УДК 519.622.2

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА-СИДОРОВА ДЛЯ СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер

ALGORITHM OF NUMERICAL SOLUTION OF SHOULTER-SIDOROV PROBLEM FOR LEONTIEV-TYPE SYSTEMS

A.V. Keller

В статье рассмотрено решение задачи Шоуолтера-Сидорова для систем леонтьевского типа с необратимым оператором при производной. Рассмотрение начальных данных Шоуолтера-Сидорова позволяет расширить спектр практического применения модели. Предложен алгоритм ее численного решения, исследована сходимость.

Ключевые слова: задача Шоуолтера-Сидорова, системы леонтьевского типа, исследование сходимости.

The article deals with the solution of Shoulter-Sidorov problem for Leontiev-type systems with irreversible operator at the derivative. Consideration of the initial data of Shoulter-Sidorov enables greater range of practical applications of the model. An algorithm for its numerical solution has been proposed, the convergence has been investigated.

Keywords: Shoulter-Sidorov problem, Leontiev-type systems, convergence investigation.

Введение

В [1, 2] предложен численный алгоритм решения задачи Коши

$$u(0) = u_0 \qquad (1)$$

для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = Su + g, \qquad (2)$$

основанный на идеях теории полугрупп операторов. Здесь S - квадратная матрица порядка n. В [3, 4] этот подход был распространен на задачу (1) для вырожденной системы уравнений

$$L\dot{u} = Mu + f \qquad (3)$$

с использованием идей теории вырожденных полугрупп операторов [5] (здесь L и M - квадратные матрицы, порядка n, причем $\det L = 0$). Одним из важных случаев системы (3) является хорошо известная система В.В. Леонтьева «затраты-выпуск» с учетом запасов (см. в [6]), поэтому в [3] было предложено такие системы уравнений называть «системами леонтьевского типа».

Простота предложенного в [3, 4] алгоритма обеспечивает высокое качество получаемого программного продукта, что выгодно отличает данный алгоритм от использовавшихся ранее методов Эйлера, Рунге-Кутта, итерационных и других методов [7-9]). Основным недостатком этого алгоритма (как впрочем, и всех остальных) является принципиальная неразрешимость задачи (1) для системы (3) при произвольных начальных векторах $u_0 \in \mathfrak{R}^n$. Эта трудность преодолевается, например в [3], где вектор-функция $f:[0,\mathrm{T}] \to \mathfrak{R}^n$ постоянная, введением множества допустимых начальных значений, понимаемых как фазовое пространство системы (3). В [4] при снятии условия постоянства вектор-функции f налагаются условия согласования f с начальным значением u_0. Заметим, что условия согласования в том или ином виде имеют место и во всех других алгоритмах.

Для условий согласования (как и для построения фазового пространства) необходимы проекторы, которые либо выражаются через контурные интегралы от матриц-функций, либо являются пределами матричных последовательностей. Ввиду неустойчивости любого проектора относительно малых возмущений такое вычисление матрицы проектора очень затруднительно. Поэтому, например в [10], при построении системы (3), моделирующей экономику коммунального хозяйства, пришлось ограничиться малыми городами, т.е. такими, где матрицы L и M имеют порядок не больше 10. Именно малость порядка матриц L и M сделало возможным вычисление проекторов «вручную».

Келлер Алевтина Викторовна - канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой общеобразовательных дисциплин ЮУрГУ; alevtinak@inbox.ru

Keller Alevtina Viktorovna - PhD, associate professor, head of general disciplines department of SUSU; alevtinak@inbox.ru

Между тем в современной математической литературе существуют попытки теоретического осмысления так называемых «неклассических» задач для системы (3) [11, 12], основным достоинством некоторых является однозначная разрешимость при любых начальных данных $u_0 \in \mathfrak{R}^n$. Разработка численных алгоритмов решения таких задач позволит избавиться как от трудоемкого построения фазового пространства (и не менее трудоемкой редукции системы (3) к системе (2), заданной на нем), так и от трудоемкой проверки условий согласо́вания. Основная цель данной статьи – построение алгоритма численного решения задачи Шоуолтера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^p \left(u(0) - u_0\right) = 0$$

для системы (3) (числа α и p вычисляются на первом шаге алгоритма). Статья кроме введения и списка литературы содержит две части. В первой дается теоретическое обоснование алгоритма, а во второй приведены основные этапы вычислений.

