УДК 621.1.016

ИНЖЕНЕРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ

Ю.С. Васильев, А.Б. *Донская*

ENGINEERING FORMULAE FOR TIME CONSTANT DEFINITION

Y.S. Vasiliev, A.B. Donskaya

Для простейших одномерных задач теплопроводности выведены формулы, с помощью которых можно приближённо, не решая трансцендентное уравнение, определить постоянную времени теплового процесса. Полученные формулы удобны для предварительных расчетов с применением любого калькулятора.

Ключевые слова: постоянная времени, алгоритм Ремеза.

For simple one-dimensional problems of heat-transfer capacity the formulae enabling the approximate definition of the time constant of the thermal process without solving a transcendental equation were derived. The deduced formulae are good for preliminary calculation with usage of any calculator.

Keywords: time constant, Remez algorithm.

Введение

При теплотехнических расчетах часто необходимо знать, через какое время после начала процесса распределение температуры можно считать регулярным, а также с какого момента процесс можно считать установившимся. Характеристикой процесса, с помощью которой можно определить это время, является постоянная времени.

Постоянной времени считается число T в представлении решения уравнения теплопроводности в виде ряда, получающегося при решении задачи методом Фурье:

$$t(x,\tau)=\psi(x)+A_1 e^{-\frac{\tau}{T}}\varphi_1(x)+A_2 e^{-\frac{\tau}{T_2}}\varphi_2(x)+\ldots, \quad (1)$$

где t(x,τ) - температура в точке с пространственной координатой χ в момент времени τ; $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ - собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля; $\psi(x)$ - распределение температуры, которое установится в пределе при $\tau \to \infty$. Для нахождения постоянной времени T следует найти наименьший положительный корень μ характеристического уравнения, после чего постоянную времени можно найти по формуле

$$T=\frac{l^2}{a}\cdot\frac{1}{\mu^2}, \quad (2)$$

где / - толщина пластины, a - коэффициент температуропроводности.

Зная постоянную времени, можно сказать с какого времени процесс можно считать регулярным, то есть удовлетворительно описанным только первыми двумя членами в разложении (1). Действительно, через время T второй член в выражении (1) уменьшится в $e \approx 2{,}7$ раза. В рассматриваемых здесь простых задачах второй корень характеристического уравнения по крайней мере в два раза больше первого корня μ; показатели в экспонентах обратно пропорциональны квадратам характеристических чисел. Это означает, что третий член через время T уменьшится по крайней мере в $e^4 \approx 55$ раз. Поэтому на практике можно считать, что через время T процесс становится регулярным. Через время 3T первая экспонента в выражении (1) уменьшится в $e^3 \approx 20$ раз, следующие члены ничтожно малы, и процесс можно считать установившимся.

Характеристическое уравнение может быть трансцендентным и довольно сложным. Хотя при нынешнем развитии вычислительной техники, решить это уравнение нетрудно, неплохо иметь для этого простые приближенные формулы. В данной статье выводятся такие формулы для простейших задач теплопроводности.

Постановка задачи

Для неограниченной пластины (теплоизолированного с боков стержня, стены) распространение тепла описывается уравнением

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}, \quad 0<x<l, \quad (3)$$

начальным условием

$$t(x,0)=\varphi(x) \quad (3.1)$$

и одним из краевых условий на поверхности пластины, например, при $x=l$:

$$t(l,\tau) = t_{\text{В}} \text{ – первого рода,} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}(l,\tau) = q \text{ – второго рода,} \quad (3.3)$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x}(l,\tau) = \alpha \cdot \left(t_{\text{В}} - t(l,\tau)\right) \text{ – третьего рода.} \quad (3.4)$$

Аналогичные условия ставятся и при $x = 0$. Здесь l - толщина пластины (стены), α - коэффициент теплоотдачи, λ - коэффициент теплопроводности материала пластины (стены), $t_{в}$ - температура внешней среды, q - тепловой поток. Для характеризации условий третьего рода применяют безразмерный критерий Био: $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$.

