На правах рукописи

Хасан Фаза Лафта Хасан

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ВОРОНЕЖ – 2016

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном
университете (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент Сагадеева Минзиля Алмасовна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Пятков Сергей Григорьевич,
Югорский государственный университет,
кафедра высшей математики, заведующий;

кандидат физико-математических наук,
доцент Корнев Сергей Викторович,
Воронежский государственный
педагогический университет,
кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация:

Вологодский государственный университет.

Защита состоится «14» июня 2016 года в «15.00» часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете, по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2873

Автореферат разослан «___» марта 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.Е. Гликлих

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной, возникают при моделировании различных реальных процессов. К настоящему времени методы исследования таких уравнений в банаховых пространствах можно условно разделить на две группы. К первой группе следует отнести работы С.Л. Соболева, С.А. Гальперна, А.Г. Костюченко, R.E. Showalter, В.Н. Врагова, А.И. Кожанова, Г.В. Демиденко, С.В. Успенского и многих других авторов, в работах которых проводится непосредственное исследование начально-краевых задач для уравнений или систем уравнений в частных производных. Другой подход, у истоков которого стояли работы М.И. Вишика, С.Г. Крейна, подразумевает изучение дифференциально-операторных уравнений в линейных топологических пространствах с дальнейшими приложениями к конкретным начально-краевым задачам. В настоящее время в этой области активно и плодотворно работают Н.А. Сидоров, A. Favini, A. Yagi, С.Г.Пятков, И.В. Мельникова, Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров и многие другие.

Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Степени квазиоператора Лапласа $\Lambda^n u = \{\lambda_k^n u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$ являются линейными непрерывными операторами из квазисоболева пространства ℓ_q^{r+2n} в квазисоболево пространство $\ell_q^r = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{C} : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{r}{2}} |u_k| \right)^q < +\infty \right\}$, где $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$ (ранее[1] были рассмотрены пространства последовательностей действительных чисел). Квазисоболевы пространства — это полные квазинормируемые пространства, причем квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ отличается от нормы «неравенством треугольника», которое для квазинормы имеет вид: $\exists C \geq 1 \;\; \forall u, v \in \mathfrak{U}$ ${}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| + {}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$. Пополнение таких пространств возможно в силу того, что квазинормированные пространства метризуемы[2].

Рассмотрим класс динамических уравнений вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u, \tag{1}$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$,

---

[1] *Аль-Делфи, Дж.К.* Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

[2] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лефстрем. — М., 1980.

— многочлены, такие, что $m \leq n$. Операторно-дифференциальные уравнения называются *динамическими*, если их решения могут быть продолжены на всю числовую ось $\mathbb{R}$.

Вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \ell_q^{r+2n})$ называется решением уравнения (1), если при подстановке она обращает его в тождество. Такая функция $u = u(t)$ назовается решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

для уравнения (1), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2) при некотором $u_0 \in \ell_q^{r+2n}$. Известно, что при произвольных начальных данных задача Коши (2) неразрешима для уравнения (1). Поэтому для уравнений, неразрешенных относительно производной, больший интерес вызывает разрешимость задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{3}$$

где P — проектор на образ разрешающей группы операторов уравнения (1).

В работе исследована разрешимость начальных задач (2) и (3) как для уравнения (1), так и для неоднородного уравнения вида

$$P_n(\Lambda)\dot{u} = Q_m(\Lambda)u + g, \tag{4}$$

где $g : \mathbb{R} \to \ell_q^r$. Также исследована разрешимость начально-конечной задачи

$$P_1(u(0) - u_0) = 0, \qquad P_2(u(\tau) - u_\tau) = 0 \tag{5}$$

с некоторыми элементами $u_0, u_\tau \in \ell_q^{r+2n}$ для уравнения (4), здесь P_1 и P_2 — проекторы при некоторых условиях на относительный спектр порождающих операторов группы.

