УДК 697.34

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКВАЖНОСТИ И ПЕРИОДА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ РЕЖИМЕ ОТОПЛЕНИЯ ЗДАНИЙ

Ю.С. Васильев, В.И. Панферов

ABOUT POROSITY AND PERIOD DEFINITION AT THE PULSE MODE OF BUILDINGS HEATING

Y.S. Vasiliev, V.I. Panferov

Рассматриваются вопросы определения параметров импульсного режима отопления, при котором обеспечивается заданное качество поддержания комфортной температуры в зданиях. Приводятся простые аналитические соотношения для определения скважности и длительности периода управляющих импульсов.

Ключевые слова: температура, режим отопления, микроклимат, скважность, длительность периода.

The questions of parameters definition of pulse mode of heating at which the set quality of comfortable temperature in buildings is provided are considered. Simple analytical parities for definition of porosity and duration of the period of operating impulses are given.

*Keywords: temperature, heating mode, microclimate, porosity, duration **of** the period.*

В том случае, когда фактическая мощность системы отопления W при данных значениях параметров теплоносителя и температуры наружного воздуха является избыточной, в здании устанавливается некоторая температура t_{max}, которая будет заметно превышать свое комфортное значение $t_{комф}$. В такой ситуации с целью экономии расхода теплоты на отопление и обеспечения приемлемых внутренних климатических условий может применяться импульсный режим отопления зданий, при котором в течение некоторого периода длительностью T система отопления на время γT включается на полную мощность W, а затем полностью отключается до конца периода. При этом возникает вопрос: как следует выбирать длительность периода T и скважность импульсов γ, чтобы температура внутри здания поддерживалась в заданных пределах?

Скважность γ можно определить следующим образом. Понятно, что в стационарном режиме мощность системы отопления W должна равняться теплопотерям здания при той температуре, которая установилась внутри него, и при той температуре, которая наблюдается снаружи. Если потери теплоты оценивать по формуле Н.С. Ермолаева [1], то для случая, когда система отопления мощностью W работает в режиме постоянного включения, должно выполняться следующее соотношение:

$$W = qV(t_{max} - t_н), \tag{1}$$

где q- удельная тепловая характеристика здания, а K- его объем, $t_н$- температура наружного воздуха. В случае же, когда скважность импульсов подобрана должным образом, получим следующее:

$$\gamma W = qV(t_{комф} - t_н) \tag{2}$$

Здесь γW - средняя за период T мощность системы отопления в импульсном режиме. Разделив уравнение (2) на уравнение (1), получим, что скважность импульсов следует определять так:

$$\gamma = (t_{комф} - t_н)/(t_{max} - t_н). \tag{3}$$

Температуру t_{max} можно вычислить по математической модели теплового режима здания, которая предварительно должна быть настроена на реальные данные. В частности, это можно сделать и по уравнению (1), которое представляет собой математическую модель стационарного режима.

Для этого достаточно задать или измерить температуру наружного воздуха $t_н$ и мощность системы отопления W с помощью тепломера или теплосчетчика, установленного на абонентском вводе здания.

Как определить период Т не представляется ясным. Можно только сказать, что, скорее всего, период будет пропорционален допустимому малому отклонению Δ от температуры $t_{комф}$ с неизвестным пока коэффициентом пропорциональности. Пусть дана математическая модель периодически-импульсного отопления в виде системы линейных, относительно искомой температуры, уравнений. Например, тепловой режим здания с достаточной точностью описывается линейным дифференциальным уравнением, что обосновано в [2]. Будем предполагать, что систему уравнений можно записать в виде

$$L(t(\tau)) = W(\tau),$$

где L - линейный оператор, $t(\tau)$ - интересующая нас температура как функция времени τ, а в правой части функ$W(\tau)$ - мощность системы отопления. Это позволяет применить для решения поставленной задачи операционное исчисление. Введем следующие безразмерные величины:

$$\theta=(t_в-t_н)/(t_{max}-t_н);\ \varepsilon=\Delta/(t_{max}-t_н),$$

где $t_в$ - температура внутреннего воздуха. В общем случае θ является функцией времени τ, т. е. $\theta = f(\tau)$.

Рассмотрим три режима отопления, причем относительную температуру внутреннего воздуха в каждом из режимов будем обозначать как $f_i(\tau)$, где i - номер режима отопления.