Краевые условия I и III рода

Предположим, что в задаче (3) заданы краевые условия первого и третьего рода. В этом случае характеристическое уравнение [1, 2] запишем в виде

$$\mu \operatorname{ctg}(\mu) = -Bi. \quad (4)$$

Будем считать наименьший положительный корень этого уравнения функцией критерия Био: $\mu = \mu(Bi)$, $0 \le Bi \le \infty$, причём, $\mu(0)$ и $\mu(\infty)$ полагаем равными предельным значениям. Поскольку в формуле (2) для постоянной времени участвует множителем выражение $1/\mu^2$, то введём функцию $\mu_2(Bi) = \frac{1}{\mu^2(Bi)}$. Функция $\mu_2(Bi)$ убывает от $\frac{4}{\pi^2}$ до $\frac{1}{\pi^2}$. Её график (рис. 1) похож на график дробно-рациональной функции, поэтому будем искать приближение для $\mu_2(Bi)$ в виде

$$M(Bi) = \frac{ABi + B}{Bi + C}, \quad (5)$$

где три параметра A, B, C нужно найти.

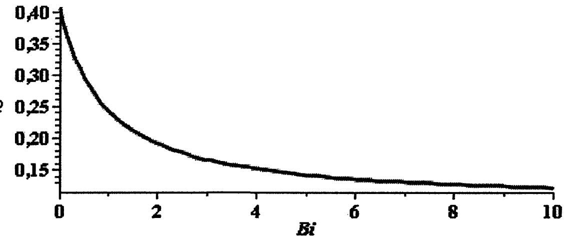

Рис. 1. График функции μ_2

Естественно потребовать совпадения функций $\mu_2(Bi)$ и $M(Bi)$ при Bi - 0 и $Bi = \infty$, что даёт равенства $\frac{B}{C} = \frac{4}{\pi^2}$, $A = \frac{1}{\pi^2}$. Тогда приближение приобретает вид

$$M(Bi) = \frac{Bi + 4C}{\pi^2 (Bi + C)}. \quad (6)$$

Для определения параметра C приравняем производные функций $\mu_2(Bi)$ и $M(Bi)$ при $Bi = 0$: $-\frac{32}{\pi^4} = -\frac{3}{\pi^2 C}$, откуда $C = \frac{3\pi^2}{32}$. Теперь функция $M(Bi)$ полностью определяется:

$$M(Bi) = \frac{Bi + 3\pi^2/8}{\pi^2 \left(Bi + 3\pi^2/32\right)}. \quad (7)$$

График относительной погрешности

$$\delta(Bi) = \frac{\mu_2(Bi) - M(Bi)}{\mu_2(Bi)}$$

приведён на рис. 2.

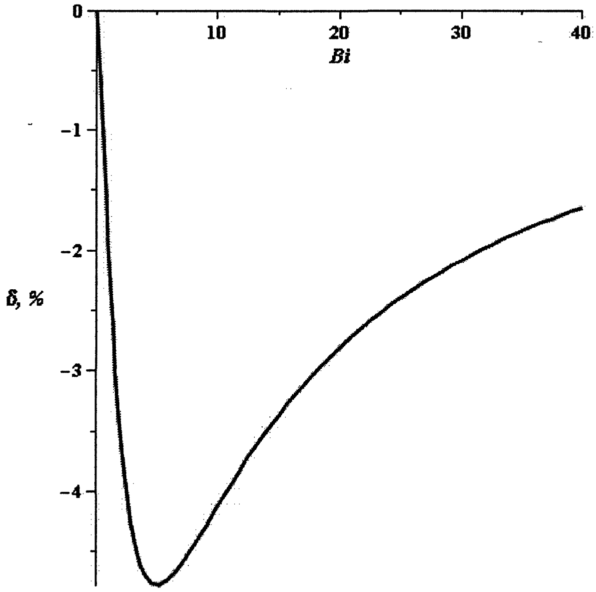

Рис. 2. Относительная погрешность формулы (7)

Из графика видно, что приближение одностороннее, т. е. $M(Bi) > \mu_2(Bi)$ и, используя формулу (7) для определения постоянной времени, получаем приближённое значение с избытком, но не более 5 %. При выводе этой формулы мы использовали простые и вполне очевидные условия. Для применения запишем формулу (7) в виде

$$M(Bi) = \frac{0{,}1013Bi + 0{,}3750}{Bi + 0{,}9255}.$$

Может оказаться, что 5 % - большая погрешность. Выведем формулу с меньшей погрешностью. Для этого поставим задачу: подобрать значения параметров A, B, C в формуле (5) так, чтобы достигался минимум максимальной относительной погрешности при всех значениях Bi, то есть найти

$$\arg\left(\min\left(\max\left(\frac{\left|\mu_2(Bi) - M(Bi)\right|}{\mu_2(Bi)}, Bi = 0...\infty\right)\right), \{A, B, C\}\right). \quad (9)$$

