

# РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ БЕССТУПЕНЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

С.А. Дубровский, А.Ф. Дубровский

## DISRUPTIVE VARIATION OF THE CONTINUOUSLY RATED DRIVE WITH CHANGEABLE

S.A. Dubrovski, A.F. Dubrovski

На основе метода точечных отображений исследуется периодический режим движения привода машин с бесступенчатой передачей.

*Ключевые слова:* бесступенчатая передача; нелинейные колебания; фазовый портрет; метод точечных отображений.

On the basis of pointed reflections car transmission period movement with continuously rated drive has been studied.

*Keywords:* infinitely variable transmission; non-linear vibrations; phase picture; method of pointed reflections.

Рассматривается механический бесступенчатый регулируемый привод, содержащий нефрикционную бесступенчатую передачу непрерывного действия (НПНД) [1].

На рис.1 изображена одна из конструктивных схем НПНД - обобщенная схема НПНД «с вращающимся эксцентриком». Механизм управления выполнен по схеме «с двумя эксцентриками» [1]. На эксцентрике 2 (см. рис. 1, а) свободно размещен промежуточный вал 3, связанный с ведущими звеньями 4 и 5 соответственно корпусного и выходного преобразователей. Ведомое звено корпусного преобразователя кинематически связано с корпусом 8, выходного - с маховиком 6 ведомого вала 7. Изменяя относительное положение ведущего вала 1 и эксцентрика 2,

можно изменять общий эксцентриситет OS промежуточного вала, а следовательно и передаточное отношение НПНД. В качестве преобразователей можно использовать зубчатые преобразующие механизмы - ПМ (см. рис. 1,б). В этом случае ведущие звенья 4 и 5 преобразователей выполняются, например, в виде несимметричных зубчатых колес (микрохраповиков), а рабочие тела 12 шарнирно крепятся на наружных обоймах 11.

Структура НПНД, вследствие наличия преобразующего механизма

(ПМ) – переменна [10]. Рабочий процесс передачи представляет собой последовательное чередование

время  $\Pi = \prod_{i=1}^{\infty} \Pi_i$  отдельных циклов  $\Pi_i$  движения, совпадающих с периодом

$$t \in [0, t_1] \quad (1)$$

действия одного рабочего тела ПМ.

Математическая модель исследуемой динамической системы имеет вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \dot{\varphi}_7 [1 - \nu(M(t) + T_o \dot{M}(t))]; \\ [I_o + a^2_{11}(I_1 + A_1)] \dot{\alpha}(t) \ddot{\alpha}(t) &= \\ &= M(t) \dot{\alpha}(t) - \dot{B}(t) \ddot{B}(t) I_s - \dot{\gamma}(t) [a_{12} M_c + (I_3 + a^2_{12} I) \ddot{\gamma}(t)]; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

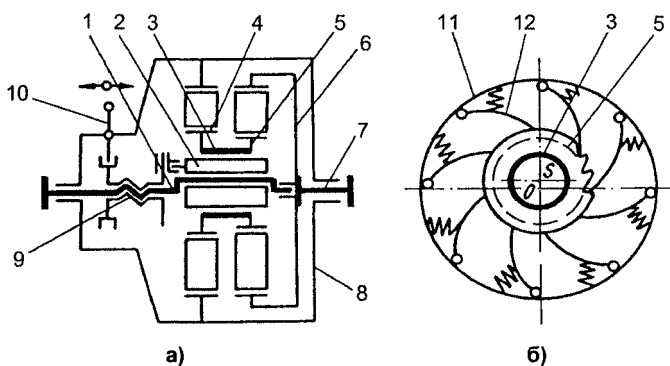


Рис. 1. Обобщенная схема НПНД

$$\dot{\beta}(t) = a_{11}\dot{\alpha}(t)[a_1 N_{\varphi_6}(t) + a_7 N_{\varphi_3}(t)]; \quad \dot{\gamma}(t) = \dot{\beta}(t)\Pi_{\varphi_4}(t) + a_{11}a_{11}\dot{\alpha}(t)\Pi_{\varphi_6}(t). \quad (3)$$