1. Задача Шоуолтера-Сидорова

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n, причем, следуя [13], гл. XII, п. 2, ***пучок матриц*** $\mu L - M$ назовем ***регулярным***, если существует число $\lambda \in \mathbf{C}$ такое, что $\det(\lambda L - M) \neq 0$. Заметим, что условие регулярности пучка матриц эквивалентно условию L-регулярности матрицы M [3, 4]. Поэтому, как показано в [5], гл. 4, при условии регулярности пучка существуют единственным образом определяемые матрицы H, S, M_0, L_1, Q порядка n, такие, что L***-резольвента*** $(\mu L - M)^{-1}$ ***матрицы*** M разлагается в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{l=0}^{p} \mu^l H^l M_0 (I - Q) + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{-l} S^{l-1} L_1 Q \tag{4}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки, причем H – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p, Q – идемпотентная матрица, MM_0, M_0M, L_1L и LL_1 – диагональные матрицы с нулями и единицами на главной диагонали. Поскольку $\det(\lambda L - M) \neq 0$, то многочлен $\det(\lambda L - M) = 0$ имеет не более n различных нулей, которые расположены в круге радиуса a, а значит, при $|\mu| > a$ разложение (4) имеет место. Точка ∞ называется ***устранимой особой точкой*** L-резольвенты матрицы M, если $p = 0$ в (4); и ***полюсом порядка*** $p \in \mathbf{N}$ в противном случае. В дальнейшем, немного отходя от классического стандарта, будем называть устранимую особую точку ***полюсом порядка нуль***. Итак, пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, и ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$; тогда можно выбрать число α и рассмотреть задачу Шоуолтера–Сидорова

$$\left[R_\alpha^L(M)\right]^p \left(u(0) - u_0\right) = 0, \tag{5}$$

для системы уравнений леонтьевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{6}$$

где $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ – ***правая*** L***-резольвента матрицы*** M, в отличие от ее ***левой*** L***-резольвенты*** $L_\alpha^L(M) = L(\alpha L - M)^{-1}$, а $f : [0,\mathrm{T}] \to \mathfrak{R}^n$ – некоторая вектор-функция.

Решением системы (3) называется вектор-функция $u_0 \in \mathbf{C}^1\left((0;\mathrm{T});\mathfrak{R}^n\right) \cap \mathbf{C}\left([0;\mathrm{T}];\mathfrak{R}^n\right)$, удовлетворяющая уравнениям системы. Решение системы (6) называется ***решением задачи*** (5), (6), если оно вдобавок удовлетворяет уравнениям (5). Имеет место [5, гл. 4]

ТЕОРЕМА 1.1. ***Пусть пучок*** $\mu L - M$ ***регулярен,*** $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ ***– порядок полюса*** L***-резольвенты матрицы*** M, ***вектор-функция*** $f : [0,\mathrm{T}] \to \mathfrak{R}^n$ ***такая, что*** $\left(L_\alpha^L(M)\right)^p f \in \mathbf{C}\left([0;\mathrm{T}];\mathfrak{R}^n\right)$, ***а*** $\mathbf{I} - \left(L_\alpha^L(M)\right)^p f \in \mathbf{C}^{p+1}\left((0;\mathrm{T});\mathfrak{R}^n\right) \cap \mathbf{C}^p\left([0;\mathrm{T}];\mathfrak{R}^n\right)$.

Тогда при любом $u_0 \in \mathfrak{R}^n$ ***существует единственное решение задачи*** (5), (6), ***которое к тому же имеет вид***

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} (\mathbf{I} - Q) f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \\ + \int_0^t R^{t-s} Q f(s)\, ds.$$

Здесь

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu,$$

$$R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu,$$

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu,$$

контур $\gamma = \{\mu \in \mathbf{C} : |\mu| = r > a\}$. Контурные интегралы не очень удобны в численных расчетах, поэтому в [3, 4] предложен другой подход, основанный на аппроксимациях типа Уиддера–Поста [5, гл. 2]. Именно справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. ***Пусть пучок*** $\mu L - M$ ***регулярен,*** $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ ***– порядок полюса*** L***-резольвенты матрицы*** M. ***Тогда***

