УДК 517.977 DOI: 10.14529/mmph150405

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер[1], А.А. Эбель[2]

Приведено точное и приближенное решения задач смешанного управления. Подробно представлен алгоритм численного метода решения задачи смешанного управления, доказана сходимость приближенных решений к точному. Использованы методы теории вырожденных (полу)групп, теории оптимального управления. Отмечается значимость введенного функционала качества, вид которого позволяет решать прикладные задачи в экономике и технике.

Ключевые слова: задачи смешанного управления; системы леонтьевского типа; численное решение.

Введение

Системы леонтьевского типа являются частным конечномерным случаем уравнений соболевского типа. Задача оптимального управления для уравнений соболевского типа впервые была поставлена и исследована в работах Г.А. Свиридюка и А.А. Ефремова, например [1]. В этих первых работах было доказано существование единственного решения указанной задачи с начальным условием Коши для случаев относительной ограниченности и относительной секториальности оператора.

Исследованиям задач оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа в случае относительно радиальных операторов посвящены работы В.Е. Федорова и М.В. Плехановой, например [2]. Подчеркнем, что в работах этих авторов используется подход, предложенный Г.А. Свиридюком в работе [1] и развитый в [3]. Затем, исследования задач оптимального управления для уравнений соболевского типа велись по ряду направлений. Достаточные условия разрешимости задачи оптимального управления для некоторых полулинейных уравнений соболевского типа с начальным условием Шоуолтера–Сидорова получены Н.А. Манаковой [4]. Исследованию задач оптимального управления для уравнений соболевского типа высокого порядка посвящены работы А.А. Замышляевой, например [5]. В работе М.А. Сагадеевой и Келлер А.В. [6] доказано существование и единственность решения задачи оптимального управления Шоултера–Сидорова для нестационарного уравнения соболевского типа с сильно (L, p)–радиальным оператором.

Вместе с тем системы леонтьевского типа (или алгебро-дифференциальные системы, или дифференциально-алгебраические системы) представляют самостоятельный научный интерес в связи с большим числом приложений в экономике [7], технике [8, 9], биологии [10] и др. Алгоритмы численного решения класса задач оптимального управления для систем леонтьевского типа были разработаны в [11]. Важную роль в этих алгоритмах играет начальное условие Шоуолтера–Сидорова, которое, с одной стороны, сняло требование согласования начальных данных (что было необходимо при использовании условия Коши и часто при большой размерности матриц оказывалось нереализуемым требованием), с другой стороны, оказалось в ряде приложений более естественным условием, чем условие Коши [12]. Построенные алгоритмы были применены как в численном исследовании указанных приложений [7–10], так и придали импульс новым исследованиям стохастических систем леонтьевского типа и стохастических сигналов [13, 14].

Задача смешанного управления для уравнения соболевского типа рассмотрена А.Ф. Исламовой в [15]. Будем рассматривать задачи смешанного управления для систем леонтьевского типа с функционалом, отличным от предложенного в работе [15], так как по мнению ав-

[1] Келлер Алевтина Викторовна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: Kellerav@susu.ac.ru
[2] Эбель Андрей Александрович – аспирант, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: Ebelaa@susu.ac.ru

торов этой статьи введенный ими функционал имеет более естественный экономический смысл, что обеспечивает решение прикладных экономических задач. Более того, преимуществом рассмотрения задачи смешанного управления в сравнении с задачами стартового и оптимального управления является более гибкое регулирование управляющего воздействия.

Точное решение задач смешанного управления

Введем в рассмотрение пространства состояний и управлений:

$$H^1(\mathcal{X}) = \left\{ x \in L_2((0;\tau);\mathcal{X}) : \dot{x} \in L_2((0;\tau);\mathcal{X}) \right\};$$

$$\mathcal{U} = H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \left\{ u \in L_2((0;\tau);\mathfrak{Y}) : u^{(p+1)} \in L_2((0;\tau);\mathfrak{Y}) \right\}, \quad \mathcal{U}^0 = \mathfrak{Y}.$$

Выделим в $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^0$ компактные и выпуклые множества допустимых управлений: $\mathcal{U}_{ad}$, $\mathcal{U}_{ad}^0$.