В первом режиме здание начинает отапливаться из состояния $f_1(0)=0$ невыключающейся системой отопления, тогда $f_1(\infty)=1$. Физические условия задачи дают основания предположить, что функция $f_1(\tau)$ бесконечное число раз дифференцируема на интервале (O,oo), что $\lim\limits_{\tau\to 0+}\frac{d}{d\tau}f_1(\tau)\neq 0$ и предел любой ее производной при $\tau\to+\infty$ равен нулю. Обозначим изображение этой функции $F_1(s)$. Также, учитывая физические условия задачи, будем считать, что $F_1(s)$ имеет особые точки при s = 0 и в левой полуплоскости s_i, причём $\mathrm{Re}(s_i)<\sigma_1<0$. Тогда, на основании теорем о предельных значениях, можно записать, что

$$\lim_{s\to 0} sF_1(s)=1,\ \lim_{s\to 0} s^k F_1(s)=0\ (k=2,3,\dots),$$

$$\lim_{s\to\infty} s^2F_1(s)\neq 0.$$

Функция $F_1(s)$ в точке $s = 0$ имеет простой полюс с вычетом 1.

Второй режим отопления - периодический, начинается с состояния $f_2(0)=0$, причем импульсы длительностью γT включаются в самом начале периода T. Изображение функции $f_2(\tau)$ отличается от изображения $f_1(\tau)$ периодизирующим множителем и имеет вид

$$F_2(s)=\frac{(1-\exp(-\gamma Ts))}{(1-\exp(-Ts))}F_1(s).$$

По сравнению с $F_1(s)$, у $F_2(s)$ добавились простые полюсы на мнимой оси в точках $2\pi il$ $(l=\pm1,\pm2,\dots)$, здесь i - мнимая единица. Функции $f_2(\tau)$ и $F_2(s)$ можно представить в виде сумм убывающей (стремящейся к нулю) и периодической частей:

$$f_2(\tau)=f_{2убыв}(\tau)+f_{2пер}(\tau), \quad (4)$$

$$F_2(s)=F_{2убыв}(s)+F_{2пер}(s). \quad (5)$$

Принимая в формуле обратного преобразования Лапласа τ = 0, получаем, что

$$f_2(0)=0=f_{2убыв}(0)+f_{2пер}(0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F_2(s)ds+\frac{1}{2\pi i}\int_C F_2(s)ds. \quad (6)$$

Первый интеграл берётся по прямой L_2, параллельной мнимой оси, с абсциссой σ: $\sigma_1<\sigma<0$. Прямая L_2 расположена правее всех особых точек функции $F_1(s)$, кроме особой точки $s = 0$, и левее мнимой оси. Первый интеграл определяет начальное значение $f_{2убыв}(0)$. Второй интеграл берётся по контуру С, состоящему из двух прямых L_2 и L_3. Прямая L_2 проходит в направлении сверху вниз, а прямая L_3 параллельна мнимой оси с абсциссой σ_3: $\sigma_3>0$; она проходит снизу вверх.

Из равенства (6) следует, что

$$f_{2пер}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C F_2(s)ds=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F_2(s)ds=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(1-\exp(-\gamma Ts))}{(1-\exp(-Ts))}F_1(s)ds. \quad (7)$$

Заменим множитель $\frac{(1-\exp(-\gamma Ts))}{(1-\exp(-Ts))}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $s=0$ с остаточным членом третьего порядка:

$$\frac{(1-\exp(-\gamma Ts))}{(1-\exp(-Ts))}=\gamma-\frac{\gamma(\gamma-1)Ts}{2}+$$

$$+\frac{\gamma(\gamma-1)(2\gamma-1)T^2s^2}{12}+O(T^3s^3). \quad (8)$$

Здесь $O(T^3s^3)$ - остаточный член порядка T^3s^3. Такая замена допустима для точек прямой L_2, находящихся от начала координат менее, чем на $2\pi/T$ (расстояние до ближайшей особой точки множителя). Предположим, что эта замена возможна и для остальных точек прямой.