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right]^{k(p+1)}=U^t,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[kL_k^L(M)\right]^{(p+1)}=Q,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right]^{k(p+1)-1}\times$$

$$\times\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}=R^t.$$

Теперь пусть пучок $\mu L-M$ регулярен, $p\in\{0\}\cup\mathbf{N}$ – порядок полюса L-резольвенты матрицы M в точке ∞. Фиксируем $\mathrm{T}\in\Re_+$, $t\in(0,\mathrm{T})$, $k\in\mathbf{N}$ и положим

$$U_k^t=\left[\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right]^{k(p+1)},$$

$$Q_k=\left[kL_k^L(M)\right]^{(p+1)},$$

$$R_k^t=\left[\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right]^{k(p+1)-1}\times$$

$$\times\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}.$$

Выберем вектор $u_0\in\Re^n$, вектор-функцию $f\in\mathbf{C}^{p+1}\left((0;\mathrm{T});\Re^n\right)\cap\mathbf{C}^p\left([0;\mathrm{T}];\Re^n\right)$ и построим вектор-функцию

$$u_k(t)=-\sum_{q=0}^{p}H^qM_0^{-1}(\mathbf{I}-Q_k)f^{(q)}(t)+U_k^tu_0+$$

$$+\int_0^t R_k^{t-s}Q_kf(s)ds.$$

ТЕОРЕМА 1.3. ***Пусть пучок*** $\mu L-M$ ***регулярен,*** $p\in\{0\}\cup\mathbf{N}$ ***– порядок полюса*** L***-резольвенты матрицы*** M ***в точке*** ∞. ***Тогда существует константа*** $C=C(L,M,\mathrm{T})\in\Re_+$ ***такая, что*** $\|u(t)-u_k(t)\|\le\frac{C}{k}$ ***при всех*** $t\in[0;\mathrm{T}]$, $u_0\in\Re^n$, ***и*** $f\in\mathbf{C}^{p+1}\left((0;\mathrm{T});\Re^n\right)\cap\mathbf{C}^p\left([0;\mathrm{T}];\Re^n\right)$.

Доказательство теоремы основывается на оценках

$$\left\|\left[kL_k^L(M)\right]^{(p+1)}-Q\right\|\le\sum_{k=2}^{p+1}\frac{KC_{p+1}^k}{(p+1)\mu^{k-1}\beta^{p+1-k}}\left\|R_\beta^L(M)\right\|$$

$$\left\|U_k^t-U^t\right\|\le\frac{(p+1)K^3t^2}{2\beta^{p-1}k}\left\|\left((\beta L-M)^{-1}M\right)^2\right\|$$

взятых из [5, гл. 2], где $\beta\in\Re_+$

2. Алгоритм решения

Построение алгоритма начнем с допущения, что $\det M\neq 0$. Это допущение не ограничивает общности предыдущих рассуждений. Действительно, при условии регулярности пучка $\mu L-M$, можно сделать замену $u=e^{\lambda t}v$ в уравнении (3) и перейти к уравнению

$$L\dot v=(M-\lambda L)v+e^{-\lambda t}f \qquad (7)$$

того же вида, что и (3), но $\det(M-\lambda L)\neq 0$. Обратный переход от решений системы (7) к решениям системы (3) очевиден.

На первом шаге алгоритма нужно найти числа $\alpha\in\Re$ и $p\in\{0\}\cup\mathbf{N}$. Можно разумеется, разложить L-резольвенту матрицы M в ряд (4) и тем самым сразу же найти эти числа. Однако, существует другой менее трудоемкий путь. Рассмотрим многочлен

$$\det(\mu L-M)=a_n\mu^n+a_{n-1}\mu^{n-1}+\ldots+a_1\mu+a_0.$$

Поскольку $a_n=\det L$, то $a_n=0$. Далее, коэффициент a_l есть сумма слагаемых, каждое из которых есть произведение одного из миноров порядка l матрицы L на число, $l=1,\ldots,n-1$, $a_0=\det(-M)$. Поэтому степень многочлена $\det(\mu L-M)$ не выше $\operatorname{rank}L$, т.е. ранга матрицы L. Итак,