В теории устойчивости динамических и эволюционных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах важную роль играет понятие экспоненциальной дихотомии уравнения как одной из моделей асимптотического поведения его решений. С этим понятием тесно связан вопрос существования ограниченных решений соответствующего неоднородного дифференциального уравнения[3]. С точки зрения приложений именно такое поведение решения считается наиболее "физичным".

---

[3] *Далецкий, Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970.

Массера, Х.Л. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970.

В работе исследуются вопросы существования инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений однородного уравнения (1), а также связанный с ним вопрос существования ограниченных решений для неоднородного уравнения (4) в квазисоболевых пространствах.

Понятие квазибанаховых пространств неразрывно связано с понятием банаховых пространств. Однако самостоятельный интерес к таким пространствам, как к объекту исследования, появился сравнительно недавно, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона[4], кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп в работе Й. Берга, Й. Лефстрема[2], и прикладных задач, как например, в работах С.Я. Новикова[5] и Дж.Д. Хардке[6]. Отметим, что квазинормируемые пространства являются как самостоятельным объектом теоретических исследований например в работах А.Б. Александрова[7], В.Л. Крепкогорского[8], так и используются в решении прикладных задач, например работа С.М. Вовка и В.Ф. Борулько[9].

Что касается разрешимости уравнений в квазибанаховых пространствах, то в силу того, что, как уже отмечалось выше, в таких пространствах даже линейные отображения существуют не всегда, результатов по исследованию уравнений в квазибанаховых пространствах не много. Можно отметить монографию[10], в первой части которой В.Г. Фетисов рассматривает уравнения в пространствах Орлича. Операторный подход к таким уравнениям в квазибанаховых пространствах был впервые применен в работах Дж.К. Аль-Делфи[11]. Настоящее иссле-

---

[4] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W. Johnson and J. Lindenstrauss. – Amsterdam: Elsevier, 2003. — P. 1099–1130.

[5] *Новиков, С.Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных пррространств на $[0, 1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 4. — С. 549–563.

[6] *Hardtke, J.D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. — 2013. — V. 9, № 4. — P. 448–454.

[7] *Александров, А.Б.* Квазиномированные пространства в комплексном анализе: дис. . . . док. физ-мат. наук / А.Б. Александров. – Ленинград, 1983.

[8] *Крепкогорский, В.Л.* Квазиномированные пространства функций, рационально аппроксимируемых в норме BMO / В.Л. Крепкогорский // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1990. — № 3.— С. 38–44.

[9] *Вовк, С.М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 7. — С. 31–42.

[10] *Фетисов, В.Г.* Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах / В.Г. Фетисов, В.И. Филиппенко, В.Н. Козоброд. – Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006.

[11] *Аль-Делфи, Дж.К.* Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых

дование является логическим продолжением тематики последней работы.

Целью работы является изучение одного класса линейных динамических уравнений в комплексных квазисоболевых пространствах с получением условий существования ограниченных решений этого класса уравнений. Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать разрешимость различных начальных задач и начально-конечной задачи для указанного класса линейных динамических уравнений;

2. Получить условия существования инвариантных пространств решений изучаемых уравнений;

3. Исследовать существование дихотомий решений для однородных уравнений в квазисоболевых пространствах;

4. Исследовать вопросы существования ограниченных решений для однородных и неоднородных уравнений изучаемого класса;

5. Применить полученные результаты при изучении свойств решений для аналога уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной и аналога линеаризованного уравнения Хоффа в квазисоболевых пространствах.

Методы исследования. Основные методы исследования, применяемые в данной работе, – *методы функционального и комплексного анализа* и *теории динамических операторно-дифференциальных уравнений*. Специфика рассматриваемых задач учитывается лежащим в основе теории разрешающих вырожденных групп операторов *метода фазового пространства*. Суть метода заключается в редукции сингулярного уравнения (1) к эквивалентной ему системе двух уравнений, определенных на взаимно дополнительных подпространствах. Одно из полученных уравнений разрешено относительно производной и исследуется классическими методами, другое – имеет нильпотентный оператор при производной, что существенно используется при построении решения.