Для решения этой задачи есть алгоритм Ремеза [3], применив который, получаем формулу

$$M(Bi)=\frac{0{,}1Bi+0{,}3365}{Bi+0{,}8193}, \tag{10}$$

относительная погрешность которой составляет 1,4 %. Это видно из графика на рис. 3.

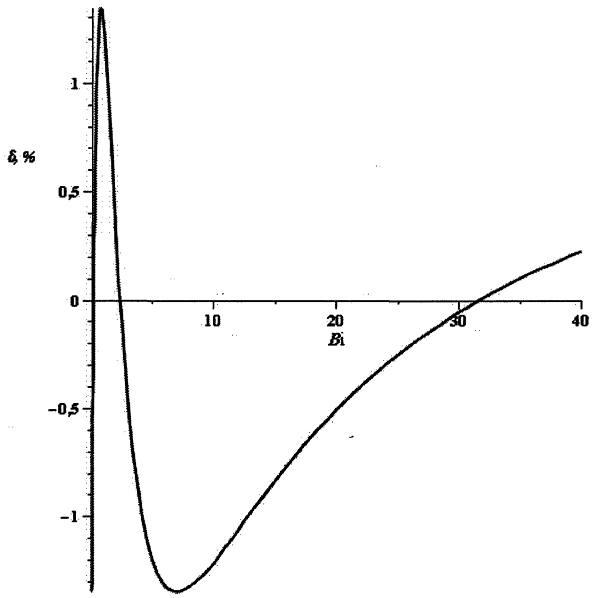

Рис. 3. Относительная погрешность формулы (11)

По сравнению с формулой (8) погрешность при стремлении Bi к нулю или бесконечности увеличивается.

Краевые условия II и III рода

Пусть в задаче (3) заданы краевые условия второго и третьего рода. Тогда характеристическое уравнение будет иметь вид [1,2]

$$\operatorname{ctg}(\mu)=\frac{\mu}{Bi}. \tag{11}$$

Аналогично предыдущему случаю, будем считать наименьший положительный корень этого уравнения функцией критерия Био: $\mu=\mu(Bi)$ $0\le Bi\le\infty$. При построении графиков левой и правой частей этого уравнения в зависимости от μ, становится очевидно, что $\mu\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\mu(0)=0$, $\mu(\infty)=\frac{\pi}{2}$, функция $\mu(Bi)$ возрастает. Так как в формуле (2) постоянная времени зависит от μ^2, то введём функцию $\mu_2(Bi)=\mu^2(Bi)$. Функция $\mu_2(Bi)$ возрастает от 0 до $\frac{\pi^2}{4}$. Будем искать приближение для μ_2 в виде (5), где три параметра *A, B, C* неизвестны.

Потребуем совпадения функций $\mu_2(Bi)$ и *M(Bi)* при $Bi=0$ и $Bi=$, что даст равенства $\frac{B}{C}=0$, $A=\frac{\pi^2}{4}$. Тогда получим приближение в виде

$$M(Bi)=\frac{Bi\cdot\pi^2/4}{Bi+C}. \tag{12}$$

Неизвестный параметр C найдем из условия равенства производных функций $\mu_2(Bi)$ и $M(Bi)$ при $Bi=0$: $1=\frac{\pi^2}{4C}$, о т к $C=\frac{\pi^2}{4}$. Таким образом, получим функцию *M(Bi)*:

$$M(Bi)=\frac{Bi\cdot\pi^2/4}{Bi+\pi^2/4}. \tag{13}$$

Так как в формуле (2) для постоянной времени участвует выражение $\frac{1}{\mu^2}$, то введем функцию $\mu_3(Bi)=\frac{1}{\mu^2}$. Приближением для функции $\mu_3(Bi)$ будет функция $M_2(Bi)=\frac{1}{M(Bi)}$, т. е.