Здесь:  $M(t), M_c$  – вращающий момент двигателя и момент сопротивления, приведенный к ведомому валу бесступенчатого привода;  $\varphi_i(t), i \in \{3, 4, 6, 7\}$  – углы, определяющие конфигурацию различных звеньев НПНД [1];  $\beta(t), \gamma(t)$  – углы поворота, соответственно, промежуточного и ведомого валов НПНД;  $a_i, i \in \{1, 7, 11, 12\}$ ,  $I, I_1, I_3, I_s, I_d$  – коэффициенты, определяющие геометрические и инерционные параметры НПНД [1];  $\Pi_{\varphi_4} = \frac{\partial}{\partial \varphi_4} \Pi(\varphi_4, \varphi_6)$ ,  $\Pi_{\varphi_6} = \frac{\partial}{\partial \varphi_6} \Pi(\varphi_4, \varphi_6)$  – первые

передаточные функции (передаточные отношения) преобразующих механизмов НПНД.

Исследуемая динамическая система (2), (3) является автономной. Фазовое пространство её – трехмерно. В качестве фазовых координат примем  $\alpha(t), \dot{\alpha}(t), M(t)$ . На установившихся режимах граничные значения двух фазовых координат,  $\dot{\alpha}(t)$  и  $M(t)$  в начале и конце периода совпадают:

$$\dot{\alpha}^{i+1}(0) = \dot{\alpha}^i(t_1), \quad M^{i+1}(0) = M^i(t_1), \quad i \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (4)$$

Третья координата  $\alpha(t)$ , угол поворота ведущего вала НПНД, с течением времени монотонно возрастает.

Таким образом, на установившихся режимах динамическая система (2), (3) совершает периодическое «вращательное» (Г.Е.О. Джакаля) [3] движение или, по другой (Г.Н. Дубошин, Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский [4, 5]) терминологии – периодические колебания второго рода. Следовательно, построение законов движения НПНД в данном случае эквивалентно решению граничной задачи (2), (3), (4) с периодическими [6] граничными условиями.

В соответствии с изложенным, анализу динамических процессов в приводе предшествует построение аналитического решения граничной задачи для дифференциальных уравнений (2), (3) движения обобщенной динамической модели бесступенчатого привода. Данная задача решена в работе [1]. В настоящей работе на базе полученных аналитических зависимостей в фазовом пространстве, с использованием метода точечных отображений [7], исследуются нелинейные колебания привода.

## 1. Фазовое пространство. Фазовые траектории

Вначале рассмотрим наиболее общий случай, соответствующий **неустановившимся** колебаниям привода. При этом на первом этапе ограничимся анализом одного периода (1).

На неустановившихся режимах дополнительные условия, в отличие от случая (4), имеют вид  $\alpha(0) = \alpha^*, \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}^*, M(0) = M^*$ . (5)

Таким образом, построение законов движения привода в данном случае эквивалентно решению задачи Коши (2), (3), (5). Решение данной задачи приведено в работе [8].

В процессе построения решения задачи Коши было установлено, что в каждой внутренней точке отрезка (1) это решение существует, единственно и непрерывно зависит от времени  $t$  и начальных данных. Отмеченное обстоятельство позволяет сделать вывод, что на множестве (1), в частности, не имеет место самопересечений фазовых траекторий исследуемой динамической системы, т. е. фазовые траектории, по крайней мере, не являются сепаратрисными [7] кривыми: во всех внутренних точках отрезка (1) фазовые траектории являются «гладкими» кривыми. Существенной топологической особенностью фазовых траекторий, которую необходимо