С использованием данной замены формула (7) перепишется в виде

$$f_{2\text{пер}}(0) = -\frac{\gamma}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(s)ds + \frac{\gamma(\gamma-1)T}{4\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} sF_1(s)ds -$$

$$-\frac{\gamma(\gamma-1)(2\gamma-1)T^2}{24\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} s^2F_1(s)ds + O(T^3s^3). \qquad (9)$$

Если бы выписанные интегралы вычислялись по прямой, параллельной мнимой оси и расположенной правее всех особых точек $F_1(s)$, включая и точку $s = 0$, то они были бы равны начальным значениям функции $f_1(\tau)$ и производных $f_1'(\tau)$ и $f_1''(\tau)$. В данном же случае они будут отличаться от указанных значений на вычеты в точке $s = 0$, которые равны соответственно $f_1(\infty) = 1$, $f_1'(\infty) = 0$, $f_1''(\infty) = 0$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(s)ds = f_1(0) - f_1(\infty) = -1, \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} sF_1(s)ds = f_1'(0) - f_1'(\infty) = f_1'(0), \qquad (11)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} s^2F_1(s)ds = f_1''(0) - f_1''(\infty) = f_1''(0). \qquad (12)$$

С учетом этих равенств формула (9) запишется в виде

$$f_{2\text{пер}}(0) = \gamma + \frac{\gamma(\gamma-1)T}{2}f_1'(0) -$$

$$-\frac{\gamma(\gamma-1)(2\gamma-1)T^2}{12}f_1''(0) + O(T^3). \qquad (13)$$

Третий режим отопления заключается в следующем: из состояния $f_3(0)=0$ здание начинает отапливаться также за счет периодического включения системы отопления, только импульсы включения длительностью γT подаются на втором участке периода T, непосредственно примыкая к его концу. Данный режим отопления позволяет оценить максимальную температуру $f_{3\text{пер}}(0)$, достигаемую в импульсном режиме, так как отопление отключается в момент времени, когда температура близка к своему максимальному значению, и этот момент времени является началом следующего периода управления. Найдём выражение для температуры $f_3(\tau)$:

$$F_3(s) = \frac{\exp(-(1-\gamma)Ts) - \exp(-Ts)}{1-\exp(-Ts)}F_1(s) =$$

$$= \frac{\exp(\gamma Ts) - 1}{\exp(Ts) - 1}F_1(s). \qquad (14)$$

Далее, разложим множитель при $F_1(s)$:

$$\frac{\exp(\gamma Ts) - 1}{\exp(Ts) - 1} = \gamma + \frac{\gamma(\gamma-1)Ts}{2} +$$

$$+\frac{\gamma(\gamma-1)(2\gamma-1)T^2s^2}{12} + O(T^3s^3) \qquad (15)$$

Для температуры $f_{3\text{пер}}(0)$ получаем следующую формулу:

$$f_{3\text{пер}}(0) = \gamma - \frac{\gamma(\gamma-1)T}{2}f_1'(0) -$$

$$-\frac{\gamma(\gamma-1)(2\gamma-1)T^2}{12}f_1''(0) + O(T^3). \qquad (16)$$

Предполагая, что

$$f_{2\text{пер}}(0) = \theta_{\text{ср}} - \varepsilon, \quad f_{3\text{пер}}(0) = \theta_{\text{ср}} + \varepsilon,$$

где $\theta_{\text{ср}}$ - среднее значение относительной температуры в установившемся периодическом режиме. Складываем уравнения (13) и (16) и вычитаем их друг из друга, в результате получаем

$$\gamma = \theta_{\text{ср}} + O(\varepsilon^2), \qquad (17)$$

$$T = \frac{2\varepsilon}{\gamma(1-\gamma)f_1'(0)} = \frac{2\Delta/(t_{\max} - t_{\text{н}})}{\gamma(1-\gamma)t_{\text{в}}'(0)/(t_{\max} - t_{\text{н}})} =$$

$$= \frac{2\Delta}{\gamma(1-\gamma)t_{\text{в}}'(0)} \qquad (18)$$

или

$$\gamma = \theta_{\text{ср}}, \quad T = \frac{2\Delta}{\gamma(1-\gamma)\cdot t_{\text{в}}'(0)}. \qquad (19)$$

Таким образом, получены формулы для определения как скважности, так и периода следования импульсов отопления, при которых обеспечивается требуемое качество поддержания температурного режима в здании. Здесь $\Delta/t_{\text{в}}'(0)$ есть время, за которое температура воздуха в здании увеличится на Δ при условии, что скорость нагрева постоянна и равна $t_{\text{в}}'(0)$. Если еще учесть неравенство $\gamma(1-\gamma) \le 1/4$, то можно утверждать, что период T не меньше, чем время $\Delta/t_{\text{в}}'(0)$, умноженное на 8.

