общие характеристические числа. Поэтому суммарный спектр этих матриц не охватывает полного спектра (3) алгебраической задачи. Этот факт делает невозможным построение общего интеграла однородного ОДУ с помощью матриц $S^{(i)}$, $S^{(j)}$. Следовательно, если корни найдены с помощью стандартных алгебраических процедур, не учитывающих специфических свойств решений, то построенные на их основе фундаментальные матрицы не позволяют гарантированно осуществлять решение уравнения движения ДДС, что свидетельствует о неприспособленности ортогональных методов для выполнения подобной задачи.

Напротив, если матричные корни – из одной корневой пары (2), то, в соответствии с теоремой 7 и следствием к ней, их спектры не пересекаются между собой и в сумме дают весь спектр (3). Только в этом случае возможно построение общего интеграла однородного ОДУ движения ДДС, причем из всего множества корней в (2) достаточно взять только два решения, принадлежащих какой-либо одной корневой паре (при любом i).

На основании леммы 2 получена эквивалентная МКУ система уравнений

$$S^T A + AS + B = U, \quad S^T AS - C = US,$$

из анализа которых построены разрешающие уравнения МКУ (теорема 4):

$$U = A\sqrt{-A^{-1}D}, \quad UA^{-1}(B - V) = (B + V)A^{-1}U, \quad (4)$$

где $D = 4C - (B + V)A^{-1}(B - V)$ – матрица-дискриминант МКУ.

Предложен метод нахождения матричных корней S_k ($k = 1, 2$), принадлежащих общей корневой паре в (2), сводящий задачу отыскания решения МКУ к проблеме определения значений V , U заданной структуры. Для вычисления матриц V , U в (4) применена итерационная схема, согласно которой системы разрешающих уравнений на k -м итерационном шаге имеют вид:

$$\begin{cases} U^{(k)} = A\sqrt{-A^{-1}D^{(k)}}, & D^{(k)} = 4C - (B + V^{(k)})A^{-1}(B - V^{(k)}), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} U^{(k)}A^{-1}(B - V^{(k+1)}) = (B + V^{(k+1)})A^{-1}U^{(k)}. \end{cases} \quad (6)$$

Шаг метода требует отыскания дискриминанта $D^{(k)}$ в (5) при заданном значении кососимметрической матрицы $V^{(k)}$. После извлечения корня квадратного из $-A^{-1}D^{(k)}$ и вычисления значения симметрической матрицы $U^{(k)}$ из (6) формируется уравнение Ляпунова относительно нового приближения $V^{(k+1)}$.

$$U^{(k)}A^{-1}V^{(k+1)} + V^{(k+1)}A^{-1}U^{(k)} = U^{(k)}A^{-1}B - BA^{-1}U^{(k)}$$

Найденное значение $V^{(k+1)}$ служит основой для $k+1$ -го шага итераций.

Приведены основные соотношения МКУ в базисе собственных векторов матрицы $S = PAP^{-1} \in M_n$ при условии простого спектра. В новом базисе, определяемом преобразующей матрицей P , получены нормальная форма МКУ, соотношение обобщенной ортогональности матрицы P и условие ее нормирования.

В третьей главе «Построение и анализ моделей демпфирования» предложены новые модели неоднородного демпфирования и дан анализ известных моделей пропорционального демпфирования.

Анализ колебаний произвольной упругой ДДС с внутренним трением, учитываемым на основе модели упруговязкого сопротивления, требует рассмотрения матричного дифференциального уравнения движения

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = P(t), \quad (7)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, $C = C^T = [c_{ij}]$, $K = K^T = [r_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ($i, j = 1, \dots, n$) – положительно определенные матрицы инерции, демпфирования и жесткости соответственно; $Y(t) = [y_i(t)]$, $P(t) = [p_i(t)] \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, n$) – векторы перемещений и заданных внешних воздействий; n – число степеней свободы ДДС.

Матрица $\Phi(t) = e^{St}$ является фундаментальной матрицей однородного ОДУ, соответствующего (7), если $S \in M_n(\mathbb{C})$ (суть матрица внутренних динамических параметров ДДС) удовлетворяет характеристическому МКУ

$$MS^2 + CS + K = 0. \quad (8)$$

Выражение корневой пары и система разрешающих уравнений МКУ, согласно (2) и (4), представлены соотношениями:

$$S_{1,2} = M^{-1}(-C + V \pm U)2, \quad (9)$$

$$U = M\sqrt{-M^{-1}D}, \quad (C + V)M^{-1}U = UM^{-1}(C - V), \quad (10)$$

где $D = 4K - (C + V)M^{-1}(C - V)$.

Выполняя разложение S_k в базисе собственных векторов (индекс k опущен):

$$S = PAP^{-1} \in D_n(\mathbb{C}), \quad (11)$$

будем иметь: $P \in M_n(\mathbb{C})$ – матрицу собственных форм демпфированных колебаний; $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -G + iW$ – матрицу спектральных характеристик ДДС, в которой $G = -\text{Re}\Lambda = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, $W = \text{Im}\Lambda = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ – соответственно матрицы коэффициентов демпфирования и частот собственных колебаний.

Для приведенной матрицы демпфирования получено условие малости диссипации ДДС в виде априорной оценки верхней границы ее нормы

$$M(\tilde{C}) \leq 2\xi_1 \sqrt{nM(\tilde{K})}.$$

Здесь $\tilde{K} = M^{-0.5}KM^{-0.5}$, $\tilde{C} = M^{-0.5}CM^{-0.5}$. Норма матрицы $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, \dots, n$) введена по формуле $M(A) = n \max |a_{ij}|$. Параметр относительного демпфирования ξ_1 характеризует верхнюю границу допустимого уровня малой диссипации в ДДС. В обычных условиях колебаний инженерных конструкций величина $\xi_1 \leq 0.2$.

Для произвольной ДДС реализован подход к построению новых моделей демпфирования. Введена вспомогательная система с дополнительными жесткими опорами, закрепляющими массы от возможных перемещений вдоль степеней свободы. Для каждой введенной опоры поочередно задается *единичное импульсное перемещение* с характеристикой воздействия (временем импульсного пере-

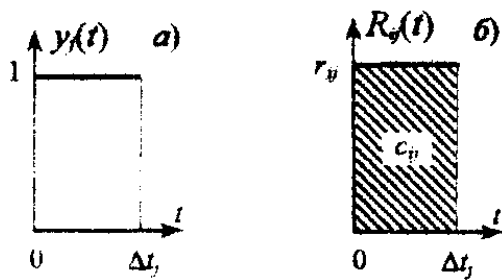


Рис. 1

мещения), равной $\Delta t_j = \gamma / w_j$, где $\gamma = \delta / \pi$ (δ – логарифмический декремент колебаний); w_j – частота собственных колебаний вспомогательной консервативной системы с j -й подвижной связью (рис. 1, а). От заданных импульсных смещений описываются реакции во всех дополнительных связях, имеющих смысл мгновенных реактивных импульсов: $c_{ij} = r_{ij} \Delta t_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) (рис. 1, б).

В результате построены следующие модели демпфирования:

$$C = \gamma K W_0^{-1} = KT, \quad (12)$$

$$C_d = \gamma K_d W_0^{-1} = \gamma \sqrt{K_d M} = K_d T, \quad C_s = (KT + TK)/2,$$

где $T = \gamma \sqrt{MK_d^{-1}} = \text{diag}(\Delta t_1, \dots, \Delta t_n)$; $W_0 = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$; $K_d = \text{diag}(r_{11}, \dots, r_{nn})$ – диагональная матрица, полученная из матрицы жесткости K обнулением всех ее побочных элементов; $w_k = (r_{kk} / m_k)^{0.5}$ ($k = 1, \dots, n$).

Модель C_d не учитывает диссипативных связей в ДДС, а C_s построена путем симметризации модели (12): $(C + C^T)/2$. Доказано, что для всех предложенных моделей характерен неоднородный тип демпфирования.

Проведен анализ моделей пропорционального демпфирования и показано, что их реализация требует выполнения условия $V = 0$ в (9). Найдена связь известных условий разделимости уравнения движения в нормальных координатах (Т.К. Caughey (1963 г.), D.W. Nicholson (1978 г.), А.А. Кусаинов (1987 г.)):

$$KM^{-1}C = CM^{-1}K, \quad CK^{-1}M = MK^{-1}C, \quad MC^{-1}K = KC^{-1}M$$

с одним из разрешающих уравнений МКУ в (10) $UM^{-1}C = CM^{-1}U$, являющимся наиболее общим условием пропорционального демпфирования.

Приведен анализ собственных колебаний 3-этажного каркасного здания (рис. 2). Сечение железобетонных колонн каркаса: 0.4x0.4 м. РДМ здания имеет 9 степеней свободы (рис. 2, б). Значения жесткости колонн при изгибе и кручении составили: $EJ_x = EJ_y = 50133 \text{ кНм}^2$, $GJ = 33690 \text{ кНм}^2$. Матрица жесткости

пространственного каркаса имеет следующий вид: $K = \begin{bmatrix} K_{xy} & K_{xyz} \\ K_{zxy} & K_z \end{bmatrix}$, где

$$K_{xy} = \begin{bmatrix} 4127 & 0 & -1934 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4127 & 0 & -1934 & 0 & 0 \\ -1934 & 0 & 4563 & 0 & -2629 & 0 \\ 0 & -1934 & 0 & 4563 & 0 & -2629 \\ 0 & 0 & -2629 & 0 & 2629 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2629 & 0 & 2629 \end{bmatrix} \text{ кН/см}, \quad K_z = \begin{bmatrix} 8.062 & -1.871 & 0 \\ -1.871 & 4.410 & -2.539 \\ 0 & -2.539 & 2.539 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ кНсм},$$

$$K_{zxy} = \begin{bmatrix} 6.533 & 16.676 & -5.802 & -17.407 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \text{ кН}; \quad K_{xyz} = (K_{zxy})^T.$$

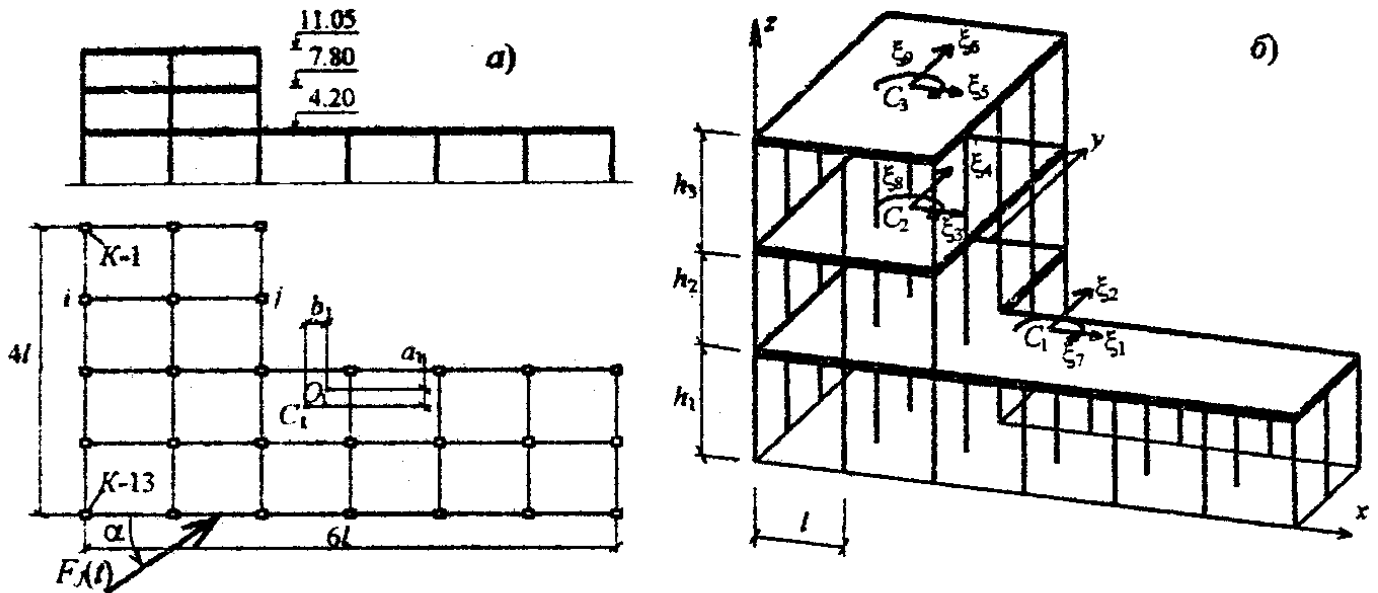


Рис. 2. Железобетонное 3-этажное каркасное здание:

а – конструктивная схема здания, б – расчетная динамическая модель (РДМ)

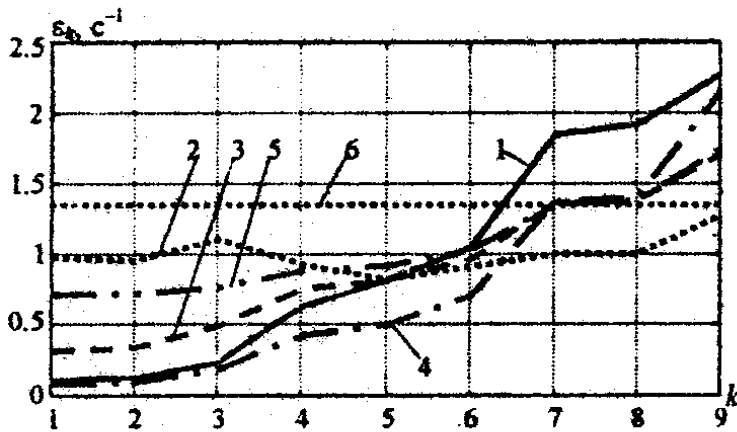


Рис. 3. Кривые коэффициентов демпфирования, построенные на моделях:

1 – $C = KT$ и $C_d = (KT + TK)/2$;
 2 – $C_d = K_d T$; 3 – А.И. Цейтлина, $C = \gamma M \sqrt{M^{-1} K}$; 4–6 – Рэлея, $C = aM + \nu K$
 (4 – $a = 0$, $\nu = 1.52 \cdot 10^{-3}$; 5 – $a = 1.33$,
 $\nu = 7.59 \cdot 10^{-4}$; 6 – $a = 2.67$, $\nu = 0$)

Инерционные параметры системы по этажам составили: $m_1 = 7.19 \text{ кНс}^2/\text{см}$, $m_2 = 4.18 \text{ кНс}^2/\text{см}$, $m_3 = 3.05 \text{ кНс}^2/\text{см}$; моменты инерции перекрытий этажей равны: $J_1 = 10\,785\,000 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$, $J_2 = 2\,508\,000 \text{ кН} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$, $J_3 = 1\,830\,000 \text{ кН} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$. В результате матрица инерции M каркаса представлена в виде $M = \text{diag}(M_{xy}, J_z)$, где $M_{xy} = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$, $J_z = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$.

На основе решения уравнений (10) по схеме (5), (6) для предложенных и известных моделей демпфирования (при $\delta = 0.2$) проведен анализ спектральных параметров системы. Сравнение численных оценок уровней демпфирования показывает, что для модели (12) наиболее близкие результаты дают модели А.И. Цейтлина и Рэлея с внутренним типом демпфирования $C = bK$ (Рис. 3).

Четвертая глава «Угругий анализ дискретных диссипативных систем» посвящена разработке нового метода временного анализа реакции ДДС, приводящего к замкнутому решению в форме интеграла Дюамеля.

В начале главы дана систематизация свойств матриц и соотношений

$$\begin{cases} V = -V^T, & U = U^T, & S^T U = US, & \Phi(t)^T U = U \Phi(t), \\ S_k^T M + M S_l = -C, & S_k^T M S_l = K & (k, l = 1, 2; k \neq l), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \det S_k \neq 0 \quad (k = 1, 2), & \det U \neq 0; \\ S_1 = S, \quad S_2 = \bar{S}, \quad V = \operatorname{Re} V, \quad U = i \operatorname{Im} U, \end{cases}$$

играющих важную роль при интегрировании уравнения (7). Отмечено, что свойства (13) являются базовыми и проявляются для любой колебательной системы (консервативной, диссипативной, упругой, упругопластической и т. д.). Для их выполнения важен лишь факт симметрии коэффициентов МКУ (8). Остальные свойства выполняются в зависимости от физических условий задачи.

Получены условия обобщенной ортогональности для любой пары собственных форм колебаний P_j, P_i ($i \neq j$) и условия их нормирования при $i = j$:

$$P_j^T [-M(\epsilon_j + \epsilon_i) + C + iM(\omega_j + \omega_i)] P_i = 0, \quad P_j^T [-2M\epsilon_j + C + 2iM\omega_j] P_j = 1.$$

Коэффициенты демпфирования ϵ_j, ϵ_i и собственные частоты ω_j, ω_i принадлежат соответствующим собственным значениям: $\lambda_j = -\epsilon_j + i\omega_j, \lambda_i = -\epsilon_i + i\omega_i$ и формам колебаний: P_j, P_i ($i, j = 1, \dots, n$). Дана механическая трактовка соотношений ортогональности собственных форм. Показано, что эти соотношения вытекают из принципа Бетти, распространенного на область диссипативных систем.

Разрешающие уравнения динамической задачи выведены путем непосредственного интегрирования уравнения движения ДДС (7), начиная от решения характеристического МКУ (8) через построение фундаментальных матриц однородного ОДУ и заканчивая получением общего интеграла неоднородного уравнения движения (7) методом вариации произвольных постоянных. Полная система уравнений динамической реакции произвольной ДДС имеет вид

$$\begin{cases} Y(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ \Phi(t-t_0)^T U^{-1} M [-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0] + U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau \right\}, \\ \dot{Y}(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ S U^{-1} [\Phi(t-t_0)^T M (-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau] \right\}. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнения (14) в замкнутой форме позволяют определить перемещения и скорости узлов упругой ДДС от действия произвольной динамической нагрузки $P(t)$. Первые члены матричных уравнений выражают реакцию системы при свободных колебаниях, совершаемых под действием начальных условий (векторы Y_0, \dot{Y}_0), вторые – при вынужденных колебаниях.

Уравнение перемещений в (14) – наиболее общая матричная форма записи интеграла Дюамеля для ДДС. Подчеркнута отличительная особенность этого уравнения от известных интегралов Дюамеля, состоящая в том, что оно не требует построения ИПФ – наиболее трудоемкой части анализа. Выражение подынтегральной матричной функции $H(t-\tau) = 2\operatorname{Re} \{ \Phi(t-\tau) U^{-1} \}$ записано в простой математической форме и содержит величины $U, \Phi(t-\tau)$, вычисление которых основано на решении МКУ, не прибегая к его спектральному разложению. Известный аналог матрицы $H(t-\tau)$ (матрица функций Грина) в общем случае не имеет аналитического представления. Это является сильным препятствием при определении динамической реакции на основе ИПФ

В простейших случаях, важных для приложений строительной механики, из (14) при $(t_0 = 0) Y_0 = \dot{Y}_0 = 0$ получены вычислительные формулы для интеграла Дюамеля (рис. 4, 5).

Внезапно приложенные силы постоянной величины, исчезающие при $t = t_1$: $P(t) = P_0$, где $P_0 = [p_{0j}]$ ($j = 1, \dots, n$) (рис. 4, а). После интегрирования в (14) уравнение реакции ДДС на активном участке нагружения принимает вид ($t \leq t_1$):

$$Y(t) = 2\text{Re} \{ [\Phi(t) - E] (US)^{-1} \} P_0, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ \Phi(t) U^{-1} \} P_0,$$

где E – единичная матрица. При $t \geq t_1$ система совершает свободные колебания под действием начальных условий:

$$Y_1(t) = 2\text{Re} \{ \Phi(t) [\tau E - \Phi(-t_1)] (US)^{-1} \} P_0, \quad \dot{Y}_1(t) = 2\text{Re} \{ \Phi(t) [E - \Phi(-t_1)] U^{-1} \} P_0.$$

Вибрационная нагрузка $P(t) = \sin(\theta t + \varphi) P_0$. Здесь $\theta = \text{diag}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$, $\varphi = \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – диагональные матрицы угловых частот и начальных фаз вибрационных сил; $P_0 = [p_{0j}]$ ($j = 1, \dots, n$) – вектор амплитуд возмущающих сил. На рис. 4, б показаны параметры нагрузки, действующей в j -м узле.

Полная реакция системы определена векторами перемещений и скоростей

$$Y(t) = 2\text{Re} [U^{-1} I(t)] P_0, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re} [S U^{-1} I(t)] P_0. \quad (15)$$

Вычисление (15) связано с решением непрерывного уравнения Сильвестра

$$(S^T)^2 I(t) + I(t) \theta^2 = F(t), \quad (16)$$

где искомая и заданная матричные функции $I(t)$ и $F(t)$ представлены в виде

$$I(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)^T \sin(\theta\tau + \varphi) d\tau,$$

$$F(t) = S^T [\Phi(t)^T \sin \varphi - \sin(\theta t + \varphi)] + [\Phi(t)^T \cos \varphi - \cos(\theta t + \varphi)] \theta.$$

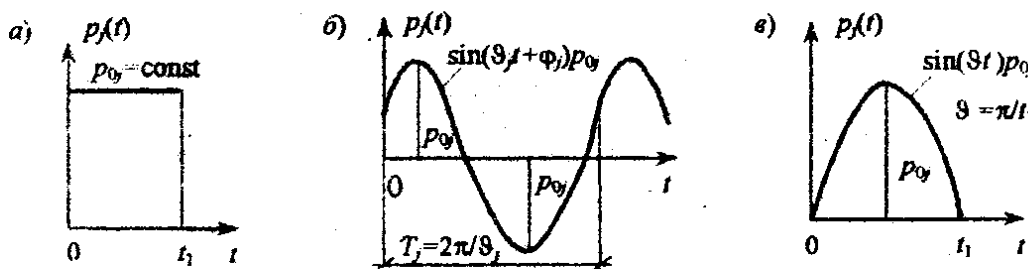


Рис. 4

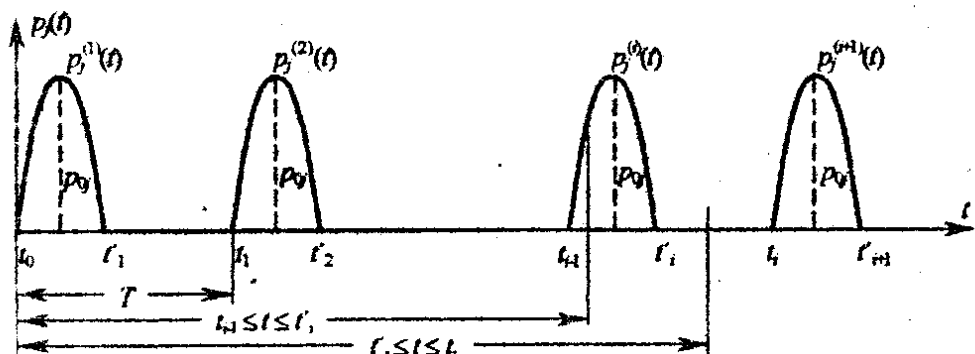


Рис. 5

Исследованы случаи разрешимости уравнения (16). При полной диссипации ДДС ($\det C > 0$) решение уравнения (16) всегда единственно. При колебаниях консервативной системы ($C = 0$) существуют условия для неоднозначного решения. Это происходит при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний (резонанс). Показано, что (16) эквивалентно n векторным уравнениям:

$$[(S^T)^2 + \mathfrak{D}_k^{-1}E]I_k(t) = F_k(t) \quad (k = 1, \dots, n),$$

где $I_k(t)$, $F_k(t)$ — k -е столбцы матриц $I(t)$, $F(t)$.