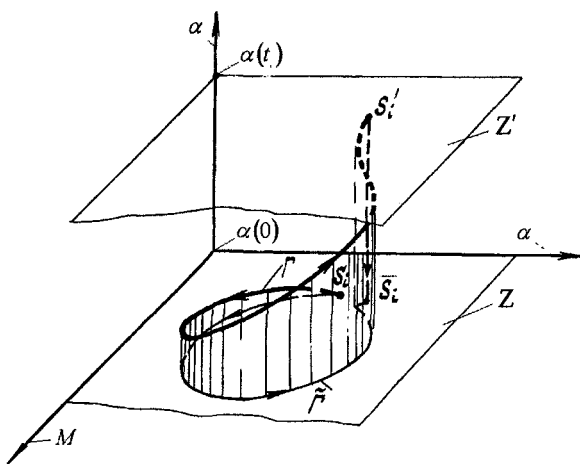


Рис. 2. Фазовый портрет одного цикла

учитывать при их построении, является также то, что в силу вращательного характера движения привода фазовые траектории  $\Pi_i$  направлены в сторону возрастания оси  $O\alpha$ .

Перечисленных свойств фазовых траекторий вполне достаточно для качественного описания

их поведения в фазовом пространстве (рис. 2). Более точные, количественные характеристики можно получить на основе параметрических уравнений фазовых траекторий – решения задачи Коши (2), (3), (5).

Пусть  $Z$  – плоскость  $\alpha(0)$ , а  $Z'$  – плоскость  $\alpha(t_1)$  (см. рис. 2). Тогда движению исследуемой динамической системы на отрезке (1) соответствует перемещение изображающей точки  $S$  вдоль фазовой траектории  $\Gamma$  из положения  $S_i(\alpha(0), \dot{\alpha}(0), M(0))$ ,  $S_i \in Z$ , в положение  $S'_i(\alpha(t_1), \dot{\alpha}(t_1), M(t_1))$ ,  $S'_i \in Z'$ . При этом существенно, что фазовая траектория  $\Gamma$  пересекает (а не касается) плоскостей  $Z$  и  $Z'$ . Следовательно, последние являются «плоскостями без контакта» [7]. В справедливости данного утверждения нетрудно убедиться, анализируя выражение

$$\bar{\zeta} = \arccos\left(\dot{\alpha}(0) \cdot (\dot{\alpha}^2(0) + \ddot{\alpha}^2(0) + \dot{M}^2(0))^{-0,5}\right), \quad (6)$$

определяющее угол  $\bar{\zeta}$  между осью  $O\alpha$  (см. рис. 2) и касательной к фазовой траектории  $\Gamma$  в точке  $S$ , т. е. при  $t = 0$ . Здесь предполагается, что параметрическое уравнение фазовой траектории  $\Gamma$

$$\alpha = \alpha(t), \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}(t), \quad M = M(t) \quad (7)$$

определяется соотношениями (2), (3), (5).

Действительно, если не рассматривать аварийный режим работы приводного электродвигателя – режим опрокидывания, то можно сделать вывод, что при работе на нормальных эксплуатационных режимах угловая скорость его ротора  $\dot{\alpha}(t)$  никогда не обращается в ноль, в том числе и при  $t = 0$ , т. е.  $\dot{\alpha}(0) \neq 0$ . В силу этого, согласно (7),  $\forall t \in [0, t_1]: \bar{\zeta} \neq 0,5\pi$ . Таким образом, при  $t = 0$ , т. е. в начальный момент времени периода (1), фазовая траектория  $\Gamma$  не может иметь направление перпендикулярное оси  $O\alpha$ , а следовательно, не может «касаться» плоскости  $Z$ , но может ее только «пересекать». Тем самым мы показали, что плоскость  $Z$  является по отношению к фазовой траектории  $\Gamma$  «плоскостью без контакта». Аналогично доказывается подобное утверждение и в отношении плоскости  $Z'$ .