Примеры применения полученных формул

В статье [3] проведён численный расчёт периодически-импульсного режима для модели отопления, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{d\tau}t_{\text{внут}}(\tau) = \frac{t_{\text{нар}} - t_{\text{внут}}(\tau) + kW_0}{T_{\text{вр}}},$$

где $t_{\text{внут}}$ - температура внутреннего воздуха, τ - время, $t_{\text{нар}} = 3$ °С - температура наружного воздуха, $k = 0{,}0169$ °С/Вт, $W_0 = 2070{,}6$ Вт - мощность прибора отопления, $T_{\text{вр}} = 83925$ с - постоянная времени. Подсчитаем требуемые скважность и период, чтобы температура колебалась в пределах 20 ± 0,15 °С. Приравняв в уравнении производную к нулю, получим

$$t_{\max} - t_{\text{внут}} = kW_0 = 0{,}0169\cdot 2070{,}6 = 34{,}99\ °\text{C},$$

средняя относительная температура

$$\theta_{med} = (20–3)/34{,}99 = 0{,}486.$$

Полагая в уравнении $t_{\text{внут}}(0) = t_{\text{нар}} = 3$ °С , находим

$$\frac{d}{d\tau} t_{\text{внут}}(0) = kW_0 / T_{\text{вр}} = 34{,}99/83925 = 0{,}000417\ °\text{C/c}.$$

По выведенным формулам следует полагать скважность $\gamma = 0{,}486$, а период T равным 2·0,15/(0,486·(1-0,486)·0,000417) = 2880 с = 48 мин. В этой статье значение скважности 0,485 было найдено численным экспериментом.

А.Ф. Строй [4] предложил модель отопления, учитывающую нестационарное распределение температуры в стене, теплообмен через стены и окна. Выпишем её вместе с исходными данными для примера:

$$\frac{d}{d\tau} t(x,\tau) = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} t(x,\tau), 0 < x < L, \tau > 0,$$

$$-\lambda\frac{d}{dx} t(0,\tau) = \alpha_{\text{внут}}(t_{\text{внут}}(\tau) - t(0,\tau)),$$

$$-\lambda\frac{d}{dx} t(L,\tau) = \alpha_{\text{нар}}(t(L,\tau) - t_{\text{нар}}),$$

$$c_{\text{внут}} m_{\text{внут}} \frac{d}{d\tau} t_{\text{внут}}(\tau) = w(\tau) - \alpha_{\text{внут}} F_{\text{стен}}(t_{\text{внут}}(\tau) -$$

$$- t(0,\tau)) - k_{\text{окон}} F_{\text{окон}}(t_{\text{внут}}(\tau) - t_{\text{нар}}).$$

Это система линейных уравнений относительно двух искомых функций: $t(x,\tau)$ - температура в точке χ по толщине стены здания (в направлении от помещения к наружной среде) в момент времени τ и $t_{\text{внут}}(\tau)$ - температура внутреннего воздуха. L = 0,568 м - толщина стены здания, λ = 0,76 Вт/(м·°С) - коэффициент теплопроводности материала стены, $\alpha_{\text{внут}}$ = 8,7 Вт/(м^2 °С), $\alpha_{\text{нар}}$ = 23 Вт/(м^2 °С) - коэффициенты теплоотдачи внутренней и наружной поверхностей стены здания, $t_{\text{нар}}$ = –34 °С - температура наружной среды, $c_{\text{внут}}$ = 1005 Дж/(кг °С), $m_{\text{внут}}$ = 198 кг - удельная теплоёмкость и масса воздуха в здании, $F_{стен}$ = 30,9 м^2, $F_{\text{окон}}$ = 20,19 м^2 - площади стен и окон, $k_{окон}$ = = 2,63 Вт/(м °С) - коэффициент теплопередачи окон. $w(\tau)$ - мощность отопительного прибора в зависимости от времени, которую будем изменять по импульсно-периодическому закону с мощностью прибора W_0 = 6000 Вт. Требуется найти скважность и период, чтобы температура $t_{\text{внут}}(\tau)$ колебалась в пределах 21 ± 1 °С.

Если в уравнениях модели провести линейную замену искомых функций, переводящую температуру $t_{\text{внут}}(0)$ в нуль, перенести все неизвестные налево, то в первых трех уравнениях справа получатся нули, а в последнем останется мощность прибора $w(\tau)$. Систему можно записать в виде $L(u) = w(\tau)$ с линейным оператором L от совокупности функций $u = \{t(x,\tau), t_{\text{внут}}(\tau)\}$. Так что к данной модели можно применить выведенные формулы.