Синусоидальный импульс $P(t) = \sin(\theta t)P_0$, где $\theta = E\pi/t_1$; $P_0 = [p_{0j}]$ ($j = 1, \dots, n$) (рис. 4, в). Реакция ДДС на активном участке ($t \leq t_1$) вычисляется в соответствии с (15), где матричная функция $I(t)$ определена при $\varphi = 0$: $I(t) = [(S^T)^2 + \theta^2]^{-1}F(t)$. Реакция системы при $t \geq t_1$ выражена уравнениями:

$$Y_1(t) = 2\text{Re} [Z(t)]P_0, \quad \dot{Y}_1(t) = 2\text{Re} [S Z(t)]P_0,$$

где $Z(t) = [\Phi(t) + \Phi(t-t_1)][U(S^2 + \theta^2)]^{-1}\theta$.

Периодические импульсы. На рис. 5 показаны импульсы сил, действующие в j -м узле конструкции. Рассмотрено действие периодических импульсов прямоугольной и синусоидальной форм постоянной длины ($t_a = t_i' - t_{i-1}$), периодичности ($T = t_i - t_{i-1}$) и амплитуды p_{0j} .

Вычисление параметров реакции ДДС от действия последующих импульсов обеспечивается на основе информации (в виде начальных условий: Y_0 , \dot{Y}_0) о кинематических характеристиках узлов системы, вызываемых предыдущим импульсным воздействием. Получена система уравнений, определяющих реакцию при вынужденных колебаниях от действия i -й группы импульсов ($t_{i-1} \leq t \leq t_i'$):

$$Y(t) = 2\text{Re} \{X(t)\}, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{S X(t)\}, \quad X(t) = Z(t) + \Psi(t)P_0, \quad (17)$$

где

$$Z(t) = \Phi(t-t_{i-1})U^{-1}M[-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0].$$

Для случая прямоугольной и синусоидальной форм импульсов матричная функция $\Psi(t)$ представлена соответствующими выражениями:

$$\Psi(t) = [\Phi(t-t_{i-1}) - E](US)^{-1},$$

$$\Psi(t) = [\theta \Phi(t-t_{i-1}) - S \sin(\theta(t-t_{i-1})) - \theta \cos(\theta(t-t_{i-1}))][U(S^2 + \theta^2)]^{-1}.$$

После исчезновения i -й группы импульсов ДДС совершает свободные колебания на интервале времени ($t_i' \leq t \leq t_i$):

$$Y(t) = 2\text{Re} \{Z(t)\}, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{S Z(t)\}, \quad Z(t) = \Phi(t-t_i')U^{-1}M(-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0)$$

под действием начальных условий, назначаемых на основе (17) в конце предыдущего интервала времени: $Y_0 = Y(t_i')$, $\dot{Y}_0 = \dot{Y}(t_i')$.

Приведен анализ реакции каркасного здания, изображенного на рис. 2, на действие периодических синусоидальных импульсов и вибрационной нагрузки. В соответствии с РДМ (рис. 2, б), вектор $Y(t)$ (17) имеет следующую структуру:

$Y(t) = [x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t), x_3(t), y_3(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]^T$, где $x_i(t), y_i(t)$ – поступательные перемещения центра тяжести перекрытия i -го этажа вдоль осей x и y соответственно; $\varphi_i(t)$ – угол поворота перекрытия вокруг центра жесткости упругих связей i -го этажа.

Векторы сил действуют в уровнях перекрытий под углом α к оси x (рис. 2, а). Амплитуды импульсного воздействия на каркас вычислялись исходя из нормативного значения ветрового давления на поверхность здания, равного $q = 3.5 \cdot 10^{-5}$ кН/см². Для вектора амплитуд $P_0 = [F_0, M_0]^T$ при $\alpha = 45^\circ$ имеем $F_0 = [33, 33, 22, 22, 10, 10]$ кН; $M_0 = [13608, 0, 0]$ кНсм. При длине импульсов $t_a = 0.15$ с рассмотрено действие на каркас одиночных ударов и периодических импульсов с периодичностью, равной половине периода: $T = 0.5T_1 = 0.3332$ с и периоду основного тона колебаний $T = T_1 = 0.6663$ с, где $T_1 = 2\pi / \omega_1, \omega_1 = 9.4298$ с⁻¹.

На рис. 6–9 приведены осциллограммы параметров динамической реакции каркаса при периодичности импульсов $T_1/2$. Перемещения (рис. 6) и скорости (рис. 7) центров тяжести перекрытий на осциллограммах представлены обеими линейными составляющими в направлении осей x (а), y (б) и угловой составляющей (в); восстанавливающие (рис. 8) и диссипативные (рис. 9) силы, действующие в перекрытиях этажей, – линейной составляющей по оси x (а) и угловой составляющей (б). Сравнительный анализ реакции здания оценивался с помощью модели А.И. Цейтлина $C = \gamma M \sqrt{M^{-1}K}$ (пунктир).

Проведен анализ наиболее загруженных колонн каркаса при варьировании ряда параметров периодического импульса. При циклическом изменении параметров t_a и α строились поверхности максимальных нормальных напряжений в зависимости от периодичности импульсов. Число повторений импульсов во всех случаях принималось, равным 5.

На рис. 10, а приведена поверхность нормальных напряжений, построенная на сетке из 45×33 узлов при периодичности импульсов $T = 2t_a$. Интервалы варьируемых величин: $t_a \in [0.02, 0.9]$ с (при шаге $\Delta t_a = 0.02$), $\alpha \in [0, \pi/2]$ рад (при шаге $\Delta \alpha = \pi/64$ рад). Шаг временного анализа на активном участке составлял 0.01 с, на участке свободных колебаний – 0.016 с. Рассматриваемый режим нагружения (при $T = 2t_a$) характерен для случая действия ветровой нагрузки, пульсационная составляющая которой может быть моделирована в виде периодического импульса. Поверхность нормальных напряжений, построенная при периодичности импульсов $T = 0.3332$ с (рис. 10, б), имеет следующие характеристики. Сетка содержит 21×17 узлов, параметры нагружения: $t_a \in [0.01, 0.31]$ с; $\alpha \in [0, \pi/2]$ рад. Шаг временного анализа – 0.01 с.

Вибрационное воздействие на каркас осуществлялось с помощью двух сил $F_i(t) = F_{0i} \sin(\vartheta_i t + \varphi_i)$ ($i = 1, 3$), действующих в уровнях перекрытий 1-го и 3-го этажей. Причем вектор силы $F_1(t)$ совпадает с направлением оси y и приложен к центру тяжести перекрытия 1-го этажа, а вектор $F_3(t)$ совпадает с направлением оси x , действуя по линии $i-j$ на расстоянии l от центра тяжести перекрытия 3-го этажа (рис. 2, а). Параметры нагрузки: $F_{01} = 15$ кН, $\vartheta_1 = 96$ с⁻¹, $\varphi_1 = 0$; $F_{03} = 20$ кН, $\vartheta_3 = 120$ с⁻¹, $\varphi_3 \neq 0$.

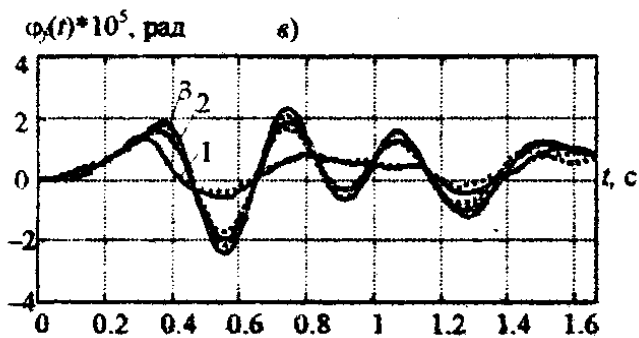
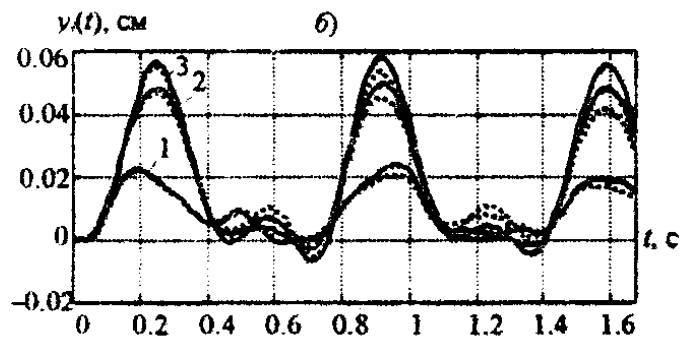
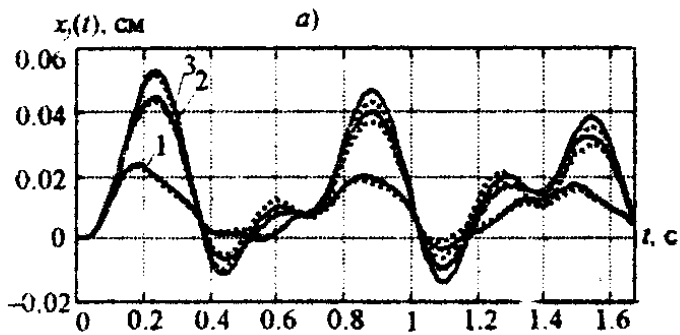


Рис. 6

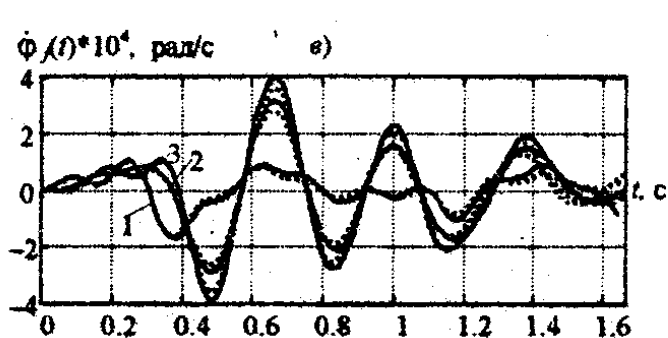
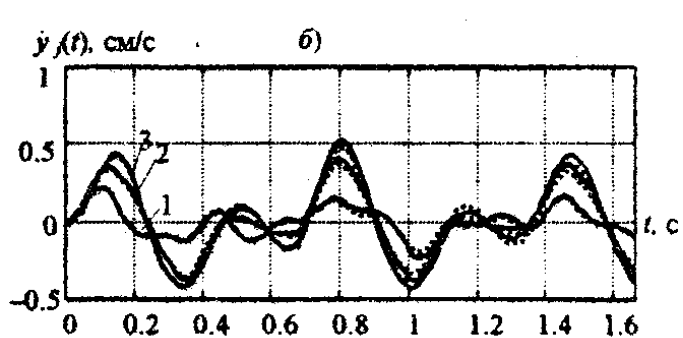
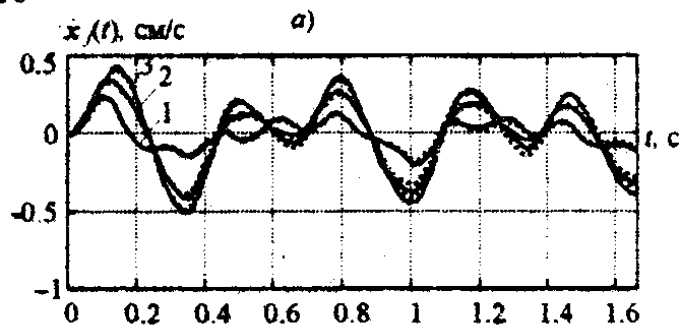