## 2. Точечные отображения, порождаемые нелинейными колебаниями привода

Выше было отмечено, что в процессе работы привода фазовая точка  $S_i$ , лежащая в плоскости  $Z$ , переходит в точку  $S'_i$  плоскости  $Z'$ . Следовательно, в пределах периода (1) фазовые траектории  $\Gamma$  исследуемой динамической системы (2), (3), (5) порождают [7] точечное отображение  $T'_i$  плоскости  $Z$  в плоскость  $Z'$ . Если теперь спроектировать точку  $S'_i$  на плоскость  $Z$  ( $\bar{S}'_i(\alpha(0), \dot{\alpha}(t_1), M(t_1))$  – проекция точки  $S'_i$ ), т. е. если ввести в рассмотрение дополнительное отображение  $\bar{T}_i$  плоскости  $Z'$  в  $Z$ , то придем к отображению  $T_i = T'_i \cdot \bar{T}_i$  плоскости  $Z$  «в себя».

Необходимо отметить, что введение в рассмотрение отображения  $\bar{T}_i$ , а следовательно и  $T_i$ , соответствующее скачкообразному изменению в конце периода (1) фазовой координаты  $\alpha$  на величину  $\alpha_{11}^{-1}\zeta$ , эквивалентно выполнению соотношения (4).

Введение в рассмотрение отображения  $T_i$  позволяет перейти от анализа одного периода (1) к исследованию нелинейных колебаний привода на произвольном отрезке времени. Действительно, как уже отмечалось, рабочий процесс привода можно представить как последовательное чередование  $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$  периодов (1). В пределах первого периода изображающая точка, перемещаясь из положения  $S_1$  в  $\bar{S}_1$ , порождает на поверхности «без контакта»  $Z$  точечное отображение  $T_1$ . При дальнейшем движении привода вновь имеет место период (1). При этом изображающая точка из положения  $S_2 \equiv \bar{S}_1$  совершенно аналогично перемещается в последующую точку  $\bar{S}_2$  плоскости  $Z$ , порождая вновь точечное отображение  $T_2$ , и т. д. Следовательно, движение привода на неустановившемся режиме в течение произвольного отрезка времени, представляющее последовательное чередование  $n$  периодов (1), в фазовом пространстве можно представить [7] как последовательное произведение точечных отображений  $T_i$ :

$$T = \prod_{i=1}^n T_i. \quad (8)$$

Обобщая вышеизложенное, можно сделать вывод, что в процессе движения привода фазовые траектории вновь и вновь (через ограниченные промежутки времени) пересекают плоскость  $Z$ , порождая на ней точечное отображение  $T$ . Из этого следует, что плоскость  $Z$  является «секущей» [7] плоскостью исследуемой динамической системы (2)–(4). Причем, в силу единственности и непрерывной зависимости решения (2), (3), (5) от времени и начальных условий отображение  $T$ , а следовательно и  $T$ , является также непрерывным [7]. Последнее, в частности, означает, что для любой точки  $S_i$ , удовлетворяющей отмеченным выше условиям, всегда существует последующая точка  $\bar{S}_i$  отображения  $T$ , т. е. существует однозначная функция последования [7]

$$\bar{S} = \Pi(S), \quad (9)$$

являющаяся аналитическим выражением отображения  $T$ .

Заметим, что на основе (7) нетрудно получить явное выражение для отображения  $T$ . С этой целью достаточно рассмотреть отдельное отображение  $T_i$  плоскости  $Z$  в себя, переводящее некоторую точку  $S_i^*(\dot{\alpha}(0), M(0))$  плоскости  $Z$  в последующую точку  $\bar{S}_i^*(\dot{\alpha}(t_1), M(t_1))$  той же плоскости.

Установление факта, что плоскость  $Z$  есть секущая плоскость исследуемой динамической системы является основным и принципиальным моментом проведенного анализа. Действительно, в работе [7] показано, что «...структура динамической системы взаимнооднозначно определяется структурой порождаемого ею на секущей поверхности точечного отображения...». Следовательно, исследование нелинейных, разрывных колебаний привода в данном случае эквивалентно [7] анализу точечного отображения  $T$  плоскости  $Z$  в себя.