Научная новизна заключается в полученных результатах:

1. Введен в рассмотрение класс динамических уравнений в комплексных квазисоболевых пространствах.

2. Показана относительная ограниченность оператора правой части и исследована разрешимость указанного класса уравнений с обобщением таких результатов на случай комплексных квазибанаховых пространств последователь-

---

пространствах : дисс. ...канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Дж.К. Аль-Дельфи; ЮУрГУ. – Челябинск, 2015.

ностей.

3. Получены условия существования инвариантных пространств. Исследованы необходимые и достаточные условия существования ограниченных на полуоси решений для однородных уравнений.

4. Получены условия существования экспоненциальных дихотомий решений. Определены условия существования ограниченных решений для неоднородных уравнений с построением и исследованием свойств оператор-функции Грина.

5. В работе рассматриваются свойства решений аналогов известных неклассических уравнений математической физики — линеаризованного уравнения Хоффа и уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной — в комплексных квазисоболевых пространствах.

Теоретическая и практическая значимость. В работе обобщены результаты о разрешимости уравнений соболевского типа на случай комплексных квазисоболевых пространств и получены условия существования экспоненциальных дихотомий и ограниченных решений одного класса уравнений в таких пространствах, что развивает теорию динамических уравнений соболевского типа. Отметим, что именно ограниченные решения представляют наибольший интерес в практических приложениях, так как именно такое поведение решений системы считается наиболее «физичным». Кроме того, информация об инвариантных подпространствах решений и экспоненциальных дихотомиях позволяет исследователям, выбирая начальные данные, получать результаты с некоторыми свойствами. Точнее, выбрав начальное значение из одного инвариантного пространства, получим возрастающие решения, а из другого — убывающие. Полученные результаты могут стать основанием для дальнейшего исследования свойств решений неклассических уравнений в квазибанаховых пространствах последовательностей и различных задач для такого рода и использоваться при рассмотрении возможность более эффективных методов решения технических задач.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на конференциях: Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2014), Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2015), Международной научной конференции "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ" (Уфа, 2015), Зимних воронежских математических школах (Воронеж, 2014, 2016), Ежегодных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ (Челябинск, 2014, 2015). Результаты неоднократно докладывались на областном семинаре по уравнениям соболевского типа профессора Г.А. Свиридюка.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [7]. Работы [4], [5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В совместных с научным руководителем работах [4], [5] научному руководителю принадлежит постановка задачи. Из этих работ в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 105 страниц. Список литературы содержит 116 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования.

Первая глава состоит из четырех параграфов. Она содержит результаты, относящиеся к предварительным сведениям. Результаты, сформулированные в первых двух пераграфах этой главы не выносятся на защиту.

В **п. 1.1** приведены определения и понятия, связанные с квазибанаховыми пространствами последовательностей. Приведены теорема о вложениях квазисоболевых пространств, а также теорема об эквивалентности непрерывности и ограниченности операторов в таких пространствах.

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ – квазибанаховы пространства последовательностей. Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, таких что $\operatorname{dom} L{=}\mathfrak{U}$ является пространством $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ с квазинормой ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|$.

В **п. 1.2** рассматриваются функции линейных ограниченных операторов. Приведена теорема об обратимости близкого к единичному оператору, показано, что этот обратный имеет вид ряда и приводится радиус его сходимости. Аналогично введены понятия резольвентного множества и спектра линейного непрерывного оператора, а также резольвента этого оператора, представимая в виде ряда. Приводится понятие аналитической функции в ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$. Для аналитических функций со значениями в квазибанаховых пространствах последовательностей существует интеграл Римана на отрезке[12]. Несобственный интеграл будем понимать стандартным образом, как предел соответствующих интегралов Римана.

Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности некоторой точки, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификация изолированных особых точек та же, что и в теории функций комплексного переменного. Интеграл от вектор-функции $f(z)$ по замкнутому гладкому контуру $\Gamma \subset \mathbb{C}$ будем понимать как сумму вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура Γ, умноженную на $2\pi i$. Ясно, что для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

В **п. 1.3** приведены относительные резольвенты в квазибанаховых пространствах последовательностей, их свойства, а также доказана относительно спектральная теорема. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Будем называть множества

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$$

L-резольвентным множеством и L-спектром оператора M соответственно.

Оператор-функции вида $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ переменной $\mu \in \mathbb{C}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой и левой L-резольвентой* оператора M.

Теорема 1.3.1.[11] *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, тогда L-резольвенты, правая и левая L-резольвента оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.*

Пусть для относительного спектра $\sigma^L(M)$ выпонено условие

$$\left.\begin{array}{c}\sigma^L(M) = \sigma^L_0(M) \bigcup \sigma^L_1(M),\ \sigma^L_1(M) \neq \oslash,\ \text{причем}\\ \text{существует ограниченная область } \Omega_1 \subset \mathbb{C} \text{ с границей}\\ \partial\Omega_1 \text{ класса } C^1;\ \Omega_1 \supset \sigma^L_1(M) \text{ и } \overline{\Omega}_1 \cap \sigma^L_0(M) = \oslash.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Пусть $\gamma_1 = \partial\Omega_1$, построим $P_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_1} R^L_\mu(M)d\mu$ и $Q_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_1} L^L_\mu(M)d\mu$, причем по построению операторы $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

---

[12] *Rolewicz, S.* Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. — Warsaw: PWN, 1985.

Лемма 1.3.2. *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$*, причем выполнено условие* (6)*. Тогда операторы* P_1 *и* Q_1 *– проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^{11}$ ($\mathfrak{F}^{11}$) $=$ imP_1 (imQ_1) и через L_{11} (M_{11}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{11}$.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *и выполнено условие* (6)*. Тогда*

(i) *операторы* $L_{11}, M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{11};\mathfrak{F}^{11})$;

(ii) *существует оператор* $L_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{11};\mathfrak{U}^{11})$;

(iii) $\sigma^{L_{11}}(M_{11}) = \sigma_1^L(M)$.

Оператор M (L,σ)*-ограничен*, если $\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \ \Rightarrow \ \left(\mu \in \rho^L(M)\right)$.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Положим $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{U}^1$) $=$ ker$P$ (im$P$), где проектор[13] $P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^L(M)d\mu$ с контуром $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$, а через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

В силу теоремы о расщеплении[14] существует оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$. Оператор M назвем $(L,0)$*-ограниченным*, если он (L,σ)-ограничен и $H \equiv \mathbb{O}$.

В **п. 1.4** доказаны результаты о разрешимости рассматриваемого класса уравнений при различных начальных условиях. Выберем пространства $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^r$. Операторы $L = P_n(\Lambda)$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ и $M = Q_m(\Lambda)$, где $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $d_m \neq 0$, – многочлены и $m \leq n$.

Лемма 1.4.1. *Пусть* $\mathfrak{U} = \ell_q^{r+2n}$ *и* $\mathfrak{F} = \ell_q^r$*. Тогда* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Теорема 1.4.2. *Пусть числа* λ_k*, являющиеся корнями многочлена* $P_n(x)$*, не являются корнями* $Q_m(x)$*. Тогда оператор* M $(L,0)$*-ограничен.*

Аналитическая разрешающая группа уравнения (1) будет иметь вид

$$U^t \cdot = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если } P_n(\lambda_k) \neq 0, \ k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \neq l} e^{\mu_k t}\langle\cdot, e_k\rangle e_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} : \ P_n(\lambda_l) = 0, \end{cases}$$

здесь векторы $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где единица стоит на k-том месте, а $\mu_k \in \sigma^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu_k = \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, \text{ при } k : \ P_n(\lambda_k) \neq 0\right\}$.