Рис. 7

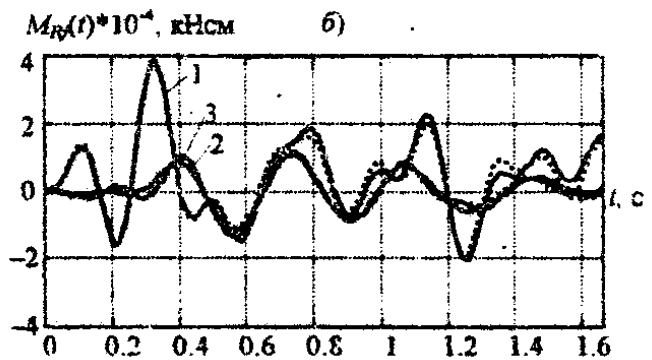
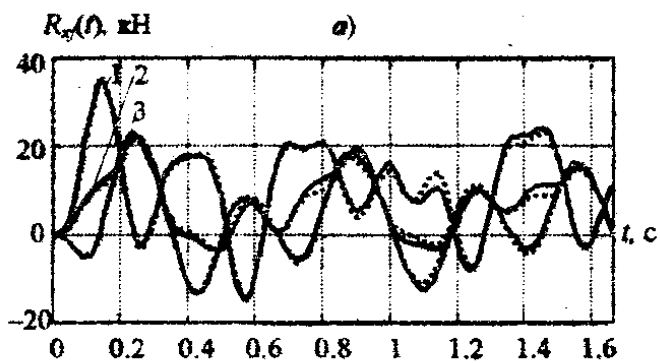


Рис. 8

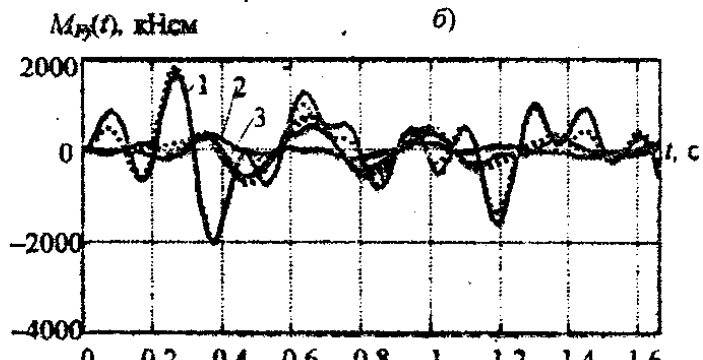
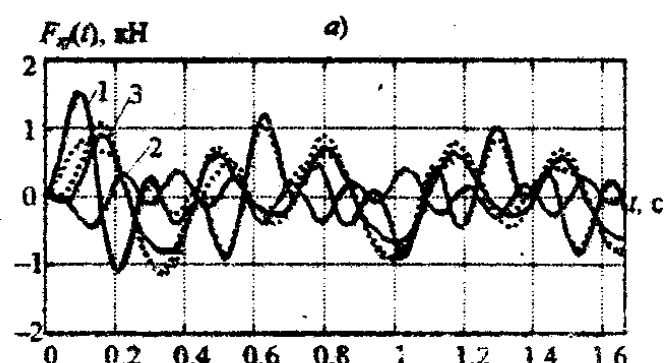


Рис. 9

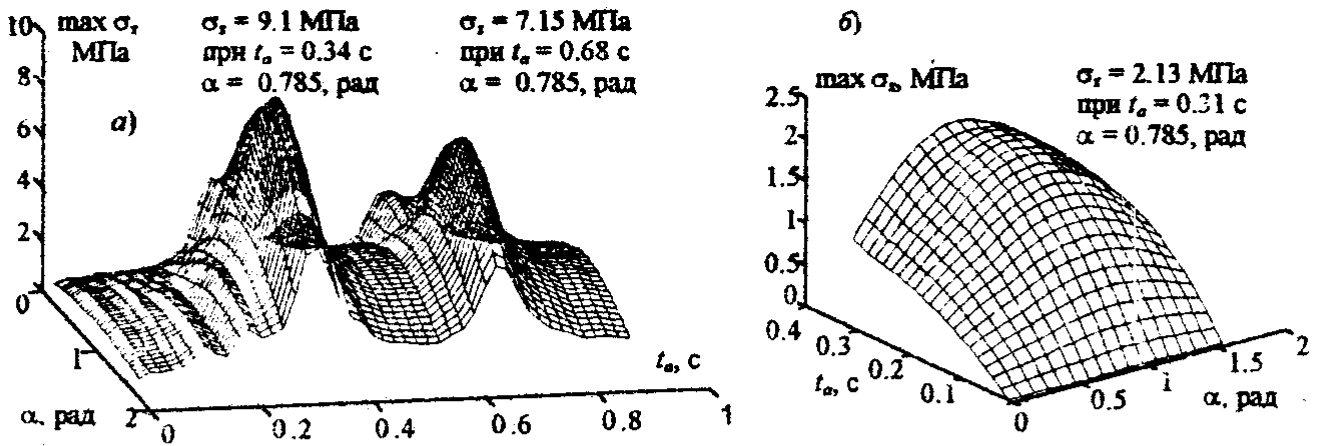


Рис. 10. Поверхности нормальных напряжений в колоннах каркасного здания при действии периодического импульса с периодичностью

а - $T = 2t_0$; б - $T = T_1/2$, где $T_1 = 0.6663 \text{ с}$ - период основного тона колебаний

Вектор амплитуд $P_0 = [F_0, M_0]^T$ имеет следующие значения: $F_0 = [0, 15, 0, 0, 20, 0] \text{ кН}$, $M_0 = [500, 0, 12000] \text{ кНсм}$. Моментная составляющая $M_{01} = 500 \text{ кНсм}$ вектора M_0 , действующая в перекрытии 1-го этажа, получена вследствие не совпадения положения центра тяжести C_1 перекрытия с центром жесткости O_1 упругих связей (рис. 2, а).

Временной анализ реакции каркаса проводился при изменении фазы φ_3 силы F_3 в интервале $[0, 2\pi]$ с шагом $\Delta\varphi = \pi/36 \text{ рад}$ (5°) относительно нулевой начальной фазы φ_1 нагрузки F_1 . По результатам анализа наибольшие отклонения в максимальных значениях нормальных напряжений и относительных перемещений концов наиболее нагруженной колонны каркаса соответствуют значениям $\varphi_3 = 1.484 \text{ рад}$ ($\sigma_z = 0.084 \text{ МПа}$: 3-й этаж, колонна № 1; $\delta = 0.0224 \text{ мм}$: 2-й этаж, колонна № 13) и $\varphi_3 = 3.142 \text{ рад}$ ($\sigma_z = 0.181 \text{ МПа}$, $\delta = 0.049 \text{ мм}$: 3-й этаж, колонна № 1) и отличаются друг от друга более, чем в 2 раза.

На рис. 11 приведены осциллограммы линейной составляющей параметров реакции, действующих вдоль оси x : перемещений (а), скоростей (б), восстанавливающих (в) и диссипативных (г) сил для значения $\varphi_3 = 3.142 \text{ рад}$.

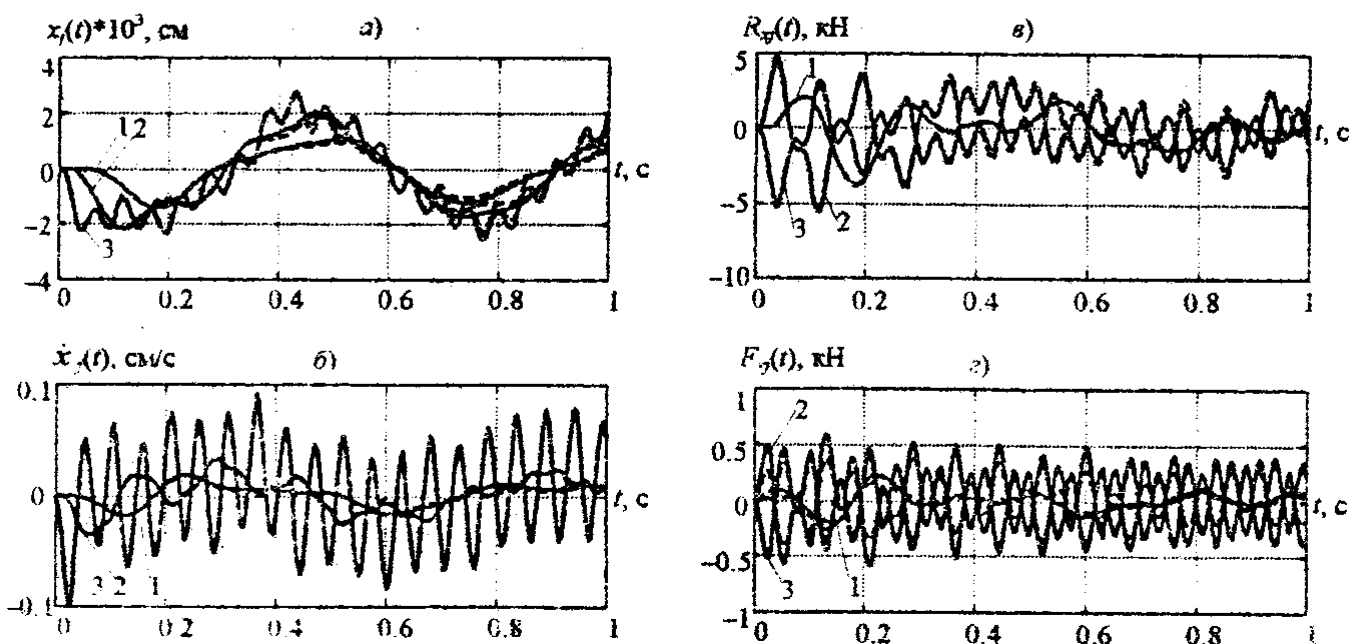


Рис. 11

В пятой главе «Приложение интеграла Дюамеля к вопросам взаимности» изложен общий метод доказательства теорем взаимности в произвольных упругих ДДС, расширена трактовка этих теорем и оговорены условия, обеспечивающие свойства взаимности в диссипативных системах.

Внешняя нагрузка представлена в виде вектора

$$P(t) = f(t)P_0, \quad (18)$$

где $f(t)$ – безразмерная скалярная функция времени t , $P_0 = [p_{0j}]$ ($j = 1, \dots, n$) – вектор постоянных усилий. На основе (18) введен вектор импульсов сил

$$Z(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau = \alpha(t)P_0, \quad \alpha(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Доказательство соотношений взаимности в ДДС базируется на двух положениях. Одно – связано с формой записи систем разрешающих уравнений (14), в которых величины Y_0, \dot{Y}_0 для удобства приняты нулевыми. Показано, что эти системы обладают симметричной структурой:

$$Y(t) = D(t)P(t), \quad \dot{Y}(t) = V(t)Z(t),$$

где $D(t) = 2\text{Re}\{U^{-1} \int_0^t \Phi(t-\tau)^T f(\tau) d\tau\} f(t)^{-1}$, $V(t) = 2\text{Re}\{SU^{-1} \int_0^t \Phi(t-\tau)^T f(\tau) d\tau\} \alpha(t)^{-1}$ –

матрицы динамической податливости и скорости, для которых справедливо:

$$D(t) = D(t)^T, \quad V(t) = V(t)^T.$$

Осуществлен переход (путем обращения матриц $D(t)$ и $V(t)$) к матрицам динамической жесткости $L(t)$ и импульсов $H(t)$ также симметричного вида:

$$L(t) = D(t)^{-1} = L(t)^T, \quad H(t) = V(t)^{-1} = H(t)^T.$$

Эти результаты можно считать расширением известных результатов (теорема Максвелла о взаимности перемещений: $D(t) = D(t)^T$ и теоремы Рэлея о взаимности реакций: $L(t) = L(t)^T$ и импульсов: $H(t) = H(t)^T$) для случая нестационарного процесса, протекающего в ДДС. Соотношение $V(t) = V(t)^T$, по своей сути, есть теорема о взаимности скоростей масс от действия единичных импульсов, прикладываемых к узлам ДДС. В литературных источниках данный закон не выявлен, хотя не исключено, что для частных случаев задачи он известен.

Второе положение относится к алгебраической трактовке принципа взаимности, впервые данной в 1927 г. проф. П.Л. Пастернаком. Согласно этому положению, свойство взаимности присуще любой системе n линейных уравнений с n неизвестными, обладающей симметричной структурой коэффициентов.

На основании изложенного получены соотношения взаимности:

$$Y(t)^T P(t)' = Y(t)'^T P(t), \quad \dot{Y}(t)^T Z(t)' = \dot{Y}(t)'^T Z(t), \quad (19)$$

выражающие теорему взаимности Бетти в форме произведения перемещений и сил (первое соотношение) и в форме произведения скоростей и импульсов сил (второе соотношение) в произвольной упругой ДДС. Векторы $P(t)'$, $Y(t)'$, $\dot{Y}(t)'$ и

$Z(t)$ представляют новые системы соответственно сил, перемещений, скоростей и импульсов в исходной ДДС.