Сведение задачи исследования динамики привода к анализу точечного отображения  $T$  позволяет решить ряд прикладных задач: исследовать устойчивость периодических разрывных колебаний привода, исследовать влияние различных конструктивных параметров на устойчивость, проанализировать бифуркации динамической системы и т.п.

### 3. Исследование периодических колебаний. К анализу фазового портрета привода

Периодическим колебаниям исследуемой динамической системы в фазовом пространстве (рис. 3) соответствует замкнутая фазовая траектория – кривая  $\Gamma$ . При этом, как известно [7], отображение  $T$  поверхности  $Z$  порождает неподвижную точку  $S^*(\dot{\alpha}^*, M^*) \equiv \bar{S} \equiv S$ , которая в общем случае определяется на основе зависимостей (7), (9), согласно уравнению

$$\bar{S}^* = \Pi(S^*) \quad (10)$$

В рассматриваемом случае решение данной задачи имеет вид:

$$M^* = a_{12} M_c H_\alpha(\alpha^*) + \sum_{i=0}^4 E_{10+2i},$$

$$\dot{\alpha}^* = h_0 + E_9 + \sum \omega_i E_{2i}. \quad (11)$$

Следует отметить, что проекция  $\tilde{\Gamma}$  фазовой траектории  $\Gamma$  на плоскость  $Z$  в данном случае также будет замкнутой кривой [7]. Для качественного воспроизведения кривой  $\tilde{\Gamma}$ , в дополнение к тем свойствам фазовой траектории  $\Gamma$ , которые рассмотрены выше, необходимо добавить следующее, очевидное.

В граничных точках периода (1) действия одного рабочего тела преобразующего механизма НПНД, т. е. в точке  $S^*$ , происходит смена структуры динамической системы. Следовательно, точка  $S^*$  является единственной точкой, в которой нарушается «гладкость» [7] фазовой траектории  $\Gamma$  и, одновременно, ее проекции  $\tilde{\Gamma}$ .

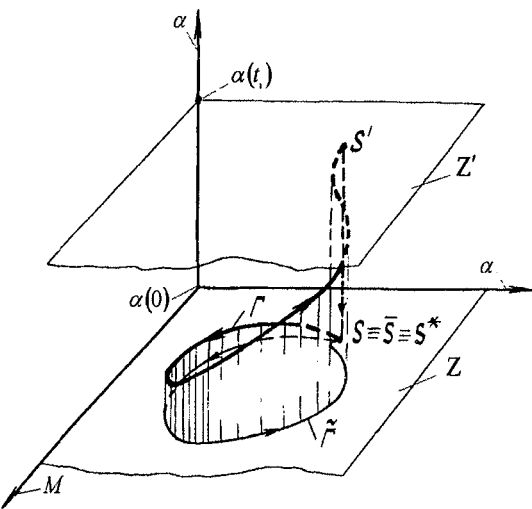


Рис. 3. Фазовый портрет одного цикла установившегося движения привода

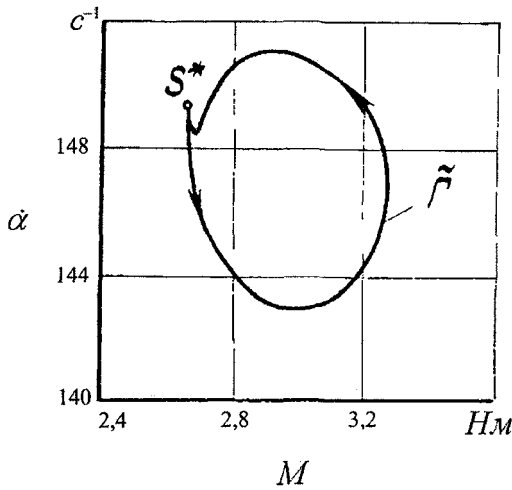


Рис. 4. Проекция фазовой траектории на плоскость  $\alpha = \alpha(0)$

соответствующая кривая бесступенчатого привода УД-209. Заметим, что на неустановившихся режимах работы привода кривая  $\tilde{\Gamma}$  незамкнута (см. рис. 2).

