

УТОЧНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОСЕВЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЕГО ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУРАВНОВЕШЕННОСТИ

И.И. Иванов, М.М. Тверской

SPECIFICATION OF CALCULATED VALUES OF AXIAL MOMENT OF INERTIA OF A SOLID BODY ON THE BASIS OF MEASURING THE PARAMETERS OF ITS DYNAMIC IMBALANCE

/./ Ivanov, M.M. Tverskoi

Предлагается методика уточнения расчетных значений осевых моментов инерции твердого тела на основе измерения параметров его динамической неуравновешенности при вращении вокруг трех заданных осей.

Ключевые слова: геометрия масс, момент инерции.

The methods of specifying the calculated values of axial moments of inertia of a solid body on the basis of measuring the parameters of its dynamic imbalance while revolving around three given axes is offered.

Keywords: mass geometry, moment of inertia.

В работе [1] используется теоретическое разложение твердого тела на шар и пластинку, моменты инерции которой могут быть определены с помощью балансировочного станка. Плоскостные и осевые моменты инерции (МИ) этой пластинки в данной работе обозначены чертой: $\bar{J}_{yoz}, \bar{J}_{zox}, \bar{J}_{xoy}; \bar{J}_x, \bar{J}_y, \bar{J}_z$.

Величины осевых МИ пластинки удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\bar{J}_x = J_x - J_s = \dot{J}_x + d - J_s = \dot{J}_x + J_x + 2\bar{J}_{yoz} - J_s = \dot{J}_x + 2\bar{J}_{yoz};$$

$$\bar{J}_y = J_y - J_s = \dot{J}_y + d - J_s = \dot{J}_y + J_y + 2\bar{J}_{yoz} - J_s = \dot{J}_y + 2\bar{J}_{yoz};$$

$$\bar{J}_z = J_z - J_s = \dot{J}_z + d - J_s = \dot{J}_z + J_z + 2\bar{J}_{yoz} - J_s = \dot{J}_z + 2\bar{J}_{yoz}.$$

Здесь J_x, J_y, J_z – действительные МИ рассматриваемого твердого тела; $\dot{J}_x, \dot{J}_y, \dot{J}_z$ – так называемые «граничные» [1] МИ; J_s – осевой МИ шара с центром, совпадающим с началом координат (точкой O) и с центром пластинки; $d \geq 0$ – величина, на которую граничные МИ меньше действительных.

Из этих уравнений, учитывая, что $\bar{J}_{yoz} \geq 0$, видим, что МИ этой пластинки $\bar{J}_x, \bar{J}_y, \bar{J}_z$ больше или равны соответствующим граничным МИ. Равенство имеет место лишь при $\bar{J}_{yoz} = 0$, когда оси y и z перпендикулярны той главной оси инерции в точке O данного тела, МИ относительно которой максимален.

Для уточнения приближенных значений осевых моментов инерции твердого тела J'_x, J'_y, J'_z , полученных, например, расчетным путем, нам потребуется знание попарных разностей осевых МИ:

$$\Delta_{xy} = J_x - J_y, \Delta_{yz} = J_y - J_z, \Delta_{zx} = J_z - J_x, \quad (1)$$

которые могут быть определены по показаниям балансировочного станка после трёх вращений вокруг трёх различных осей. Условия на взаимное положение этих осей и формулы расчета попарных разностей $\Delta_{xy}, \Delta_{yz}, \Delta_{zx}$ из показаний станка приведены в работе [2].