Рассмотрим задачу смешанного управления $\min\limits_{(u_0,u)\in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}} J(u_0,u)$

$$J(u_0,u) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(u_0,u,t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\| dt + \beta \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle dt + \gamma \|u_0\|^2, \tag{1}$$

для системы леонтьевского типа

$$\mathrm{L}\dot{x}(t) = \mathrm{M}x(t) + y(t) + \mathrm{B}u(t) \tag{2}$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$\left[R_\mu^L(\mathrm{M}) \right]^{p+1} (x(0) - u_0) = 0, \tag{3}$$

где $R_\mu^L(\mathrm{M}) = (\mu \mathrm{L} - \mathrm{M})^{-1}\mathrm{L}$ – правая L-резольвента оператора, функции $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ лежат в гильбертовых пространствах $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathfrak{Y}$ соответственно, операторы $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathfrak{Y})$ ($\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathfrak{Y})$ – множество линейных непрерывных операторов, действующих из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathfrak{Y}$), $\ker \mathrm{L} \neq \{0\}$ и $\mathrm{M} \in Cl(\mathcal{X};\mathfrak{Y})$ (замкнутый оператор $\mathrm{M} : \mathrm{dom}\,\mathrm{M} \to \mathfrak{Y}$ с областью определения, плотной в $\mathcal{X}$), $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathfrak{Y})$, причем оператор M сильно (L,p)-радиален [3], при этом $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\theta = 0, 1, \ldots, p+1$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $t \in (0;\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}, \tau > 0\}$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ – положительно определенные и самосопряженные операторы.

Определение 1. *Тройку* $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{X}$ *назовем решением задачи смешанного управления (1)–(3), если*

$$J(v_0, v) = \min_{(u_0,u)\in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}} J(u_0,u),$$

где $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{X}$ удовлетворяют (2), (3).

В [16] доказано существование единственного решения задачи смешанного управления (1)-(3), т.е. справедлива

Теорема 1. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-радиален,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Тогда для любого* $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ *существует единственное сильное решение* $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{X}$ *для задачи смешанного оптимального управления (1)–(3).*

Для численного исследования различных прикладных математических моделей, сводящихся к решению задач смешанного управления для систем леонтьевского типа (конечномерному аналогу уравнений соболевского типа), будем использовать пространства состояний и управлений:

$$\mathcal{X} = H^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ x \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n) \right\};$$

$$\mathcal{U} = H^{p+1}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0;\tau);\mathbb{R}^n) \right\}, \quad \mathcal{U}^0 = \mathbb{R}^n,$$

выделяя в $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^0$ компактные и выпуклые множества допустимых управлений: $\mathcal{U}_{ad}$, $\mathcal{U}_{ad}^0$.

Пусть M и L – квадратные матрицы $n \times n$, причем $\det \mathrm{L} = 0$, матрица M (L,p) – регулярна ($\exists \lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathrm{L} - \mathrm{M}) = 0$ $\exists p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L-резольвента $(\lambda \mathrm{L} - \mathrm{M})^{-1}$ матрицы M имеет устранимую точку и равна порядку полюса в противном случае).

Используя результаты разрешимости задачи Шоуолтера–Сидорова для системы леонтьевского типа [3] и

Теорема 2. *Пусть матрица* M (L,p)*-регулярна,* $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, *причем* $\det \mathrm{M}\neq 0$. *Тогда существует единственное решение* $\left(v_0,v(t),x\left(v_0,v(t)\right)\right)\in \mathfrak{U}_{ad}^0\times\mathfrak{U}_{ad}\times\mathfrak{X}$ *– точка минимума функционала (4), а* $x\left(v_0,v(t)\right)$ *– сильное решение задачи (2), (3) и определяется формулой*

$$x\left(v_0,v(t)\right)=\lim_{k\to+\infty}x_k\left(v_0,v(t)\right)=\lim_{k\to+\infty}\left[X_k^t v_0-\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}(I-Q_k)L\right)^q M^{-1}(I-Q_k)\left(y(t)+Bv(t)\right)^{(q)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau R_k^{t-s}Q_k\left(y(s)+Bv(s)\right)ds\right], \qquad (4)$$

где

$$X_k^t=\left(\left(L-\frac{t}{k}M\right)^{-1}L\right)^k,\ Q_k=\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1},\ R_k^t=\left(\left(L-\frac{t}{k}M\right)^{-1}L\right)^{k-1}\cdot\left(L-\frac{t}{k}M\right)^{-1}.$$

Сходимость. Свойства функционала

Рассмотрим функционал качества (1) на компактных выпуклых множествах $\mathfrak{U}_{ad}\subset\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_{ad}^0\subset\mathfrak{U}^0$. По построению функционал качества (1) является непрерывной функцией, на основании теоремы Вейерштрасса для непрерывных функций на компакте он будет ограничен на $\mathfrak{W}_{ad}=\mathfrak{U}_{ad}\times\mathfrak{U}_{ad}^0$ функцией. При исследовании на сходимость важным является свойство выпуклости функции.