Необходимо отметить, что в силу отмеченных выше особенностей исследуемой динамической системы решение задачи Коши (2), (3), (5) – единственно. Последнее означает, что замкнутая фазовая траектория (см. рис. 3) является изолированной. Следовательно, согласно существующей терминологии [7] в исследуемой динамической системе устанавливаются периодические колебания типа «предельный цикл».

#### 4. Устойчивость нелинейных колебаний привода

Исследуем на устойчивость рассматриваемые периодические разрывные колебания привода.

С этой целью проанализируем устойчивость неподвижной точки  $S^*$  отображения  $T$  плоскости  $Z$  в себя, которая определяется [7] в зависимости от вида корней характеристического уравнения

$$\det[C(S^*) - \lambda E] = 0, \tag{12}$$

где  $E$  – единичная матрица;  $C(S^*)$  – матрица устойчивости, вычисленная в неподвижной точке  $S^*(\alpha^*, M^*)$ ;

$$C(S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\alpha}(t_1)}{\partial \alpha(0)} & \frac{\partial \dot{\alpha}(t_1)}{\partial M(0)} \\ \frac{\partial M(t_1)}{\partial \alpha(0)} & \frac{\partial M(t_1)}{\partial M(0)} \end{bmatrix}.$$

Если все корни  $\lambda_{1,2}$  уравнения (12) находятся внутри единичного круга, т. е.

$$|\lambda_{1,2}| < 1, \tag{13}$$

то неподвижная точка  $S^*$  устойчива [7].

Заметим, что в рассматриваемом случае элементы матрицы  $C(S)$  определяются на основе соотношений (7), (11).

После некоторых преобразований уравнение (12) можно записать в следующем виде

$$\lambda^2 - 2\lambda \exp(r_1 t_1) \cos(r_2 t_1) + \exp(2r_1 t_1) = 0. \tag{14}$$

Для проверки справедливости (13) воспользуемся критерием Шура [9], согласно которому должны выполняться следующие соотношения между коэффициентами уравнения (14):

$$(\exp(2r_1 t_1) < 1) \wedge \left( \left| \frac{2 \exp(r_1 t_1) \cos(r_2 t_1)}{1 + \exp(2r_1 t_1)} \right| < 1 \right). \tag{15}$$

Покажем, что при соблюдении условия

$$\forall \bar{k}_1 \neq 0: H_\alpha(\alpha^*) - a_{11} N_{\varphi_1}(\varphi_1^*) \neq 0 \Leftrightarrow \mu_0 \neq 0, \tag{16}$$

Действительно, в силу дифференцируемости решения (7) на отрезке (1) в каждой внутренней его точке производные  $\dot{M}$  и  $\ddot{\alpha}$  непрерывны. Однако на границе отрезка (1), т. е. в моменты времени, когда изображающая точка находится в положении  $S^*$  (см. рис. 3), как уже отмечалось, правые части уравнений (2), (3), а одновременно и производные  $\dot{M}$  и  $\ddot{\alpha}$ , имеют разрывы первого рода. Разрывность производных  $\dot{M}(t)$  и  $\ddot{\alpha}(t)$  обуславливает нарушение гладкости кривой  $\tilde{\Gamma}$ , определяемой уравнениями (7).

Таким образом, проекция  $\tilde{\Gamma}$  фазовой траектории  $\Gamma$  на плоскость  $Z$  является замкнутой, гладкой (за исключением точки  $S^*$ ) кривой. В точке  $S^*$  кривая  $\tilde{\Gamma}$  имеет «заострение».