$$M_2(Bi)=\frac{Bi+\pi^2/4}{Bi\cdot\pi^2/4}. \tag{14}$$

Из графика относительной погрешности

$$\delta(Bi)=\frac{\mu_3(Bi)-M_2(Bi)}{\mu_3(Bi)}$$

можно увидеть, что $M_2(Bi)>\mu_3(Bi)$, то есть, используя формулу (14) для определения постоянной времени, получаем одностороннее приближённое значение с избытком, но не более 5,1 %. Так же, как и в предыдущем случае, достоинство этой формулы - ее простота. Для применения запишем формулу в виде

$$M_2(Bi)=\frac{0{,}4052Bi+1}{Bi}. \tag{15}$$

Возможны ситуации, в которых 5 % будет слишком большой погрешностью и необходима более высокая точность вычислений. Для таких случаев выведем формулу с меньшей погрешностью. Аналогично предыдущей задаче воспользуемся алгоритмом Ремеза. Получим формулу

$$M_2=\frac{(0{,}4024Bi+0{,}8109)(1+Bi)}{(Bi+0{,}8051)Bi}.$$

Для вычисления значения M_2 по полученной формуле необходимо выполнить семь арифметических действий. Для того, чтобы добиться более удобного вида, запишем ее в виде суммы простейших дробей:

$$M_2(Bi)=0{,}4024+\frac{1{,}007}{Bi}-\frac{0{,}1179}{Bi+0{,}8051}. \tag{16}$$

Относительная погрешность полученной формулы составляет 0,8 %, что видно из графика на рис. 4.

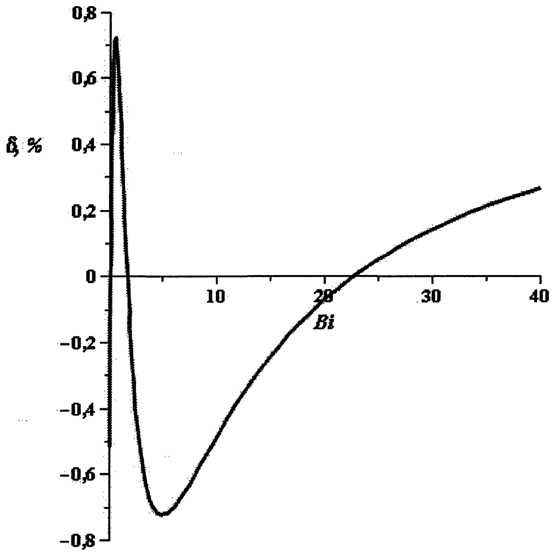

Рис. 4. Относительная погрешность формулы (16)

Условия III рода на обеих границах

В этом случае характеристическое уравнение

$$\operatorname{ctg}(\mu)=\frac{\mu^2-Bi_1Bi_2}{\mu(Bi_1+Bi_2)}, \tag{17}$$

где Bi_1 и Bi_2 - критерии Био для поверхностей пластины. Обозначим $s = Bi_1 + Bi_2$, $\rho = Bi_1Bi_2$. Считаем, что наименьший положительный корень этого уравнения есть функция параметров $s,p:\mu=\mu(s,p)$. В этих обозначениях для определения характеристического значения μ следует решать уравнение

$$\operatorname{ctg}(\mu)=\frac{\mu^2-p}{\mu s}. \tag{18}$$

Область определения функции $\mu(s,p)$: $0\le s\le\infty$, $0\le p\le s^2/4$. Свойства: $\mu(0,0)=0$, $\lim\limits_{s\to\infty}\mu(s,p)=\frac{\pi}{2}$; при $p=\frac{\pi^2}{4}$ имеем равенство $\mu\left(s,\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$; функция $\mu(s,p)$ возрастает как функция от ρ; на граничной линии $p=s^2/4$ имеем $\lim\limits_{s\to\infty}\mu\left(s,\frac{s^2}{4}\right)=\pi$; все линии уровня функции $\mu(s,p)$ являются прямыми. Как и раньше, для множителя $\frac{1}{\mu^2}$ в формуле (2) будем искать приближённую формулу для функции $\mu_2(s,p)=\frac{1}{\mu^2(s,p)}$ в виде дробно-рациональной функции от параметров s, ρ :