Множество $\mathfrak{P}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1), если

(i) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1),(2);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория.

---

[13] *Келлер, А.В.* Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

Фазовое пространство уравнения (1) имеет вид

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } P_n(\lambda_k) \neq 0, \ k \in \mathbb{N}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : \ u_l = 0, \ P_n(\lambda_l) = 0\}. \end{cases}$$

Теорема 1.4.5. *Пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$. Тогда для любой аналитической вектор-функции $g : [0, \tau] \to \mathfrak{F}$, а также для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение $u \in C^1([0, \tau]; \mathfrak{U})$ задачи (3) для уравнения (4), которое имеет вид либо*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\mu_k t} \langle u_0, e_k \rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} e^{\mu_k (t-s)} ds \right) e_k,$$

если для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $P_n(\lambda_k) \neq 0$, либо в противном случае

$$u(t) = - \sum_{l \in \mathbb{N} : P_n(\lambda_l) = 0} \frac{\langle g(t), e_l \rangle}{Q_m(\lambda_l)} e_l + \sum_{k \neq l} \left(e^{\mu_k t} \langle u_0, e_k \rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} e^{\mu_k (t-s)} ds \right) e_k.$$

Вторая глава состоит из четырех параграфов и содержит результаты о существовании инвариатных подпространств, а также ограниченных на полуоси решений для однородных уравнений указанного класса.

В **п. 2.1** строятся инвариантные подпространства решений изучаемого класса уравнений и доказывается разрешимость начально-конечной задачи (4), (5).

Пусть $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ – фазовое пространство уравнения (1). Множество $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{P}$ называется *инвариантным подпространством* этого уравнения, если при любом $u_0 \in \mathfrak{I}$ существует единственное решение $u = u(t)$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (1), причем $u(t) \in \mathfrak{I}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.1.1. *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и выполнено условие (6). Тогда образ группы $U_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}$, будет инвариантным пространством уравнения (1).*

Теорема 2.1.2. *Пусть числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, и выполнено условие (6). Тогда для любой аналитической вектор-функции $g : [0, \tau] \to \mathfrak{F}$, а также для любых $u_0, u_\tau \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение $u \in C^1([0, \tau]; \mathfrak{U})$ задачи (5) для уравнения*

(4), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t)=\sum_{l\in\mathbb{N}:P_n(\lambda_l)=0}\frac{\langle g(t),e_l\rangle}{Q_m(\lambda_l)}e_l+\sum_{\mu_k\in\sigma_0^L(M)}\left(e^{\mu_k t}\langle u_0,e_k\rangle+\int\limits_0^t\frac{\langle g(s),e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}e^{\mu_k(t-s)}ds\right)e_k+$$
$$+\sum_{\mu_k\in\sigma_1^L(M)}\left(e^{\mu_k(t-\tau)}\langle u_\tau,e_k\rangle-\int\limits_\tau^t\frac{\langle g(s),e_k\rangle}{P_n(\lambda_k)}e^{\mu_k(t-s)}ds\right)e_k.$$

В **п. 2.2** рассматриваются ограниченные на полуоси решения для однородных уравнений исследуемого класса.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $m\leq n$, *операторы* $P_n(\Lambda),Q_m(\Lambda)\in\mathcal{L}(\ell_q^{r+2n};\ell_q^r)$ *и числа* λ_k, *являющиеся корнями многочлена* $P_n(x)$, *не являются корнями* $Q_m(x)$, *а также выполнено условие* $\sigma^L(M)=\sigma_1^L(M)\cup\sigma_2^L(M)$, *где* $\sigma_1^L(M)=\{\mu\in\sigma^L(M):\mathrm{Re}\mu<0\}$, $\sigma_2^L(M)=\{\mu\in\sigma^L(M):\mathrm{Re}\mu\geq 0\}$. *Тогда решение задачи* (1), (2) *ограничено на* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *тогда и только тогда, когда* $u_0\in\mathfrak{U}^{11}$.