При практических вычислениях удобнее выбрать направление оси n' противоположным принятому в работе [2]. Поэтому направляющие косинусы α', β', γ' оси n' и попарные разности Δ_{xy}, Δ_{yz} окончательно запишутся в следующем виде:

$$\alpha' = -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \beta' = \sqrt{1-\beta^2}; \gamma' = -\frac{\gamma\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (2)$$

$$\Delta_{xy} = \frac{J_{nn'}}{\beta\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{(2\beta^2-1)(\alpha J_{xy} + \gamma J_{yz}) + \beta\gamma(2\alpha J_{zx} - \gamma\Delta_{zx})}{\beta(1-\beta^2)}; \quad (3)$$

$$\Delta_{yz} = -\frac{J_{nn'}}{\beta\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{(2\beta^2-1)(\alpha J_{xy} + \gamma J_{yz}) + \beta\alpha(2\gamma J_{zx} + \alpha\Delta_{zx})}{\beta(1-\beta^2)}. \quad (4)$$

Разность Δ_{zx} должна вычисляться по формуле:

$$\Delta_{zx} = -2(J_{m'm} - J_{zx} \cos(2\varphi)) / \sin(2\varphi), \quad (5)$$

где $J_{zx}, J_{m'm}, J_{nn'}$ – центробежные моменты изделия (показания балансировочного станка); φ – угол наклона изделия на станке; α, β, γ – направляющие косинусы оси вращения.

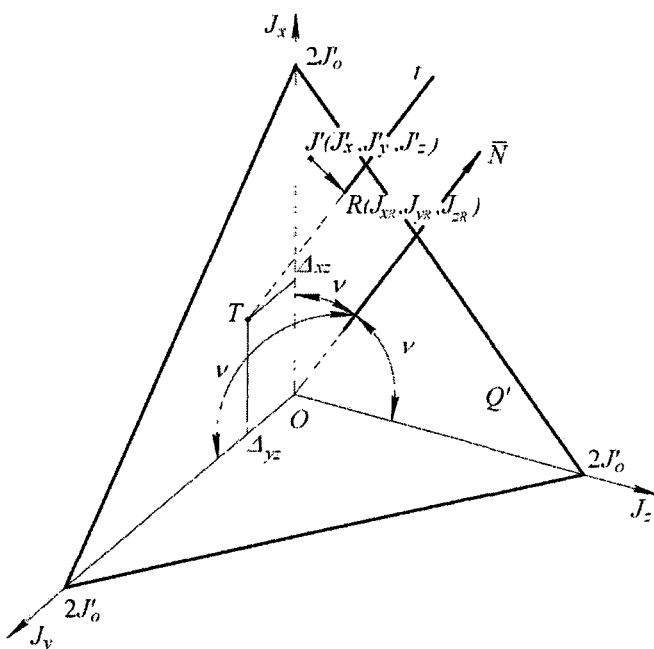
В практических расчетах разности Δ_{xy}, Δ_{yz} удобнее вычислять не по формулам (3), (4), а с помощью вспомогательной величины Δ_n :

$$\Delta_n = \frac{J_{nn'}}{\beta\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{2(\alpha\beta J_{xy} + \beta\gamma J_{yz} + \gamma\alpha J_{zx}) - \frac{\alpha J_{xy} + \gamma J_{yz}}{\beta}}{1-\beta^2}; \quad (6)$$

$$\Delta_{xy} = \Delta_n - \frac{\Delta_{zx}}{1-\beta^2} \gamma^2; \Delta_{yz} = -\Delta_n - \frac{\Delta_{zx}}{1-\beta^2} \alpha^2. \quad (7)$$

По определенным попарным разностям $\Delta_{xy}, \Delta_{yz}, \Delta_{zx}$ и центробежными МИ J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} можно вычислить ориентацию всех трех главных осей инерции твердого тела и найти оценки его осевых МИ [1, 2].

В данной работе мы рассмотрим возможность уточнения приближенных значений осевых МИ J'_x, J'_y, J'_z , полученных расчетом по чертежам изделия, в том числе при его компьютерном проектировании.