$$M(s,p)=\frac{1+As+Bp}{C+Ds+Ep}. \tag{19}$$

Коэффициенты в этом выражении определим из следующих соображений. Если $\rho=0$, то один из критериев Bi_1 или Bi_2 равен нулю, а параметр s совпадает со вторым из них. Имеем уже рассмотренный случай условий второго и третьего рода, и правая часть в (19) должна выглядеть как $\frac{1+4s/\pi^2}{s}$ (с погрешностью 5 %). Отсюда $A=\frac{4}{\pi^2}$, $C=0$, $D=1$. Формула (19) приобретает вид

$$M(s,p)=\frac{1+4s/\pi^2+Bp}{s+Ep}.$$

Из свойств функции $\mu(s,p)$ следует, что

$$\lim_{s\to\infty}\mu_2\left(s,\frac{s^2}{4}\right)=\frac{1}{\pi^2} \text{ и } \mu_2\left(s,\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{4}{\pi^2},$$

что в применении к дроби $M(s,p)$ даёт равенства $B/E=1/\pi^2$ и $1+E/4=E$. Из них $E=\frac{4}{3}$, $B=\frac{4}{3\pi^2}$, и окончательно

$$M(s,p)=\frac{1+4s/\pi^2+4p/3\pi^2}{s+4p/3}. \tag{20}$$

Рассмотрение графика погрешности показывает, что погрешность последней формулы не более 5 %. Для применения запишем формулу в виде

$$M(s,p)=\frac{1+0{,}4052s+0{,}1350p}{s+1{,}333p}, \tag{21}$$

или

$$M(Bi_1,Bi_2)=\frac{1+0{,}4052(Bi_1+Bi_2)+0{,}1350Bi_2Bi_2}{Bi_1+Bi_2+1{,}333Bi_1Bi_2}.$$

Более точную формулу, без заметного усложнения, авторам получить не удалось.

Сводка результатов

Сведем все возможные случаи сочетаний краевых условий и полученные формулы в таблицу.

Пример

Рассмотрим ограждающие конструкции помещений главного корпуса ЮУрГУ. Стены здания кирпичные толщиной l = 0,51 м, характеристики кирпича: плотность $\rho=1800$ кг/м^3, удельная теплоемкость c = 880 Дж/(кг·°С), коэффициент теплопроводности $\lambda=0{,}7$ Вт/(м·°С). Обычно расчет ведется для холодного периода, для которого коэффициенты теплоотдачи $\alpha_H=23$ Вт/(м^2·°С), $\alpha_B=8{,}7$ Вт/(м^2·°С). Данные взяты из [4, 5]. Найдем постоянную времени.

Имеем задачу теплопроводности с краевыми условиями третьего рода с обеих сторон. Проведем необходимые вычисления. Найдем коэффициент температуропроводности a по формуле

$$a=\frac{\lambda}{c\rho}=4{,}419\cdot10^{-7}\ \text{м}^2/\text{с}.$$

Запишем коэффициенты теплоотдачи в терминах статьи: $\alpha_1=23$ Вт/(м^2·°С), $\alpha_2=8{,}7$ Вт/(м^2·°С).

Формулы постоянной времени для неограниченной пластины

$$\left(\text{уравнение } \frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2},\ 0 < x < 1;\ Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}\right)$$