Аналогично доказано существование ограниченных решений однородного уравнения (1) на отрицательной полуоси.

В **п. 2.3** рассматривается аналог линеаризованного уравнения Хоффа

$$(\lambda+\Lambda)u_t=\alpha u,\qquad\lambda,\alpha\in\mathbb{R},\tag{7}$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U}=\ell_q^{r+2}$ и $\mathfrak{F}=\ell_q^r$ при $r\in\mathbb{R}$ и $q\in\mathbb{R}_+$. Положим операторы $L=P_1(\Lambda)=\lambda+\Lambda$ и $M=Q_0(\Lambda)=\alpha\mathbb{I}$, тогда операторы $L,M\in\mathcal{L}(\ell_q^{r+2};\ell_q^r)$.

Лемма 2.3.1. *Пусть* $\mathfrak{U}=\ell_q^{r+2}$ *и* $\mathfrak{F}=\ell_q^r$ *при* $r\in\mathbb{R}$ *и* $q\in\mathbb{R}_+$. *Тогда для любых* $\lambda\in\mathbb{R}$ *и* $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *оператор* M $(L,0)$*-ограничен.*

L-спектр оператора M имеет вид $\left\{\mu\in\mathbb{C}:\ \mu_k=\dfrac{\alpha}{\lambda+\lambda_k},\text{ при }k:\ \lambda_k\neq-\lambda\right\}$.

Разрешающая группа уравнения (7) имеет вид

$$U^t=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}t}\langle\cdot,e_k\rangle e_k, & \text{если }\lambda_k\neq-\lambda,\ k\in\mathbb{N};\\ \sum\limits_{k\neq l}e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}t}\langle\cdot,e_k\rangle e_k, & \text{если существует }l\in\mathbb{N}:\ \lambda_l=-\lambda.\end{cases}$$

Образ $\mathrm{im}U^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (7) и имеет вид

$$\mathfrak{U}^1=\begin{cases}\ell_q^{r+2}, & \text{если }\lambda_k\neq-\lambda\text{ для всех }k\in\mathbb{N};\\ \{u\in\ell_q^{r+2}:u_k=0,\ \lambda_k=-\lambda\}.\end{cases}$$

Показана разрешимость неоднородного уравнения Хоффа

$$(\lambda + \Lambda)u_t = \alpha u + g, \tag{8}$$

где вектор-функция $g : [0, \tau] \to \ell_q^{r+2}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, а именно справедлива

Теорема 2.3.1. *Пусть $r, \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\tau, q \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \ell_q^{r+2}$ и вектор-функция $g : [0, \tau] \to \ell_q^r$ аналитична, тогда существует единственное решение $u \in C^1([0, \tau]; \ell_q^{r+2})$ задачи* (3), (8) *кроме того оно имеет вид либо*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k} t} \langle u_0, e_k \rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda + \lambda_k} e^{\frac{\alpha}{\lambda+\lambda_k}(t-s)} ds \right) e_k,$$

если $\lambda_k \neq -\lambda$ для всех $k \in \mathbb{N}$, либо в противном случае

$$u(t) = -\sum_{l:\lambda_l=-\lambda} \frac{\langle g(t), e_l \rangle}{\alpha} e_l + \sum_{k \neq l} \left(e^{\frac{\alpha t}{\lambda+\lambda_k}} \langle u_0, e_k \rangle + \int\limits_0^t \frac{\langle g(s), e_k \rangle}{\lambda + \lambda_k} e^{\frac{\alpha(t-s)}{\lambda+\lambda_k}} ds \right) e_k.$$

Также доказана теорема о существование решений уравнения (8) с начально-конечным условием (5).