В качестве примера на рис. 4 показана соответствующая кривая бесступенчатого привода УД-209. Заметим, что на неустановившихся режимах работы привода кривая  $\tilde{\Gamma}$  незамкнута (см. рис. 2).

# Расчет и конструирование

т. е. при  $\mu_0 \neq 0$ , соотношения (15) выполняются всегда. Действительно, в этом случае, как показано в [8],

$$t_1 = \frac{2\pi}{a_{11}kh_0} (1 + a\Pi_{\phi_6}(\alpha^*))$$

Следовательно  $t_1 > 0$ . Тогда в истинности первого из высказываний (15) убедиться нетрудно, если принять во внимание очевидное:  $(t_1 > 0) \wedge (r_1 = -(2T_\delta)^{-1} < 0) \Rightarrow 2r_1t_1 < 0 \Rightarrow \exp(2r_1t_1) < 1$ .

Истинность второго становится очевидной из следующих рассуждений:  $\forall r_1, t_1 \in \mathbf{R}$ :

$$(\exp(r_1t_1) - 1)^2 > 0 \Rightarrow \exp(2r_1t_1) + 1 > 2\exp(r_1t_1) \Rightarrow \frac{2\exp(r_1t_1)}{1 + \exp(2r_1t_1)} < 1 \Rightarrow \left| \frac{2\exp(r_1t_1)\cos(r_2t_1)}{1 + \exp(2r_1t_1)} \right| < 1.$$

При этом используется общеизвестное:  $\forall r_2, t_1 \in \mathbf{R} : |\cos(r_2t_1)| \leq 1$ .

Таким образом, при условии

$$\mu_0 \neq 0 \tag{17}$$

соотношения (13) выполняется всегда, т. е. неподвижная точка (11) отображения  $T$  устойчива в смысле Ляпунова. Но устойчивости неподвижной точки (13) соответствует [7] орбитально устойчивое движение динамической системы, в данном случае – бесступенчатого привода.

## 5. Бифуркации исследуемой динамической системы

Характер движения бесступенчатого привода определяется рядом параметров, наиболее существенным из которых, определяющим структуру разбиения фазового пространства, является относительный эксцентриситет  $\mu_0$  промежуточного вала нефрикционной передачи непрерывного действия.

Действительно, как показано в [7], если не рассматривать аварийный режим работы приводного двигателя – режим «опрокидывания», т. е. если считать, что условие

$$M_{\max} = 1,3a_{12}M_cH_\alpha(\alpha^*)$$

выполняется [7], то можно сделать вывод, что форма решения задачи (2), (3), (5), а следовательно качественный характер движения привода, определяется единственным критерием: выполняется или не выполняется соотношение (17).

При выполнении соотношения (17) решение рассматриваемой задачи имеет оговоренный выше вид. Исследуемая динамическая система, характеризующаяся в данном случае переменностью структуры, совершает сложные разрывные колебания. Фазовый портрет одного цикла движения при различных режимах показан на рис. 1, 2, причем установившийся режим движения, как показано выше, орбитально устойчив.

Если соотношение (17) не выполняется, т. е. в случае, когда

$$\mu_0 = 0, \tag{18}$$

решение отмеченной задачи имеет качественно иной вид и может быть записано в форме [7]

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha^* + \dot{\phi}_7(1 - a_7\nu a_{11}a_{12}M_c) \cdot t, & M(t) &= a_7a_{11}a_{12}M_c, \\ \beta(t) &= a_7a_{11}\dot{\phi}_7(1 - \nu a_7a_{11}a_{12}M_c) \cdot t + a_7a_{11}\alpha^* + c_1, & & \\ \gamma(t) &= a_7a_{11}\dot{\phi}_7(1 - \nu a_7a_{11}a_{12}M_c) \cdot t + a_7a_{11}\alpha^* + c_2. & & \end{aligned} \tag{19}$$

При этом структура динамической системы не меняется.