Соотношения (19) выполняются для любой системы сил, определяемой вектором нагрузки (18), и являются обобщением результатов Рэлея, доказавшим первый закон взаимности в (19) со всеми его следствиями в ДДС для частного случая системы сил, гармонически изменяющейся во времени (то есть при условии $f(t) = \sin(\theta t + \phi)$). Второй закон в (19) и его частный случай $H(t) = H(t)^T$, были доказаны Рэлеем для консервативной системы, находящейся под действием мгновенных импульсов.

Результаты обобщены в виде теоремы о предпосылках закона взаимности в произвольной упругой ДДС: Пусть характер воздействия динамической нагрузки в узлах ДДС определяется вектором (18). Тогда, если матрицы M , C , K дифференциального оператора уравнения движения (7) обладают симметрией, то: (а) полная система уравнений динамической реакции (14) также имеет симметричную структуру; (б) к данной упругой системе применимы законы взаимности как в форме общих (19), так и частных теорем.

Показано, что динамическая реакция $Y(t) = D(t)P(t)$ выражается через ее статическую составляющую $Y_{ст} = K^{-1}P_0$ посредством матричной функции

$$\beta(t) = 2iU^{-1} \text{Im} \left\{ \int_0^t \Phi(t-\tau)^T f(\tau) d\tau \right\} K,$$

характеризующей учет динамического эффекта в произвольной конечномерной системе при нестационарных воздействиях, вследствие чего $Y(t) = \beta(t)Y_{ст}$.

Для матриц $\beta(t)$, $D(t)$, $L(t)$, $V(t)$, $H(t)$ приведены конечные формулы для случая действия внезапно приложенной нагрузки.

Последующие главы диссертации, с шестой по восьмую, посвящены упругопластическому анализу ДДС при действии кратковременной нагрузки.

В шестой главе «Теоремы состояний и анализ внутренних динамических параметров системы» предложены математические модели упругопластического расчета и доказаны теоремы, характеризующие качественные уровни состояний конструкции в процессе ее неупругого деформирования.

В основу математических моделей расчета положены физические соотношения, отвечающие закону идеально упругопластического поведения материала (рис. 12). В соответствии с теорией промежуточных состояний неупругий анализ представлен рядом последовательно изменяющихся в процессе реакции системы квазиупругих решений, определяемых интервалами $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots$), на которых динамические параметры системы неизменны. Время t_i соответствует открытию или закрытию шарниров пластичности. Это позволило обобщить временной анализ ДДС на случай движения конструкции с неупругой восстанавливающей силой, используя для этой цели метод временного анализа, разработанный для упругой системы.

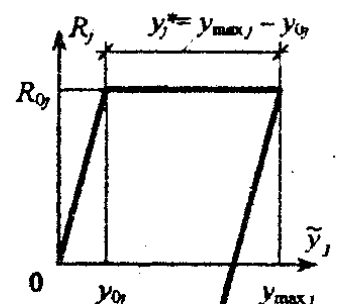


Рис. 12

Условия динамического равновесия ДДС с идеально упругопластическими восстанавливающими силами (вектор $R(t)$, см. рис. 12) представлены в виде

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + R(t) = P(t). \quad (20)$$

Математические модели расчета включают в себя физические соотношения

$$R(t) = K(t)Y(t) + R_0(t) - R^*(t) \quad (21)$$

и комплекс условий: упругости, текучести в j -м элементе конструкции при $t = t_m$ и разгрузки в том же элементе при $t = t_i$ ($t_i > t_m$):

$$\begin{cases} K(t) = K = \text{const}, & R_0(t) = R^*(t) = 0 & \text{при } \tilde{Y}(t) \leq \tilde{Y}_0; \\ \left\{ \begin{array}{l} K(t_m) = K(t_{m-1}) - K^{(j)}, \\ R^*(t_m) = R^*(t_{m-1}) \end{array} \right. & R_0(t_m) = R_0(t_{m-1}) + K^{(j)}Y(t_m), \\ & & \text{при } \tilde{y}_j(t) \geq y_{0j}; \\ \left\{ \begin{array}{l} K(t_i) = K(t_{i-1}) + K^{(j)}, \\ R^*(t_i) = R^*(t_{i-1}) + K(t_i)Y^*(t_i) \end{array} \right. & R_0(t_i) = R_0(t_{i-1}) - K^{(j)}Y(t_m), \\ & & \text{при } \dot{\tilde{y}}_j(t) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь $K(t)Y(t)$ – квазиупругая составляющая вектора (21); $K(t)$, $K^{(j)}$ – матрицы жесткости квазиупругой системы и j -го элемента конструкции. Составляющие вектора (21): $R_0(t)$ – вектор предельных значений и $R^*(t)$ – вектор остаточных усилий определяются в упругопластических пружинах при текучести и разгрузке соответственно; $Y^*(t)$ – вектор остаточных перемещений ДДС, значения которого вызваны пластическими деформациями в j -м элементе конструкции.

Упругие колебания происходят при условии, когда вдоль всех степеней свободы ДДС значения относительных перемещений $\tilde{y}_j(t)$ (вектор $\tilde{Y}(t)$) не превышают их предельно упругих значений y_{0j} ($j = 1, \dots, n$) (вектор \tilde{Y}_0).

Сформулирована задача неупругого анализа ДДС, в узлах которой действует нагрузка $P(t) = [p_j(t)]$ ($j = 1, \dots, n$) (рис. 13). Для вычисления динамической реакции системы на любом i -м интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ необходимо удовлетворить уравнению движения (20) физическими соотношениями (21) так, чтобы выполнялись условия упругости, текучести и разгрузки (22).

Далее проведен анализ собственных колебаний квазиупругой системы на интервале $t \in [t_i, t_{i+1}]$, требующий рассмотрения характеристического МКУ (8) и соотношений Виета в (13) при $K = K(t)$, где S_k и S_l из общей корневой пары (9).

Рост текучести ($t \geq t_1$) вызывает снижение коэффициентов жесткости ДДС и, вследствие этого, изменение внутренних динамических параметров. Этот факт отражен пятью теоремами состояний, устанавливающими критерии соответствия между определителями матриц в равенстве (13): $S_k^T M S_l = K(t_i)$ ($k \neq l$).

Теорема 6.1 (об условии невырожденного состояния квазиупругой системы). Матрица жесткости $K(t)$ квазиупругой системы ($i \geq 0$) невырождена тогда и только тогда, когда невырождены обе матрицы внутренних динамических параметров в корневой паре (9) характеристического МКУ, т. е.

$$\det K(t_i) > 0 \Leftrightarrow \det S_k \neq 0 \quad (k = 1, 2).$$

Теорема 6.2 (об условии вырожденного состояния квазиупругой системы). Пусть ДДС обладает полной диссипацией. Матрица жесткости $K(t_i)$ квазиупругой системы ($i > 0$) вырождена на интервале $t \in [t_i, t_m]$ тогда и только тогда, когда одна из матриц S_k в (9) вырождена, а другая – нет, т.е.

$$\det K(t_i) = 0 \Leftrightarrow \det S_k = 0, \det S_l \neq 0 \quad (k, l = 1, 2; k \neq l).$$

Теорема 6.3 (частный случай при $C = 0$): $\det K(t_i) = 0 \Leftrightarrow \det S_k = 0$ ($k = 1, 2$).

Если пластические шарниры образуются во всех опасных сечениях конструкции (при $t = t_q \in [t_i, t_m]$), то $K(t_q) = 0$. Такое деформированное состояние квазиупругой системы названо *предельно вырожденным состоянием* (ПВС).

Теорема 6.4 (об условии ПВС при $t \in [t_q, t_{q+1}] \subset [t_i, t_m]$, $C \neq 0$):

$$K(t_q) = 0 \Leftrightarrow S_k = 0, S_l = -M^{-1}C \quad (k, l = 1, 2; k \neq l).$$

Теорема 6.5 (частный случай при $C = 0$): $K(t_q) = 0 \Leftrightarrow S_k = 0$ ($k = 1, 2$).

Показано, что в процессе пластического деформирования частотно-демпфированный спектр системы становится подвижным. Характер кривых собственных частот неупругой конструкции показан на графиках, отвечающих условиям теоремы 6.1 (на всем интервале реагирования (рис. 14)), теорем 6.2, 6.3 (на интервале $t \in [t_i, t_n]$ (рис. 15)) и теорем 6.4, 6.5 (при $t \in [t_q, t_{q+1}]$ (рис. 16)).

Для спектральных норм матриц коэффициентов демпфирования и собственных частот в отдельных состояниях квазиупругой системы построены двухсторонние априорные оценки:

$$\alpha_1 \leq \|G\| \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \|W\| \leq \beta_2, \quad \beta_{01} \leq \|W_0\| \leq \beta_{02} \quad (t \in [0, t_1]); \quad (23)$$

$$2\alpha_1 \leq \|G\| \leq 2\alpha_2, \quad \|W\| = \|W_0\| = 0 \quad (t \in [t_q, t_{q+1}]), \quad (24)$$

где

$$\alpha_1 = \|M\|^{-1} \|C\|/2, \quad \beta_1 = \sqrt{\|M\|^{-1} \cdot \|K - CM^{-1}C/4\|}, \quad \beta_{01} = \sqrt{\|M\|^{-1} \cdot \|K\|};$$

$$\alpha_2 = \|M\| \|C\|/2, \quad \beta_2 = \sqrt{\|M\| \cdot \|K - CM^{-1}C/4\|}, \quad \beta_{02} = \sqrt{\|M\| \cdot \|K\|}$$

нижние ($\alpha_1, \beta_1, \beta_{01}$) и верхние ($\alpha_2, \beta_2, \beta_{02}$) грани спектральных норм $\|G\|, \|W\|$ и $\|W_0\|$ (W_0 – матрица собственных частот соответствующей консервативной системы), равных максимальным значениям внутренних динамических параметров ДДС: $\|G\| = \epsilon_m = \max(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, $\|W\| = \omega_n$, $\|W_0\| = \omega_{0n}$.

Оценки (23) соответствуют упругим колебаниям ДДС при пропорциональном демпфировании. Оценки (24) – движению упругопластической системы, состояние которой удовлетворяет условию теоремы 6.4 при $t \in [t_q, t_{q+1}] \subset [t_i, t_m]$.

На рис. 17, 18 дана графическая интерпретация двухсторонних оценок в зависимости от частотно-демпфированных уровней упругопластической ДДС. Показаны нижние ($\hat{\epsilon}_1(t), \hat{\omega}_1(t), \hat{\omega}_{01}(t)$) и верхние ($\hat{\epsilon}_2(t), \hat{\omega}_2(t), \hat{\omega}_{02}(t)$) грани норм $\|G(t)\|, \|W(t)\|$ и $\|W_0(t)\|$ на всем участке упругопластического нагружения, когда выполняются условия теоремы 6.1 ($t \in [t_i, t_m]$), теорем 6.2 и 6.3 ($t \in [t_i, t_m]$) (рис. 17), а также теорем 6.4 и 6.5 (ПВС при $t \in [t_q, t_{q+1}]$) (рис. 18).