Результат о существовании ограниченных решений на полуоси для уравнения Хоффа содержит следующая

Теорема 2.3.3. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда решение задачи* (2), (7) *ограничено на $\overline{\mathbb{R}_+}$ тогда и только тогда, когда $\langle u_0, e_k \rangle = 0$ при $k : \lambda_k \geq -\lambda$.*

В **п. 2.4** приведены решения начальных задач и начально-конечной задачи, а также получены условия существования ограниченных на полуоси решений для однородного аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной. Рассмотрим уравнение вида

$$(\lambda - \Lambda)\dot{u} = \alpha \Lambda u. \tag{9}$$

Возьмем $\mathfrak{U} = \ell_p^{r+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_p^r$, операторы L, M зададим формулами $L = P_1(\Lambda) = \lambda - \Lambda$, $M = Q_1(\Lambda) = \alpha\Lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — некоторые константы, тогда операторы $L, M \in \mathcal{L}(\ell_q^{r+2}; \ell_q^r)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда решение задачи* (2), (9) *ограничено на $\overline{\mathbb{R}_+}$ тогда и только тогда, когда для $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ выполнено условие $\langle u_0, e_k \rangle = 0$ при таких k, что $\dfrac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} > 0$.*

Третья глава состоит из четырех параграфов и содержит теоремы о существовании экспоненциальных дихотомий и ограниченных на всей оси решений.

А именно исследуются свойства решений класса уравнений при условии, что многочлены в левой и правой части уравнения имеют одинаковую степень.

В **п. 3.1** доказана теорема о существовании экспоненциальных дихотомий решений для однородных уравнений (1).

Решения уравнения (1) имеют *экспоненциальную дихотомию* (или, коротко, *э-дихотомичны*), если

(i) фазовое пространство уравнения (1) представимо в виде $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}^1 \oplus \mathfrak{J}^2$, где $\mathfrak{J}^k$ – инвариантное подпространство уравнения (1), $k = 1, 2$.

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{J}^1$ $(u_0 \in \mathfrak{J}^2)$ решение $u = u(t)$ задачи Коши (2) для (1) таково, что при некотором $a \in \mathbb{R}_+$ и всех $t \in \mathbb{R}$

$$ {}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \le C_1 e^{-at}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\| \qquad \left({}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \ge C_2 e^{at}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|\right). $$

Теорема 3.1.1. *Пусть* $n = m$, *числа* λ_k, *являющиеся корнями многочлена* $P_n(x)$, *не являются корнями* $Q_m(x)$, *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *и выполнено условие* $i\mathbb{R} \cap \sigma^L(M) = \oslash$. *Тогда решения уравнения* (1) *имеют экспоненциальную дихотомию.*

В **п. 3.2** построена функция Грина $G^t \cdot = \begin{cases} -\sum\limits_{k:\ \mu_k > 0} e^{\mu_k t}\langle \cdot, e_k\rangle e_k, & t < 0; \\ \sum\limits_{k:\ \mu_k < 0} e^{\mu_k t}\langle \cdot, e_k\rangle e_k, & t > 0, \end{cases}$ для неоднородного уравнения (4) при условии $i\mathbb{R} \cap \sigma^L(M) = \oslash$, а также исследованы ее свойства.

П. 3.3 содержит доказательства теоремы о существовании ограниченного на всей оси решения неоднородного уравнения и теоремы об ограниченном на полуоси решения такого уравнения.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $n = m$, *числа* λ_k, *являющиеся корнями многочлена* $P_n(x)$, *не являются корнями* $Q_m(x)$, *выполнено условие* $i\mathbb{R} \cap \sigma^L(M) = \oslash$ *и пусть аналитическая вектор-функция* $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}$ *такова, что существует* $\widetilde{g} \in \mathfrak{F}$, *что* $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |g_k(t)| = \widetilde{g}_k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда уравнение* (4) *имеет единственное ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$, *причем оно имеет вид*

$$ u(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{t-s} L_1^{-1} g^1(s)ds - M_0^{-1} g^0(t). \tag{10} $$

Если к тому же $u_0 \in \mathfrak{U}$ *имеет вид* $u_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{-s} L_1^{-1} g^1(0)ds - M_0^{-1} g^0(0)$, *то вектор-функция* (10) *является единственным ограниченным решением* (2),(4).