Изобразим систему координат $OJ_x J_y J_z$ и точку J' с координатами: J'_x, J'_y, J'_z (см. рисунок). Соотношения осевых МИ выбрано наиболее типичным для таких изделий машиностроения, как автомобильные колёса, вентиляторные диски, отрезные и шлифовальные круги: $J_x > J_y > J_z > 0, J_y \approx J_z$. Отсюда следуют соотношения для попарных разностей: $\Delta_{xy} > 0, \Delta_{yz} > 0, \Delta_{zx} < 0, \Delta_{yz} \approx 0, |\Delta_{xy}| \approx |\Delta_{zx}|, |\Delta_{xy}| < |\Delta_{zx}|$.

Уравнения (1) описывают плоскости, параллельные осям J_z, J_x, J_y соответственно. Система линейных уравнений (1) имеет ранг, равный 2. Поэтому три плоскости пересекаются по одной прямой t . Эта прямая имеет равный угол наклона

$\nu = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = 54^\circ 44' 8,2''$ к каждой из осей J_z, J_x, J_y .

Прямая t пересекает координатную плоскость $J_x O J_y$ в точке $T(\Delta_{xz}, \Delta_{yz}, 0)$ и параллельна вектору \bar{N} , совпадающему с биссектрисой трехгранного угла, образуемого координатными плоскостями. Ясно, что все точки (J_x, J_y, J_z) , удовлетворяющие системе уравнений (1), должны лежать на этой прямой. Из них только одна точка соответствует сочетанию действительных осевых МИ изделия. Мы должны выбрать на этой прямой точку, которая является наилучшей оценкой действительных МИ. Приближенные значения J'_x, J'_y, J'_z нам известны. Примем, что наилучшей оценкой является точка R , расположенная к точке J' ближе всех остальных точек данной прямой t , т. е. на перпендикуляре, опущенном из точки J' на прямую t . Методами аналитической геометрии находим координаты точки R :

$$J_{xR} = \frac{J'_x + J'_y + J'_z + \Delta_{xy} - \Delta_{zx}}{3}; J_{yR} = \frac{J'_x + J'_y + J'_z + \Delta_{yz} - \Delta_{xy}}{3}; J_{zR} = \frac{J'_x + J'_y + J'_z + \Delta_{zx} - \Delta_{yz}}{3}. \quad (8)$$

Рассмотрим смысл полученного результата. Возвратимся к системе (1). Если эту систему дополнить уравнением

$$J_x + J_y + J_z = 2J_o \quad (9)$$

и полагать, что величина полярного момента инерции изделия J_o нам известна, то уравнение (9) определяет плоскость (с направляющим вектором \bar{N}), отсекающую на координатных осях одинаковые отрезки, равные $2J_o$. Эта плоскость перпендикулярна прямой t . В каждой точке этой плоскости удвоенная величина полярного момента инерции рассматриваемого твердого тела (относительно полюса O) равна $2J_o$.

Решая уравнения (1), (9), т. е. определяя координаты точки пересечения прямой t и плоскости (9), получаем

$$J_x = \frac{1}{3}(2J_o + \Delta_{xy} - \Delta_{zx}); J_y = \frac{1}{3}(2J_o + \Delta_{yz} - \Delta_{xy}); J_z = \frac{1}{3}(2J_o + \Delta_{zx} - \Delta_{yz}).$$

Поскольку точное значение $2J_o$ в реальной ситуации нам не известно, то в качестве его оценки мы принимаем расчетное значение суммы

$$2J'_o = J'_x + J'_y + J'_z,$$

т. е. плоскость Q с направляющим вектором \bar{N} проводим через точку $J(J'_x, J'_y, J'_z)$ и находим координаты точки R пересечения плоскости Q и прямой t . Значения этих координат и определяются соотношениями (8).

Несколько меньшие уточненные значения осевых моментов инерции мы получим, проведя через точку J' не плоскость Q , а сферу с центром в начале координат и с радиусом

$$|OJ'| = \sqrt{(J'_x)^2 + (J'_y)^2 + (J'_z)^2},$$

равным не арифметической сумме расчетных моментов, а их «геометрической» сумме.