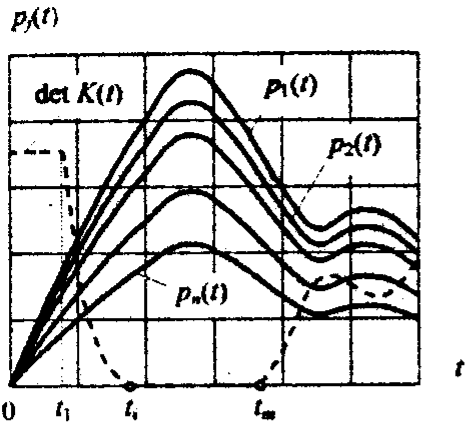


Рис. 13

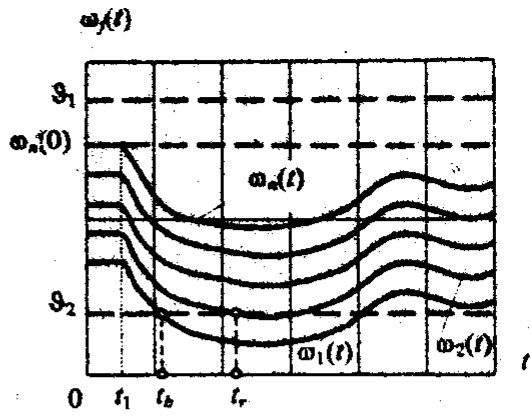


Рис. 14

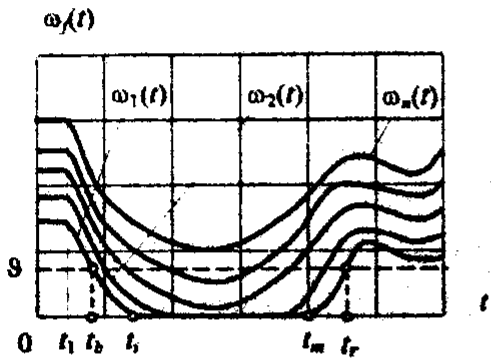


Рис. 15

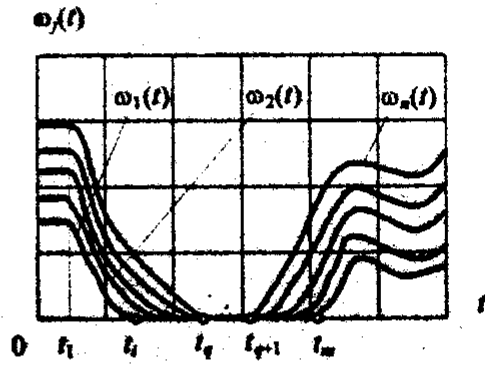


Рис. 16

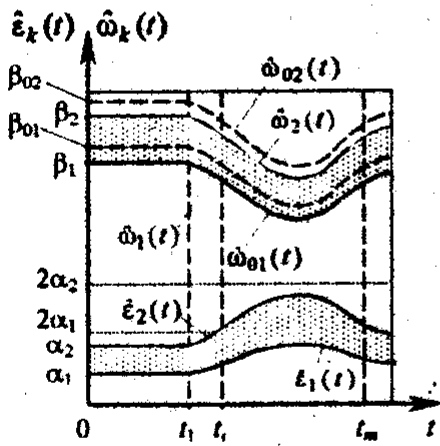


Рис. 17

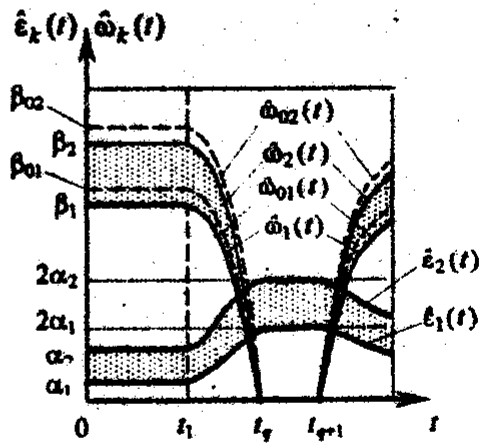


Рис. 18

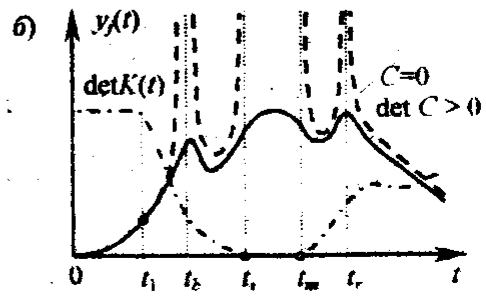
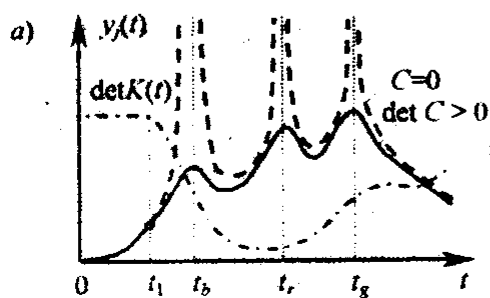


Рис. 19

Седьмая глава «Неупругий временной анализ: обобщение интеграла Дюамеля» посвящена разработке метода динамического расчета диссипативных конструкций за пределом упругости при кратковременном нестационарном воздействии, построению и реализации разрешающих уравнений неупругих колебаний ДДС при различных состояниях квазиупругой системы.

На основе предложенных математических моделей построен шаговый процесс, в котором упругопластический расчет сведен к последовательности квазиупругих решений на интервалах времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots$). В результате интегрирования уравнения движения (20), с учетом (21), получены уравнения полной реакции квазиупругой системы

$$\begin{cases} Y(t) = \sum_{k=1}^2 U_k^{-1} \{ \Phi_k^T(t-t_i) M [-S_l Y_0 + \dot{Y}_0] + J_k(t) [-R_0(t_i) + R^*(t_i)] + I_k(t) \}, \\ \dot{Y}(t) = \sum_{k=1}^2 S_k U_k^{-1} \{ \Phi_k^T(t-t_i) M [-S_l Y_0 + \dot{Y}_0] + J_k(t) [-R_0(t_i) + R^*(t_i)] + I_k(t) \}, \end{cases} \quad (25)$$

где $U_k = M(S_k - S_l)$, $U_k = -U_l$ ($l = 1, 2, l \neq k$),

$$I_k(t) = \int_{t_i}^t \Phi_k^T(t-\tau) P(\tau) d\tau, \quad J_k(t) = \int_{t_i}^t \Phi_k^T(t-\tau) d\tau. \quad (26)$$

Приведенный результат есть обобщение интеграла Дюамеля для физически нелинейной системы с идеально упругопластическим поведением материала. Уравнения реакции ДДС (25) обеспечивают получение замкнутого решения в рамках принятой модели деформирования. Первые два члена в уравнениях, стоящие под знаком суммы, выражают реакцию системы при свободных колебаниях. Последний член – при вынужденных колебаниях. При этом уравнения реакции при свободных колебаниях включают реакцию от упругопластических смещений узлов ДДС при текучести и разгрузке.

Решены вопросы практической реализации уравнений неупругих колебаний ДДС. В зависимости от условий состояния квазиупругой системы получены расчетные формулы для вычисления второго интеграла в (26). При выполнении условий теоремы состояния 6.1 его вычисление проводится по формуле

$$J_k(t) = (S_k^T)^{-1} [\Phi_k^T(t-t_i) - E]$$

и тогда уравнения (25) принимают более простой вид ($t_i \leq t \leq t_{i+1}$):

$$\begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re} \{ \Phi(t-t_i) U^{-1} M [-\bar{S} \hat{Y}_0 + \dot{Y}_0] + U^{-1} I(t) \} + Y_R(t_i), \\ \dot{Y}(t) &= 2\text{Re} \{ S U^{-1} [\Phi(t-t_i)^T M (-\bar{S} \hat{Y}_0 + \dot{Y}_0) + I(t)] \}, \end{aligned}$$

где $Y_R(t_i) = K(t_i)^{-1} [-R_0(t_i) + R^*(t_i)]$ – вектор упругопластических смещений узлов ДДС, накопленных к моменту времени $t = t_i$; $\hat{Y}_0 = Y_0 - Y_R(t_i)$ – новый вектор начальных условий.

При условии вырожденного состояния системы (теорема состояния 6.2) для интеграла $J_k(t)$ в (26) получено выражение в виде функционального ряда

$$J_k(t) = \Phi_k^T(t) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (S_k^T)^p [t^{p+1} - t_i^{p+1}] / (p+1)!$$

При выполнении условия теоремы состояния 6.3 ($C = 0$) показано, что параметры динамической реакции в уравнениях (25) становятся неопределенными, ввиду $\det U = 0$ и неограниченно возрастания величины $U^{-1} \rightarrow \infty$.

Приведены результаты временного анализа реакции на действие импульсов синусоидальной формы. Получена полная система разрешающих уравнений для различных промежуточных состояний квазиупругой системы и дана сводка уравнений во всех характерных режимах работы системы.

Показано, что вычисление реакции системы (как и при решении упругой задачи) связано с решением непрерывного уравнения Сильвестра, которое для случая полной диссипации системы всегда разрешимо однозначно. При $C = 0$ получено условие безрезонансного режима работы: $\vartheta \geq k\omega_n(0)$, где ϑ – частота вынужденных колебаний; $\omega_n(0)$ – максимальная собственная частота колебаний упругой системы ($\vartheta = \vartheta_1$, рис. 14). Коэффициент $k > 1$ регулирует ширину резонансной зоны. При условии $\vartheta \leq \omega_n(0)$ вследствие подвижности спектра частот в упругопластическом процессе в системе возможен резонанс при совпадении параметра ϑ с частотами $\omega_1(t_b)$, $\omega_2(t_r)$ и т. д. ($\vartheta = \vartheta_2$, рис. 14). Реакция системы во временных точках t_b , t_r и т. д. имеет резонансные пики (бесконечные при $C = 0$ и конечные при полной диссипации системы) при невырожденном (рис. 14 и 19, а) и вырожденном (рис. 15 и 19, б) состояниях квазиупругой системы.

В заключительной восьмой главе «Анализ реакции трехэтажного здания при действии кратковременной нагрузки» приведен пример упругопластического анализа колебаний трехэтажного каркасного железобетонного здания с плоской расчетной схемой (рис. 20) на действие кратковременной нагрузки большой интенсивности при $t_1 = 0.8$ с (рис. 4, в). Детально рассмотрены все состояния квазиупругой системы.

Из-за высокой скорости деформирования динамическая жесткость B колонн принята в соответствии с рекомендациями Н.Н. Полова и Б.С. Расторгуева. Коэффициенты жесткости колонн $k_j = 12B_j/(h_j)^3$ составили: $k_1 = k_2 = 2.4$ кН/см, $k_3 = 3$ кН/см (h_j – высота j -го этажа). Значения предельно упругих перемещений колонн этажей здания равны $y_{0j} = 1.2$ см.

На основе инерционных и жесткостных характеристик конструкции сформированы следующие матрицы: $M = \text{diag}(0.1, 0.2, 0.2)$ кНс²/см,

$$K = \begin{bmatrix} 4.8 & -4.8 & 0 \\ -4.8 & 9.6 & -4.8 \\ 0 & -4.8 & 10.8 \end{bmatrix} \text{ кН/см}, \quad C = \begin{bmatrix} 2.205 & -2.205 & 0 \\ -2.205 & 4.4106 & -2.142 \\ 0 & -2.142 & 4.678 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ кНс/см}.$$

Матрица демпфирования принята на основе модели (12) с последующей ее симметризацией: $C = (KT + TK)/2$ при $\delta = 0.2$. Вектор амплитуд динамических сил имеет вид $P_0 = [8, 5, 5]^T$ кН.