Теорема 3.3.2. *Пусть $n = m$, числа λ_k, являющиеся корнями многочлена $P_n(x)$, не являются корнями $Q_m(x)$, выполнено условие $i\mathbb{R} \cap \sigma^L(M) = \oslash$ и аналитическая вектор-функция $g : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{F}$ такова, что существует $\widetilde{g} \in \mathfrak{F}$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |g_k(t)| = \widetilde{g}_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $u_0 = u_0^1 \in \mathfrak{J}^1$ задача* (2), (4) *имеет единственное ограниченное на $\overline{\mathbb{R}_+}$ решение $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathfrak{U})$ вида*

$$u(t) = U^t u_0^1 + \int\limits_0^{+\infty} G^{t-s} L_1^{-1} g^1(s) ds - M_0^{-1} g^0(t). \tag{11}$$

А если $u_0 \in \mathfrak{U}$ и выполнено $(\mathbb{I} - P_1) u_0 = \int\limits_0^{+\infty} G^{-s} L_1^{-1} g^1(0) ds - M_0^{-1} g^0(0)$, то вектор-функция (11) *является единственным ограниченным решением задачи* (2), (4).

В **п. 3.4** доказывается существование экспоненциальных дихотомий решений уравнения (9), а также существование ограниченных решений аналога неоднородного уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах на основе результатов третьего параграфа.

В заключении представлены выводы о результатах исследования, а также указаны перспективы развития тематики работы.

Результаты выносимые на защиту:

1. Теоремы о разрешимости одного класса динамических уравнений в комплексных квазибанаховых пространствах с различными начальными и начально-конечным условиями.

2. Относительно спектральная теорема в квазисоболевых пространствах.

3. Теоремы о существовании инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений для однородных уравнений указанного класса.

4. Теоремы об ограниченности на полуоси решений однородных уравнений указанного класса.

5. Теоремы об ограниченности решений неоднородных уравнений указанного класса.

6. Построение аналога линеаризованного уравнения Хоффа и аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в комплексных квазисоболевых пространствах, а также исследование свойств решений этих уравнений.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Хасан, Ф.Л.* Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах / Ф.Л. Хасан // Материалы междунар. конф. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2014. – Воронеж, 2014. – С. 393–396.

2. *Хасан, Ф.Л.* Инвариантные подпространства решений уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазибанаховых пространствах / Ф.Л. Хасан // Обозрение прикладной и промышленной математики – 2015. Т. 22, вып. 2. – С. 278–279.

3. *Хасан, Ф.Л.* Solvability of the Cauchy Problem for One Class of Dynamical Equations in Quasi-Sobolev Spaces / Ф.Л. Хасан // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, no. 3. – P. 34–42.

4. *Сагадеева, М.А.* Существование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах / М.А. Сагадеева, **Ф.Л. Хасан** // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 46–53.

5. *Сагадеева, М.А.* Ограниченные решения модели Баренблатта – Желтова – Кочиной в квазисоболевых пространствах / М.А. Сагадеева, **Ф.Л. Хасан** // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 132–139.

6. *Хасан, Ф.Л.* Об относительно спектральной теореме для одного класса динамических уравнений в квазисоболевых пространствах / Ф.Л. Хасан // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сб. тез. междунар. науч. конф. Уфа, 1 – 3 октября 2015 г. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. – С. 142–143.

7. *Хасан, Ф.Л.* Об ограниченных решениях одного класса динамических уравнений в квазисоболевых пространствах / Ф.Л. Хасан // Материалы междунар. конф. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016. – Воронеж, 2016. – С. 417–420.

Работы [4] и [5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.