Определение 2. *Функция* $J(w)$ *называется сильно выпуклой на выпуклом множестве* $A\subset H$ *(*H *– гильбертово пространство), если для любых* $w_1,w_2\subset A$, *для любого* $\omega\in[0,1]$ *и для некоторого числа* $T>0$ *выполняется неравенство*

$$J(\omega w_1+(1-\omega)w_2)\le\omega J(w_1)+(1-\omega)J(w_2)-\omega(1-\omega)T\left\|w_1-w_2\right\|^2.$$

Теорема 3. *Пусть матрица* M (L,p)*-регулярна,* $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, $\det M\neq 0$, *а множества* $\mathfrak{U}_{ad}\subset\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_{ad}^0\subset\mathfrak{U}^0$ *– компактны и выпуклы. Тогда функционал (4) является сильно выпуклой функцией на* $\mathfrak{W}_{ad}=\mathfrak{U}_{ad}\times\mathfrak{U}_{ad}^0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $J(\omega w_1+(1-\omega)w_2)$ для (1) и проведем тождественные преобразования

$$J(\omega w_1+(1-\omega)w_2)=\alpha\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau\left\|Cx^{(q)}\left(\omega w_1+(1-\omega)w_2,t\right)-Cx_0^{(q)}(t)\right\|^2dt+$$

$$+\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^\tau\left\langle N_q\left(\omega u_1+(1-\omega)u_2\right)^{(q)}(t),\left(\omega u_1+(1-\omega)u_2\right)^{(q)}(t)\right\rangle dt+\gamma\left\|\omega u_{01}+(1-\omega)u_{02}\right\|^2=$$

$$=\alpha\omega\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau\left\|Cx^{(q)}(w_1,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\|^2dt+\alpha(\omega^2-\omega)\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau\left\|Cx^{(q)}(w_1,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\|^2dt+$$

$$+\alpha(1-\omega)\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau\left\|Cx^{(q)}(w_2,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\|^2dt+$$

$$+\alpha\left((1-\omega)^2-(1-\omega)\right)\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau\left\|Cx^{(q)}(w_2,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\|^2dt+$$

$$+2\alpha\omega(1-\omega)\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau\left\langle Cx^{(q)}(w_1,t)-Cx_0^{(q)}(t),Cx^{(q)}(w_2,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\rangle dt+$$

$$+\beta\omega\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_1^{(q)}(t),u_1^{(q)}(t)\right\rangle dt+\beta(\omega^2-\omega)\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_1^{(q)}(t),u_1^{(q)}(t)\right\rangle dt+$$

$$+\beta(1-\omega)\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_2^{(q)}(t),u_2^{(q)}(t)\right\rangle dt+\beta\left((1-\omega)^2-(1-\omega)\right)\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_2^{(q)}(t),u_2^{(q)}(t)\right\rangle dt+$$

$$+2\beta\omega(1-\omega)\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_1^{(q)}(t),u_1^{(q)}(t)\right\rangle dt+$$

$$+\gamma\omega^2\left\|u_{01}\right\|^2+2\gamma\omega(1-\omega)\left\langle u_{01},u_{02}\right\rangle+\gamma(1-\omega)^2\left\|u_{02}\right\|^2=\omega J(w_1)+(1-\omega)J(w_2)+$$

$$+(\omega^2-\omega)\left[\alpha\sum_{q=0}^{1}\int_0^{\tau}\left\|Cx^{(q)}(w_1,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\|^2dt+\alpha\sum_{q=0}^{1}\int_0^{\tau}\left\|Cx^{(q)}(w_2,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\|^2dt-\right.$$

$$-2\alpha\sum_{q=0}^{1}\int_0^{\tau}\left\langle Cx^{(q)}(w_1,t)-Cx_0^{(q)}(t),Cx^{(q)}(w_2,t)-Cx_0^{(q)}(t)\right\rangle dt+\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_1^{(q)}(t),u_1^{(q)}(t)\right\rangle dt+$$

$$\left.+\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_2^{(q)}(t),u_2^{(q)}(t)\right\rangle dt-2\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q u_1^{(q)}(t),u_2^{(q)}(t)\right\rangle dt+\gamma\left\|u_{01}-u_{02}\right\|^2\right]=$$

$$=\omega J(w_1)+(1-\omega)J(w_2)-\omega(1-\omega)\left[\alpha\sum_{q=0}^{1}\int_0^{\tau}\left\|Cx^{(q)}(w_1,t)-Cx(w_2,t)\right\|^2dt+\right.$$

$$\left.+\beta\sum_{q=0}^{\theta}\int_0^{\tau}\left\langle N_q\left(u_1^{(q)}(t)-u_2^{(q)}(t)\right),u_1^{(q)}(t)-u_2^{(q)}(t)\right\rangle dt+\gamma\left\|u_{01}-u_{02}\right\|^2\right].$$