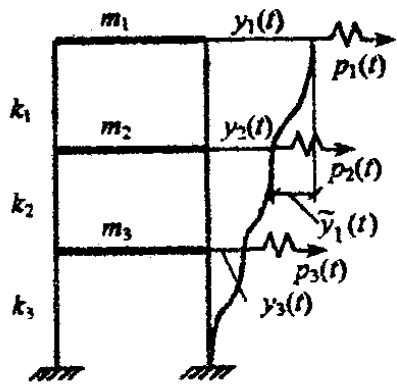


Рис. 20

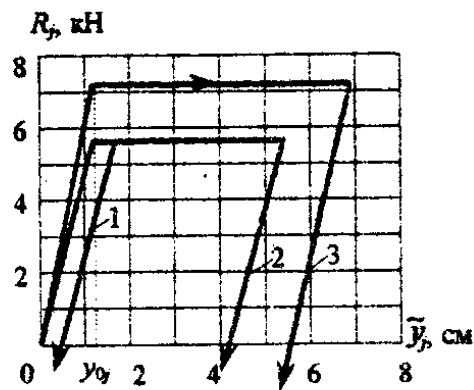


Рис. 21

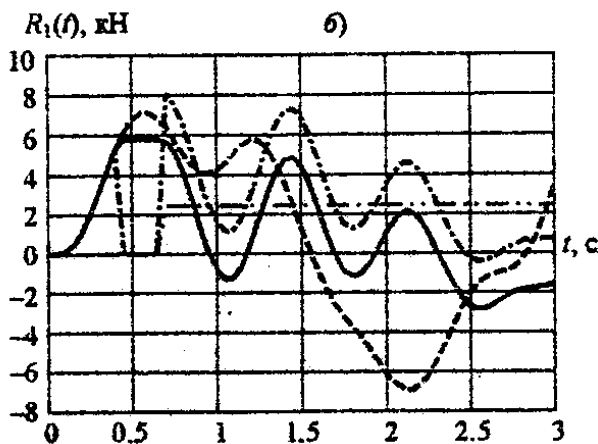
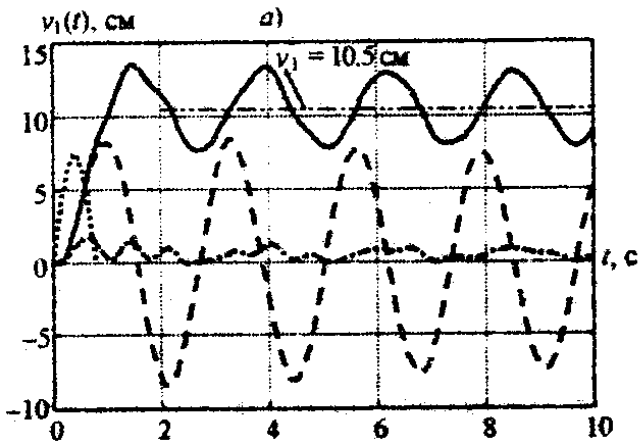


Рис. 22

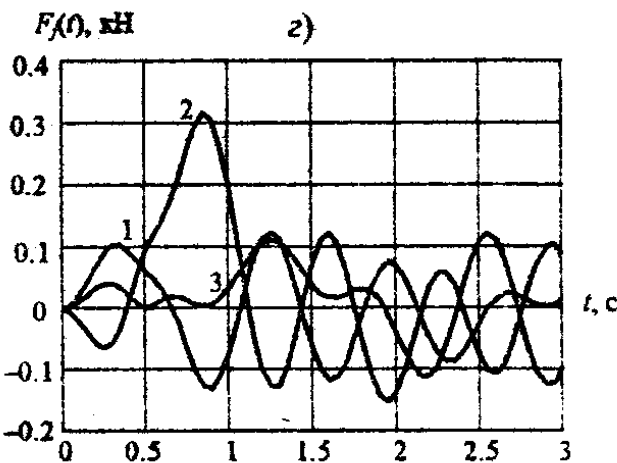
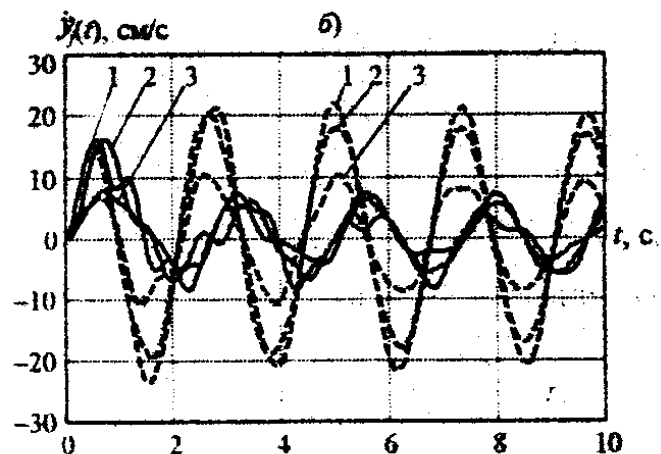
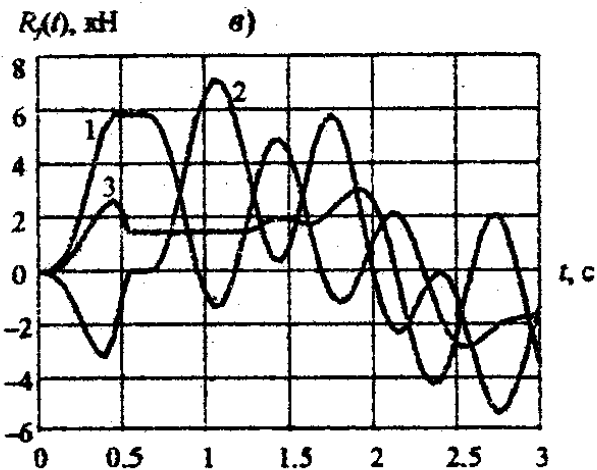
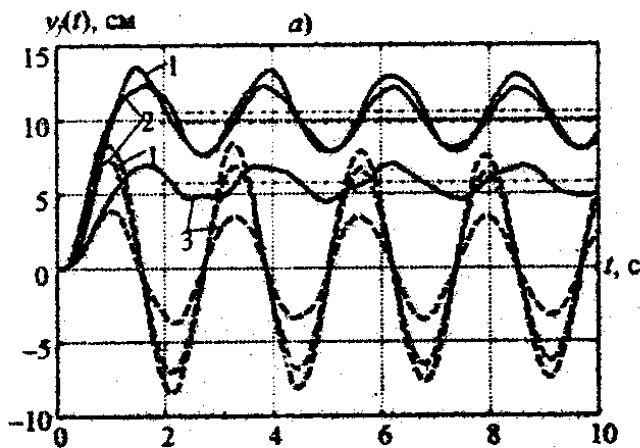


Рис. 23

Основные этапы временного анализа здания сведены в табл. 1. Остаточные относительные перемещения определялись по формуле $\tilde{Y}^* = \tilde{Y}_{\max} - \tilde{Y}_0$.

Таблица 1

№№ этажей здания	Начало текучести t_i, c	Начало разгрузки t_m, c	Наибольшее перемещение \tilde{Y}_{\max}, cm	Остаточные перемещения и усилия		
				\tilde{Y}^*, cm	\tilde{Y}, cm	R^*, kH
1	0.4244	0.6621	1.7056	0.5056	10.500	2.4267
2	0.5260	1.2240	5.4480	4.2480	9.9942	17.9640
3	0.4865	1.6950	6.9462	5.7462	5.7462	14.0865

На диаграмме «восстанавливающая сила – относительное перемещение» (рис. 21) изображены жесткости этажей конструкции в упругопластической стадии. Приведена осциллограмма перемещений верхнего этажа (сплошная линия) на отрезке времени 10 с (рис. 22, а). Для сравнения дана упругая реакция этажа (пунктир) и кривые относительных (штрихпунктир) и статических (точки) перемещений. Вследствие необратимых деформаций свободные колебания здания происходят относительно остаточных перемещений, накопленных по его этажам. Для верхнего узла при $t \geq 1.695$ с эта величина составила $y_1^* = 10.5$ см.

Характер изменения нелинейной восстанавливающей силы верхнего этажа $R_1(t)$ (рис. 22, б, сплошная линия) представлен всеми ее составляющими: квазиупругой (штрихпунктир), предельных значений $R_{01}(t_i)$ (эта составляющая не равна нулю только на интервале $t \in [0.526, 0.6621]$ с, совпадая на нем с величиной $R_1(t)$) и остаточных усилий $R_1^*(t_i)$ (двойной штрихпунктир). Упругий режим работы здания показан пунктиром.

!Полную картину упругопластической работы здания иллюстрируют осциллограммы параметров реакции для всех этажей (рис. 23): (а) – перемещения $y_j(t)$, (б) – скорости $\dot{y}_j(t)$, (в) – восстанавливающие $R_j(t)$ и (г) – диссипативные $F_j(t)$ силы (пунктиром на рис. 23, а, б показана упругая реакция здания).

В табл. 2 приведены параметры собственных значений: коэффициенты демпфирования и собственные частоты квазиупругой системы.

Таблица 2

t	Время t_i, c	Коэффициенты демпфирования, c^{-1}			Собственные частоты, c^{-1}		
		ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ω_1	ω_2	ω_3
0	0	0.0167	0.1149	0.2059	2.7076	7.2089	9.5208
1	0.424	0.2209	0.0662	0.1608	0	3.2674	8.2017
2	0.487	0.0492	0.2915	0.1617	0	0	6.9253
3	0.526	0.0334	0.2296	0.4120	0	0	0
4	0.662	0.0350	0.2794	0.1838	0	0	8.4829
5	1.224	0.052	0.1079	0.2036	0	5.7578	9.3161
6	1.695	0.0167	0.1149	0.2059	2.7076	7.2089	9.5208

Характер изменения собственных значений неупругой системы показан для коэффициентов демпфирования (рис. 24, а) и собственных частот (рис. 24, б).

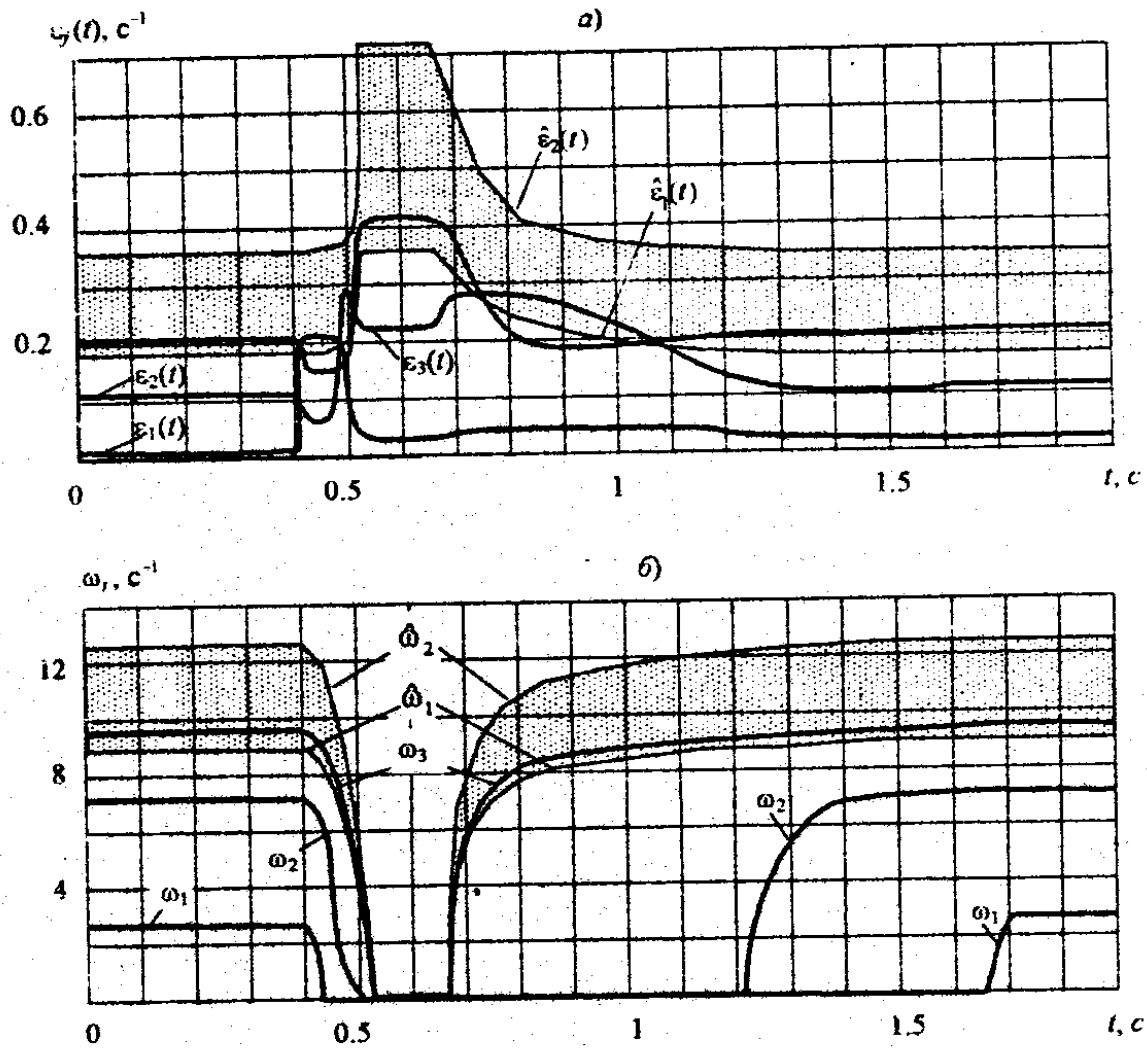


Рис. 24. Внутренние динамические параметры каркасного здания при упруго-пластическом деформировании:

a – коэффициенты демпфирования; b – частоты собственных колебаний

Полученные значения спектральных норм матриц G и W согласуются с априорными оценками (23), (24). Результаты динамического расчета свидетельствуют о высокой эффективности предлагаемого подхода и перспективности развития метода временного анализа при вычислении нелинейной реакции ДДС.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе.