Приближенные значения осевых МИ на практике обычно получают после расчета характеристик геометрии масс изделия по его чертежу. Использование в расчетах фактических значений размеров готовых деталей несколько повышает точность расчета; но все равно в большинстве случаев она остается довольно низкой из-за неравноплотности материала по объему и отклонения формы деталей от теоретического контура. Не удаётся обычно в расчетах учесть также смещения и перекосы деталей в пределах зазоров, резьбы, накатанные и рифленые поверхности и другие сложные элементы. По некоторым сведениям ошибки теоретического расчета МИ по чертежу для сложных узлов составляет 5-10%.

Следует отметить и то обстоятельство, что степень соответствия найденных уточненных значений J_{xR}, J_{yR}, J_{zR} действительным значениям зависит от точности расчета не отдельных значений, J'_x, J'_y, J'_z , а их суммы, что следует из выражений (8). Проиллюстрируем сказанное примером.

Допустим, что некоторое тело имеет следующие действительные значения МИ: $J_x = 16, J_y = 12, J_z = 11$. Тогда $J_x + J_y + J_z = 39, \Delta_{xy} = 4, \Delta_{yz} = 1, \Delta_{zx} = -5$. Расчетные значения: $J'_x = 15, J'_y = 12,5, J'_z = 11,5, J'_x + J'_y + J'_z = 39$. Уточненные значения: $J_{xR} = \frac{1}{3}(39 + 4 + 5) = 16, J_{yR} = \frac{1}{3}(39 + 1 - 4) = 12, J_{zR} = \frac{1}{3}(39 - 5 - 1) = 11$.

Несмотря на достаточно грубый расчет моментов J'_x, J'_y, J'_z , «удачное» сочетание допущенных ошибок привело к их полной взаимной компенсации ($2J'_o = 2J_o = 39$). Это позволило получить уточненные значения моментов, J_{xR}, J_{yR}, J_{zR} , равные их действительным значениям.

Степень уточнения зависит и от точности определения разностей моментов $\Delta_{xy}, \Delta_{yz}, \Delta_{zx}$ с помощью балансировочного станка [1, 2]. Современные станки для динамической балансировки имеют высокую точность. Поэтому для сложных изделий в подавляющем большинстве случаев будет иметь место существенное уточнение исходных расчетных МИ J'_x, J'_y, J'_z .

Литература

1. Иванов, И.И. Метод получения дополнительной информации о геометрии масс твердого тела с помощью равномерного вращения / И.И. Иванов // Автоматизация расчета и контроля параметров изделий в машиностроении: сб. научных трудов. - Челябинск: ЧГТУ, 1994. - С. 25-33.
2. Иванов, И.И. Расширение возможностей метода получения дополнительной информации о геометрии масс твердого тела на балансировочном станке / И.И. Иванов, В.А. Смирнов // Автоматизация расчета и контроля параметров изделий в машиностроении: сб. научных трудов. - Челябинск: ЧГТУ, 1995. - С. 41-46.

Поступила в редакцию 15 июня 2008 г.

Иванов Илья Иванович. ОАО «НИИ «Гермес», инженер. Область научных интересов - расчёт и контроль массо-геометрических характеристик изделий,

Иуа I. Ivanov. Open joint-stock company «Research Center «Hermes», engineer. Professional interests: calculation and monitoring of mass-geometrical characteristics of work-pieces.

Тверской Михаил Михайлович. Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, заведующий кафедрой «Автоматизация механосборочного производства» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов - автоматизация машиностроения, расчет и контроль массогеометрических характеристик изделий.

Mikhail M. Tverskoi. The doctor of engineering science, professor, the Honoured Scientist and Engineer of Russian Federation, head of «Mechano-Assembly Automation» department of the South Ural State University. Professional interests: automation of a machine industry, account and monitoring of mass-geometry characteristics of workpieces.