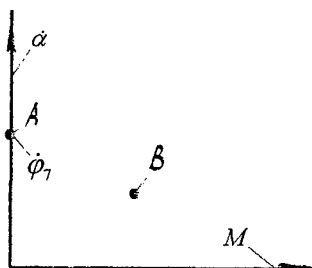


Рис. 5. К анализу бифуркаций

В рассматриваемом случае в передачах «с вращающимся эксцентриком» [1], для которых  $a_7 \equiv 0$ , ведомый вал неподвижен, а приводной двигатель работает в режиме холостого хода:  $M = 0$ ,  $\dot{\alpha} = \dot{\phi}_7$ . Фазовая траектория вырождается в прямую, параллельную оси  $O\alpha$ , которая проектируется на плоскость  $Z$  в точку  $A$  (рис. 5).

В схемах «с невращающимся эксцентриком»  $a_7 \equiv 1$  и, согласно (19), ведущий, ведомый и промежуточный валы НПНД равномерно вращаются как одно целое. Имеет место режим прямой передачи, при этом фазовая траектория проектируется в точ-

ку В. Следовательно, в рассматриваемом случае (18) основные звенья привода совершают равномерное вращательное движение.

Таким образом, если при условии (17), т. е. на множестве  $\mu \in ]0, 0,1[$ , топологическая структура [7] привода исследуемой динамической системы неизменна, то в точке (18) она претерпевает качественные изменения. Следовательно, значение параметра  $\mu_0 = 0$  является бифуркационным [7].

Нетрудно показать, пользуясь непосредственно определением [10], что решение (19) является устойчивым по Ляпунову.

### Литература

1. Дубровский, А.Ф. Новый класс механических бесступенчатых передач /А.Ф. Дубровский // Техническая эксплуатация, надежность и совершенствование автомобилей: сборник трудов / - Челябинск, 1981. - Вып. 261. - С. 46-60.
2. Дубровский, А.Ф. К динамике механического бесступенчатого привода /А.Ф. Дубровский // XXVI Российская школа по проблемам науки и технологий. - Екатеринбург: УрО РАН, 2006.-С. 172-178.
3. Джакалъя, Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем /Г.Е.О. Джакалъя. -М.: Наука, 1979. - 319 с.
4. Дубошин, Г.Н. Небесная механика /Г.Н. Дубошин. - М.: Наука, 1978. - 454 с.
5. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. -М.: Наука, 1974. - 503 с.
6. Зубов, В.И. Теория колебаний /В.И. Зубов - М.: Высшая школа. -1979. - 400 с.
7. Неймарк, Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний / Ю.И. Неймарк. -М.: Наука, 1972. -471 с.
8. Дубровский, А.Ф. К анализу периодического движения машинного агрегата с бесступенчатой регулируемой передачей /А.Ф. Дубровский //Динамика механических систем. - Владимирский политехнический ин-т, 1989. - С. 44-50.
9. Бабицкий, В.И. Теория виброударных систем /В.И. Бабицкий. -М.: Наука, 1978. - 352 с.
10. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. / Л.Э. Эльсгольц. -М.: Наука, 1969. - 424 с.

*Поступила в редакцию 10 мая 2008 г.*

**Дубровский Анатолий Федорович.** Доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Автомобили» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов - механические бесступенчатые передачи транспортных машин; подвески транспортных машин.

**Anatoli F. Dubrovski** The doctor of engineering science, professor, the head of «Automobiles» department of the South Ural State University. Professional interests: transmission, radaufhungen of automobiles.

**Дубровский Сергей Анатольевич.** Инженер кафедры «Автомобили» Южно-Уральского государственного университета. Область научных интересов - подвески транспортных машин.

**Sergei A. Dubrovski.** Engineer of «Automobiles» department of the South Ural State University. Professional interests: radaufhungen of automobiles.