$$\det(\mu L-M)=a_q\mu^q+a_{q-1}\mu^{q-1}+\ldots+a_1\mu+a_0,$$

где $q=\deg\det(\mu L-M)\le\operatorname{rank}L$, поэтому если взять число $\alpha\in\Re$ таким, что

$$|\alpha|>\max\left\{1,|a_q|^{-1}\left(\sum_{l=0}^{q}|a_l|\right)\right\}$$

то $\det(\alpha L-M)\neq 0$, и значит, существует матрица $(\alpha L-M)^{-1}$. Далее, считая, что матрица M обратима, представим

$$\det(\mu L-M)=\det M\det(\mu M^{-1}L-\mathbf{I}).$$

Зная, что порядок полюса в точке ∞ резольвенты $\left(\mu I-M^{-1}L\right)^{-1}$ равен нулю, легко найти, что порядок полюса L-резольвенты матрицы M в точке ∞ равен $n-q$. Итак, числа α и $p=n-q$ найдены.

Тогда находя значение k, с которого можно начинать считать приближенные проекторы, получим, что при

$$k>\frac{1}{|a_q|}\sum_{l=q+1}^{n}|a_l|+1$$

мы не сможем оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Рассмотрим многочлен

$$\det(\mu(p+1)L-tM)=a_qt^q\mu^q(p+1)^q+$$

$$+a_{q-1}t^{q+1}\mu^{q-1}(p+1)^{q-1}+\ldots+a_1t^{n-1}\mu+t^na_0,$$

где $a_q \neq 0, q \leq \operatorname{rank} L$. Тогда, учитывая $p = n - q$ при

$$k > \begin{cases} \dfrac{1}{|a_q|(n-q)^{(n-q)}} \sum\limits_{l=q+1}^{n} |a_l| (n-q+1)^{n-l} + 1, \\ \qquad \text{если } |t| < 1 \\ \dfrac{1}{|a_q||t|^q (n-q)^{(n-q)}} \sum\limits_{l=q+1}^{n} |a_l| (n-q+1)^{n-l} |t|^l + 1, \\ \qquad \text{если } |t| \geq 1 \end{cases}$$

мы не сможем оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Теоретическая оценка сходимости не позволяет сделать вывод о точности предлагаемого алгоритма. Тем не менее, практические результаты показывают, что уже при числе итераций более ста, результаты вычислений дают не менее точные результаты, чем неявная схема Эйлера или метод Рунге-Кутта. Последний факт позволяет надеяться на развитие предлагаемого подхода как в теоретическом, так и практическом аспектах.

3. Пример Леонтьева

Операторы L и M зададим матрицами

$$L = \begin{pmatrix} 7/20 & 1/20 & 21/200 \\ 1/100 & 103/200 & 8/25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/5 & -11/20 \\ -7/25 & \dfrac{10304189}{11996000} & \dfrac{-70836357}{119960000} \\ -4/15 & -2/5 & 13/15 \end{pmatrix}.$$

Если переобозначить $L = B$, $M = I - A$, то матрицы B и A почти совпадут с матрицами из классического примера [6]. «Почти» означает, что элементы m_{22} и m_{23} подобраны специально с целью упростить вычисления и отличаются от приведенных в примере чисел 22/25 и -3/5 на величины

$$m_{22} = \frac{22}{25} - \frac{-252291}{11996000},$$

$$m_{23} = \frac{-3}{5} - \frac{1139643}{119960000}. \qquad (8)$$

В.В. Леонтьев рассматривал взаимосвязи между тремя отраслями экономики: сельским хозяйством, промышленностью и домашними хозяйствами. Элемент a_{ij} матрицы A означает количество продукции i-й отрасли, необходимой для производства единицы продукции j-й отрасли. Элемент b_{ij} матрицы B представляет определенный технологический запас особого типа благ - машин, механических инструментов, промышленных зданий и сооружений, рабочих запасов первичных и промежуточных материалов, производимых отраслью, который используется в отрасли j для производства единицы ее продукции. Другими словами, каждый столбец матрицы B описывает потребность некоторой отрасли в физическом капитале (в расчете на единицу ее валового выпуска) таким же образом, как соответствующий столбец матрицы A описывает ее затраты. Именно поэтому последняя строка матрицы B содержит только нулевые элементы, так как труд невозможно запасти.