Краевые условия		Характеристическое уравнение	Формулы для постоянной времени T		
			Точные	Приближенные (погрешность 5 %)	Уточненные (погрешность)
I и I рода	$t(0,\tau) = t_H,\quad t(l,\tau) = t_B$	$\sin(\mu) = 0$	$\frac{l^2}{a\cdot\pi^2}$		
I и II рода	$t(0,\tau) = t_H,\quad \frac{\partial t}{\partial x}(l,\tau) = 0$	$\cos(\mu) = 0$	$\frac{4\cdot l^2}{a\cdot\pi^2}$		
II и II рода	$\frac{\partial t}{\partial x}(0,\tau) = 0,\quad \frac{\partial t}{\partial x}(l,\tau) = 0$	$\sin(\mu) = 0$	$\frac{l^2}{a\cdot\pi^2}$		
I и III рода	$t(0,\tau) = t_H$, $\lambda\cdot\frac{\partial t}{\partial x}(l,\tau) = \alpha\cdot(t_B - t(l,\tau))$	$\mu\cdot\mathrm{ctg}(\mu) = -Bi$		$\frac{l^2}{a}\cdot\frac{0{,}1013Bi + 0{,}3750}{Bi + 0{,}9255}$	$\frac{l^2}{a}\cdot\frac{0{,}1Bi + 0{,}3365}{Bi + 0{,}8193}$ (1,4%)
II и III рода	$\frac{\partial t}{\partial x}(0,\tau) = 0$, $\lambda\cdot\frac{\partial t}{\partial x}(l,\tau) = \alpha\cdot(t_B - t(l,\tau))$	$\mathrm{ctg}(\mu) = \mu\cdot\frac{1}{Bi}$		$\frac{l^2}{a}\cdot\frac{0{,}4052Bi + 1}{Bi}$	$\frac{l^2}{a}\cdot\left(0{,}4024 + \frac{1{,}007}{Bi} - \frac{0{,}1179}{Bi + 0{,}8051}\right)$ (0,8%)
III и III рода	$\lambda\cdot\frac{\partial t}{\partial x}(0,\tau) = -\alpha_1\cdot(t_H - t(0,\tau))$, $\lambda\cdot\frac{\partial t}{\partial x}(l,\tau) = \alpha_2\cdot(t_B - t(l,\tau))$	$\mathrm{ctg}(\mu) = \frac{\mu^2 - Bi_1 Bi_2}{\mu(Bi_1 + Bi_2)}$		$\frac{l^2}{a}\cdot\frac{1 + 0{,}4052(Bi_1 + Bi_2) + 0{,}1350Bi_1Bi_2}{Bi_1 + Bi_2 + 1{,}333Bi_1Bi_2}$	

Вычислим критерии Био:

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1 l}{\lambda} = 16{,}757\,,\quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 l}{\lambda} = 6{,}339\,.$$

Найдем значение постоянной времени по соответствующей формуле из таблицы:

$$T = \frac{l^2}{a} \cdot \frac{1 + 0{,}4052\left(Bi_1 + Bi_2\right) + 0{,}1350 Bi_1 Bi_2}{Bi_1 + Bi_2 + 1{,}333 Bi_1 Bi_2} =$$

$$= 88268\ \text{с} = 24{,}5\ \text{ч}.$$

Затем вычислим точное значение. Для этого решим характеристическое уравнение (18), а затем подставим полученное значение в формулу (2). В результате получим точное значение постоянной времени T=87156 с = 24,21 ч. Относительная погрешность приближенного значения $\delta = 1{,}2\ \%$.

Заключение

Выведенные формулы просты и удобны в применении. Они имеют небольшую погрешность, допустимую в предварительных расчетах. Их можно использовать для получения начальных приближений в численных методах. Похожим образом можно получить подобные формулы для других случаев (цилиндра, шара).

Литература

1. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. - М.: Высшая школа, 1967. - 599 с.

2. Лыков, А.В. Тепломассобмен: справ. / А.В. Лыков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Энергия, 1978. - 480 с.

3. Ремез, Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. - Киев: Наукова думка, 1969. - 624 с.

4. СНиП 23-02-2003 «Тепловая защита зданий». - М.: Госстрой России, 2004. - 25 с.

5. СП 23-101-2004 «Свод правил по проектированию и строительству. Проектирование тепловой защиты зданий». - М.: Техкнига-Сервис, 2004. -139 с.

Поступила в редакцию 17 марта 2009 г.

Васильев Юрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Южно-Уральского государственного университета.

Область научных интересов: применение численных методов решения задач моделирования и оптимизации.

Контактный телефон: 2-67-90-43.

Vasiliev Yury Sergeevich, candidate of physical and mathematical science, associate professor of the Applied Mathematics department of South Ural State University.

Scientific interests: application of numerical procedures to solving of problems of simulation and optimization.

Contact phone: 2-67-90-43.

Донская Алена Борисовна, студентка 5 курса кафедры «Прикладная математика» Южно-Уральского государственного университета.

Область научных интересов: численные методы, теория приближения функций.

Контактный телефон: 8-908-581-72-92.

Donskaya Alena Borisovna, 5-year student of the Applied Mathematics department of South Ural State University.

Scientific interests: numerical procedures, function approximation theory.

Contact phone: 8-908-581-72-92.