Для этого нужно найти $t_{\max}$ и $t_{\text{внут}}'(0)$. Считаем, что температура внутри стены установилась по формуле $t(x,\tau) = Ax + B$, $t_{\text{внут}}(\tau) = t_{\max}$, $w(\tau) = W_0$, приравниваем в системе уравнений производные по времени к нулю, решаем получившуюся систему относительно A, B, $t_{\max}$. Нас интересует только $t_{\max}$. Получим формулу

$$t_{\max} = t_{\text{нар}} + \left[W_0(\alpha_{\text{внут}}\alpha_{\text{нар}}L + \lambda(\alpha_{\text{внут}} + \alpha_{\text{нар}}))\right]\times$$

$$\times\left[(F_{\text{стен}}\alpha_{\text{нар}}\alpha_{\text{внут}} + k_{\text{окон}}F_{\text{окон}}(\alpha_{\text{внут}} + \alpha_{\text{нар}}))\lambda +\right.$$

$$\left. + \alpha_{\text{внут}}\alpha_{\text{нар}}Lk_{\text{окон}}F_{\text{окон}}\right]^{-1},$$

из которой, после подстановки исходных данных, вычислим: $t_{\max}$ = 35,26 °С. Значение $t_{\text{внут}}'(0)$ найдём, положив в последнем уравнении системы $\tau = 0$, $w(\tau) = W_0$. Скобки в правой части уравнения зануляются. Получим

$$t_{\text{внут}}'(0) = W_0 / (c_{\text{внут}} m_{\text{внут}}) = 0{,}03015\ °\text{C/c}.$$

Средняя относительная температура

$$\theta_{med} = (21 - (-34))/(35{,}26 - (-34)) = 0{,}7941.$$

По выведенным формулам скважность $\gamma = 0{,}7941$, период T = 405,7 с. По этой модели были проведены расчёты с использованием разностной схемы. При достижении верхней допустимой температуры отопительный прибор выключался, при достижении нижней - включался. Через большое количество таких циклов скважность и период установились на значениях γ = 0,7949, T = 403,5 с. Если при этих же исходных данных нужно найти скважность и период, чтобы температура была в пределах 17 ± 1 °С, то по формулам получается $\nu = 0{,}7363$, $T = 341{,}66$ с, а с помощью разностной схемы $\gamma = 0{,}7376$, $T = 341{,}34$ с. Разница в значениях вполне удовлетворительная.

Литература

1. *Соколову Е.Я. Теплофикация и тепловые сети: учеб. для вузов / Е.Я. Соколов. - 7-е изд., стер. - М.: Изд-во МЭИ, 2001. - 472 с.*
2. *Панферов, В.И. Моделирование и управление тепловым режимом зданий / В.И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашнина // Материалы Междунар. науч.-техн. конф. «Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции»: сб. - М.: МГСУ, 2005. - С. 94-98.*

3. Дегтярь, А.Б. Разработка и исследование импульсного реэюлма отопления зданий / А.Б. Дегтярь, В.И. Панферов // Материалы Второй Международной науч.-техн. конф. «Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции»: сб. - М: *МГСУ, 2007. - С. 106-111.*

4. Строй, А. Ф. Управление тепловым режимом зданий и сооружений. - Киев: Вища школа, 1993. -153 с.

Поступила вредакцию 18 марта 2009 г.

Васильев Юрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» ЮУрГУ.

Область научных интересов: численные методы решения задач математической физики.

Контактный телефон: 2-67-90-43.

Vasiliev Yury Sergeevich, candidate of physical and mathematical science, associate professor of the Applied Mathematics department of South Ural State University.

Scientific interests: numerical procedures of solving the mathematical physics problems.

Contact phone: 2-67-90-43.

Панферов Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теплогазоснабжение и вентиляция» ЮУрГУ.

Область научных интересов: моделирование и оптимизация теплотехнических процессов и систем, автоматизация технологических объектов.

Контактный телефон: 2-67-96-88.

Panferov Vladimir Ivanovich, Doctor of technical science, professor, head of the Heat and Gas Supply and Ventilation department of SUSU.

Scientific interests: simulation and optimization of heat engineering processes and systems, automation of technological objects.

Contact phone: 2-67-96-88.