Перейдя к расчету системы (3), найдем L-спектр оператора M $\sigma^L(M) = \{0{,}2; 2{,}7\}$. Именно для того, чтобы точки L-спектра оператора M были рациональными, сделаны поправки (8). Точки L-спектр оператора M в исходном примере иррациональны и отличаются от найденных не большее, чем на одну сотую.

Далее по формулам, приведенным в первой части статьи, построим точное и приближенное решение. Приведем точное решение и результаты счета по алгоритму без комментариев, взяв при этом в качестве $f = (2t, \quad 2t, \quad 2t)$ (табл. 1,2).

Таким образом, рассмотренный в данной работе алгоритм позволяет численно решать задачу Шоуолтера-Сидорова с достаточной степенью точности: расхождения в точном и приближенном решении начинаются с тысячных долей.

Литература

1. Павлов, Б.В. Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Б.В. Павлов, А.Я. Повзнер//ЖВМиМФ. - 1973. - Т. 13, № 4.- С. 1056-1059.

2. Павлов, Б.В. Численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Б.В. Павлов, О.Е. Радионова//ЖВМиМФ. -1994. - Т. 34, № 4. - С. 622-627.

3. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа /Г.А. Свиридюк, СВ. Брычев // Изв. вузов. Математика. - 2003.-№8. -С. 46-52.

4. Свиридюк, Г.А. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридюк, КВ. Бурлачко//ЖВМиМФ. -2003. -Т. 43, №11.- С. 1677-1683.

5. Sviriayuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G.A. Sviriayuk, V.E. Fedorov. - Utrecht-Boston-Koln-Tokyo: VSP, 2003.

6. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика/ В.В. Леонтьев. —М.: Экономика, 1997.

Таблица 1

Точное решение задачи Шоуолтера–Сидорова

t	x_1	x_2	x_3
0	1	1	0,7692307692
1/12	1,079594653	1,115125754	0,6545486955
1/6	1,211221782	1,260474368	0,5698255794
1/4	1,399261210	1,434354380	0,5156284632
1/3	1,649051640	1,634491393	0,4925503470
5/12	1,967129067	1,857877706	0,5012141312
1/2	2,361526596	2,100584518	0,5422779145
7/12	2,842149925	2,357527831	0,6164435987
2/3	3,421246553	2,622172543	0,724463383
3/4	4,113994781	2,886165457	0,867151766
5/6	4,939240310	3,138871569	1,045399350
11/12	5,920418738	3,366797082	1,260189034
1	7,086710966	3,552864395	1,512617818

Таблица 2

Приближенное решение задачи Шоуолтера–Сидорова по алгоритму

t	x_1	x_2	x_3
0	1	1	0,7692307692
1/12	1,0795957679	1,1151265428	0,6545494099
1/6	1,2112238218	1,260475827	0,5698269423
1/4	1,3992644345	1,4343566045	0,5156305665
1/3	1,6490560881	1,6344943024	0,4925530898
5/12	1,9671347889	1,8578811956	0,5012174099
1/2	2,36153371	2,1005887151	0,5422821007
7/12	2,8421584126	2,3575325354	0,6164483714
2/3	3,4212567008	2,622177848	0,7244687609
3/4	4,1140069697	2,8861709037	0,8671579463
5/6	4,9392549984	3,1388770098	1,0454063117
11/12	5,9204365728	3,3668021207	1,2601968472
1	7,0867328788	3,552868403	1,5126263028

7. *Бояринцев, Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000.*

8. *Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. -Новосибирск: Наука, 2003.*

9. *Бояринцев, Ю.Е. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев, И.В. Орлова. - Новосибирск: Наука, 2006.*

10. *Брычев, СВ. Исследование математической модели экономики коммунального хозяйства малых городов: дис. ... канд. физ.-мат. наук/ СВ. Брычев. - Челябинск: Челябинский гос. ун-т, 2002.*

11. *Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений Соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина //Дифференц. уравнения. — 2002. - Т. 38, № 2. - С. 1646-1652.*

12. *Загребина, СА. О задаче Шоуолтера-Сидорова / СА. Загребина // Изв. вузов. Серия «Математика». - 2007. —№ 3.-С. 22—28.*

13. *Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. - 4-е изд. -М: Наука, 1988. - 552 с.*

Поступила в редакцию 2 октября 2007 г.