В приложениях дан обзор и изложено состояние вопроса по анализу матричных линейных и квадратичных уравнений (приложения 1, 2), а также приведены программы вычисления динамической реакции для упругой и упруго-пластической задач (приложения 3, 4).

Основные результаты работы и краткие выводы

1. Предложен новый аналитический подход к динамическому расчету ДДС на нестационарные воздействия в задачах строительной механики – метод временного анализа реакции ДДС, – базирующийся на разработанном методе анализа матричных уравнений линейного и квадратичного вида.

2. Исследованы свойства решения МКУ, доказана обобщенная теорема Виета о сумме и произведении матричных корней; показано, что все решения МКУ структурированы в корневые пары (это понятие введено впервые); предложена итерационная схема определения корней, принадлежащих общей корневой паре; получено условие обобщенной ортогональности матрицы собственных векторов.

3. В замкнутом виде построена полная система разрешающих матричных уравнений упругой ДДС (интеграл Дюамеля) при произвольном характере нагрузки и типе демпфирования. Впервые в структуре подынтегрального выражения интеграла Дюамеля содержится фундаментальная матрица соответствующего однородного дифференциального уравнения движения, построенная на основе решения МКУ.

4. Исследованы важные для приложений динамики сооружений частные случаи интеграла Дюамеля (удар, импульс, вибрационная нагрузка и др.). Впервые в замкнутом виде решена задача о колебаниях произвольной ДДС при действии периодических импульсов прямоугольной и синусоидальной формы. Во всех частных случаях уравнения реакции ДДС имеют простую математическую форму, удобную при выполнении динамических расчетов.

5. Сформулированы и доказаны теоремы состояний, устанавливающие необходимые и достаточные условия невырожденного и вырожденного состояний упругопластической конструкции в процессе ее реакции.

6. Проведен анализ частотного спектра и характера движения упругопластической конструкции по собственным формам в различных деформированных состояниях ДДС. Получены двухсторонние априорные оценки спектральных норм матриц коэффициентов демпфирования и собственных частот в отдельных состояниях квазиупругой системы.

7. Разработаны математические модели неупругого расчета ДДС при движении с диаграммой идеального упругопластического тела при действии кратковременной нагрузки. Дано обобщение временного анализа реакции ДДС за пределом упругости. Впервые уравнение упругопластической реакции получено в нетривиальной матричной форме интеграла Дюамеля.

8. Получено условие малой диссипации в виде априорной оценки верхней границы нормы приведенной матрицы демпфирования.

9. Предложены новые модели демпфирования, не относящиеся к пропорциональному типу демпфирования. Показано, что все известные в литературе условия делимости уравнения движения ДДС вытекают из общего условия, представляющего собой одно из разрешающих уравнений МКУ.

10. Дан вывод соотношений обобщенной ортогональности собственных форм колебаний произвольной упругой ДДС; показано, что соотношения вытекают из принципа Бетти, распространенного на область диссипативных систем.

11. Дано приложение уравнений реакции произвольной упругой ДДС к доказательству теорем взаимности, вследствие чего: расширена трактовка теорем взаимности и предложен общий, более простой, метод их доказательства.

12. Впервые при общих предпосылках динамической задачи получена аналитическая зависимость между выражениями вектора динамической составляющей реакции упругой ДДС и вектора соответствующей статической составляющей; эта зависимость имеет вид матричной функции, выражающей учет динамического эффекта от действия произвольной нагрузки.

13. Впервые для произвольной упругой ДДС и общем характере внешней нагрузки получены аналитические выражения матриц: динамических податливостей и жесткостей, скоростей и импульсов; показана взаимнообратимость матриц скоростей и импульсов.

14. Решены практические вопросы реализации разрешающих уравнений неупругих колебаний ДДС при действии кратковременной нагрузки большой интенсивности. Дано приложение рассматриваемых вопросов к анализу реакции ДДС при синусоидальном законе нагружения со сводкой уравнений полной динамической реакции ДДС в различных состояниях квазиупругой системы.

15. Разработаны матричные алгоритмы и программы по решению МКУ; разработаны алгоритмы и прикладные программы по выполнению временного анализа упругой и упругопластической реакции каркасных многоэтажных зданий с расчетной схемой плоского и пространственного типа на импульсные и вибрационные воздействия.

16. Прделанный временной анализ реакции трехэтажных каркасных зданий с пространственной (в упругой постановке) и плоской (в неупругой постановке) расчетными схемами на нестационарные воздействия, подтверждает высокую эффективность предложенного подхода.

Таким образом, в диссертации разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как обоснование и развитие нового научного направления динамики сооружений – теории временного анализа упругих и неупругих ДДС в динамических задачах строительной механики.

Список работ по теме диссертации

1. Леонтьев Н. Н., Потапов А. Н., Очинский В. В. Об одном приеме решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений теории упругости // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1987. – Вып. 25. – С. 209–218.

2. Потапов А. Н. О построении решения матричного квадратного уравнения / СтПИ. Ставрополь, 1990. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ 21.05.90, № 2191-В90.

3. Потапов А. Н. О решении одной задачи на собственные значения / Головной проектный ин-т гражд. стр-ва «Челябинскгражданпроект». Челябинск, 1990. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 24.04.90, № 2169-В90.

4. Потапов А. Н. Прием интегрирования однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений теории упругости // Строительная механика,

строительные материалы и конструкции, технология строительного производства: Сб. докл. науч. конф. – Ставрополь: СтПИ, 1991. – С. 43–51.

5. *Потапов А. Н.* Анализ свободных колебаний демпфированной системы // Циклические процессы в природе и обществе: Вторая Междунар. конф., 18–23 октября 1994. – Ставрополь: Изд. Ставроп. ун-та, 1994. – С. 55–58.

6. *Потапов А. Н.* Матричное квадратное уравнение и его нормальные формы // Циклы природы и общества: Четвертая Междунар. конф. – Ставрополь: Изд. Ставроп. ун-та, 1996. – С. 115–117.

7. *Потапов А. Н.* Метод решения матричного квадратного уравнения в задачах строительной механики // Строительные конструкции и расчет сооружений: Сб. тез. докл. науч.-техн. конф., 3–6 апреля 1996. – Новосибирск: НГАС, 1996. Ч.1. – С. 74–75.

8. *Потапов А. Н.* Метод решения матричного квадратного уравнения в колебаниях стержневых систем // Реконструкция городов, отдельных зданий, сооружений и конструкций на Урале: Вторые уральские академические чтения (Тез. докл.). – Екатеринбург: УРО РААСН, 1997. – С. 47.

9. *Потапов А. Н.* Метод сведения к матричному квадратному уравнению в динамическом анализе дискретных диссипативных систем // Реконструкция городов, отдельных зданий, сооружений и конструкций на Урале: Третьи уральские академические чтения. – Екатеринбург: УРО РААСН, 1997. – С. 104–110.

10. *Потапов А. Н.* О построении моделей неоднородного демпфирования // Реконструкция городов, отдельных зданий, сооружений и конструкций на Урале: Третьи уральские академические чтения. – Екатеринбург: УРО РААСН, 1997. – С. 111–116.

11. *Потапов А. Н.* Динамический расчет рам из упруго-пластического материала методом сведения к матричному квадратному уравнению // Строительные конструкции и расчет сооружений: Сб. тез. докл. науч.-техн. конф., 3–6 апреля 1997. – Новосибирск: НГАС, 1997. Ч.1. – С. 72–73.

12. *Потапов А. Н.* Нормальные формы матрицы / ЧГТУ. Челябинск, 1997 – Ис. – Деп. в ВИНТИ 15.10.97, № 3059-В97.

13. *Потапов А. Н.* Математические модели неупругого расчета многоэтажных зданий на динамические кратковременные воздействия // Стройкомплекс: Информ. аналитический журнал. – № 7–8. Челябинск, 1998. – С. 35–40.

14. *Потапов А. Н.* Метод сведения к матричному квадратному уравнению в динамике дискретных диссипативных систем // Мат. моделирование в механике деформируемых тел. Методы граничных и конечных элементов: Тез. докл. XVI Междунар. конф., 23–26 июня 1998 г. – СПб., 1998. – Т.1. – С. 83–84.

15. *Потапов А. Н.* Использование интеграла Дюамеля в неупругом динамическом анализе дискретных диссипативных систем // Численные и аналитические методы расчета конструкций: Сб. науч. тр. Междунар. конф., 17–19 ноября 1988. – Самара: Изд-во СамГАСА, 1998. – С. 250–254.

16. *Потапов А. Н.* Метод сведения к матричному квадратному уравнению в задачах колебаний дискретных систем при неоднородном демпфировании // Проблемы прочности материалов и конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. науч. сб. – Саратов: СГТУ, 1998. – С. 45–54.

17. *Потапов А. Н.* Теоремы об упругопластических диссипативных конструкциях при вынужденных колебаниях // Реконструкция городов, отдельных зданий, сооружений и конструкций на Урале: Четвертые уральские академические чтения. – Екатеринбург: УРО РААСН, 1999. – С. 92–96.

18. *Потапов А. Н.* Прямой метод интегрирования в неупругом динамическом анализе конструкций // Архитектура и строительство. Проблемы развития теории сооружений и совершенствования строительных конструкций: Тез. докл. Республ. науч.-техн. конф., 30 ноября – 1 декабря 1999 г., Томск: ТГАСУ, 1999. – С. 78–79.

19. *Потапов А. Н.* Анализ внутренних динамических параметров конструкций при неупругих колебаниях // Известия вузов. Строительство. – Новосибирск, 2000. – № 6. – С. 31–37.

20. *Потапов А. Н.* Прямой метод интегрирования уравнений динамического равновесия в анализе колебаний дискретных диссипативных конструкций // Вестник ТГАСУ. – Томск: ТГАСУ, 2000. – № 2. – С. 92–109.

21. *Потапов А. Н.* Временной анализ неупругой реакции сооружения при действии кратковременной нагрузки // Строительство и образование: Сб. науч. тр. Вып. 4. – Екатеринбург: УГТУ – УПИ, 2000. – С. 43–46.

22. *Потапов А. Н.* Обобщение интеграла Дюамеля при упругопластическом анализе конструкций // Известия вузов. Строительство. – Новосибирск, 2001. – № 4. – С. 33–39.

23. *Потапов А. Н.* Соотношения взаимности в диссипативных системах // Известия вузов. Строительство. – Новосибирск, 2001. – № 11. – С. 22–28.

24. *Потапов А. Н.* Об ортогональности собственных форм колебаний дискретных диссипативных систем // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – Вып. 1. – Челябинск: ЮУрГУ, 2001. – № 5 (05). – С. 39–42.

25. *Потапов А. Н., Перескоков Р. Р.* Анализ свободных колебаний ствола дымовой трубы // Строительство и образование: Сб. науч. тр. – Вып. 5. – Екатеринбург: ГОУ УГТУ – УПИ, 2002. – С. 104–108.

26. *Потапов А. Н.* Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.