Так как все слагаемые входящие в состав выражения в квадратных скобках неотрицательны и $x(w,t)$ является непрерывной функцией при $w\in\mathfrak{W}_{ad}$, то по теореме Вейерштрасса она будет ограничена на нем, а значит

$$J(\omega w_1+(1-\omega)w_2)\le\omega J(w_1)+(1-\omega)J(w_2)-\omega(1-\omega)T\left\|w_1-w_2\right\|^2.$$

Теорема доказана.

Будем рассматривать задачу смешанного управления (1)–(3) при условиях (L,p)–регулярности матрицы M, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ и $\det\mathrm{M}\ne0$.

Обозначим $(w,x(w,t))$ точным решением, а $\left(w_k^{\ell},\tilde{x}_k^{\ell}(w_k^{\ell},t)\right)$ – приближенное решение задачи смешанного управления.

Необходимо показать, что при $k,\ \ell\to\infty$ $(w_k^{\ell},x_k^{\ell})\to(w,x)$ так, что $J_k(w_k^{\ell})\to J(w)$.

Лемма 1. *Пусть матрица* M (L,p)*-регулярна,* $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, $\det\mathrm{M}\ne0$, *а функционал (1) является сильно выпуклой функцией на компактном и выпуклом множестве* $\mathfrak{W}_{ad}\subset\mathfrak{U}^0\times\mathfrak{U}$. *Тогда последовательность* $\{w^{\ell}\}$ *является минимизирующей, сходится к* w *по норме* $\mathbb{U}$ *при* $\ell\to\infty$, *при этом* $J_k(w^{\ell})\to J(w)$ *и выполняется неравенство*

$$q\left\|w^{\ell}-w\right\|^2\le J(w^{\ell})-J(w).$$

Доказательство. Множество $\mathfrak{W}_{ad}$ выпукло и компактно, следовательно, существует последовательность $\{\mathfrak{W}_{ad}^{\ell}\}$ выпуклых компактов $\mathfrak{W}_{ad}^{\ell}\subset\mathfrak{W}_{ad}$, монотонно исчерпывающих $\mathbb{U}_{\partial}$, т.е. $\overline{\mathfrak{W}_{ad}^{\ell}}\subset\mathfrak{W}_{ad}^{\ell+1}$, $\overline{\bigcup_{\ell=p+1}^{\infty}\mathfrak{W}_{ad}^{\ell}}=\mathfrak{W}_{ad}$. Из этого следует, что $J(w^{\ell+1})\le J(w)$, а значит, для последовательности $\{w^{\ell}\}\subset\mathfrak{W}_{ad}$ существует предел $\lim\limits_{\ell\to+\infty}J(w^{\ell})$ равный $J(w)$ в силу непрерывности функционала (1). Таким образом, последовательность $\{w^{\ell}\}$ является минимизирующей.

Отметим, что по теореме Мазура компактное и выпуклое множество слабо компактное, т.о. $\mathfrak{W}_{ad}$ – слабо компактно. Тогда функционал (1) определен, ограничен на слабокомпактном множестве, а по теореме Вейерштрасса минимизирующая последовательность $\{w^\ell\}$ будет слабо сходится к w.

Воспользуемся теоремой о сильной выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом компактном множестве (или обобщением теоремы Вейерштрасса). Так как функционал качества (1) является сильно выпуклой и непрерывной функцией на $\mathfrak{W}_{ad}$, последовательность $\{w^\ell\}$ – минимизирующая, а точка минимума w – единственна, следовательно, последовательность $\{w^\ell\}$ сходится при $\ell \to \infty$ к w по норме $\mathbb{U}$ так, что выполнятся неравенство

$$q\left\|w^\ell - w\right\|^2 \le J(w^\ell) - J(w).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *В условиях леммы 1 для задачи смешанного оптимального управления (1) – (3) последовательность $\{x(w^\ell)\}$ является минимизирующей, сходится к $x(w)$ по норме $\mathfrak{X}$ при $\ell \to \infty$.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, а функционал*

$$J_k(v_k^0, v_k^\ell) = J_k(w_k^\ell) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| C x_k^{(q)}(w_k^\ell, t) - C x_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt +$$

$$+\beta \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\langle N_q (v_k^\ell)^{(q)}, (v_k^\ell)^{(q)} \right\rangle dt + \gamma \left\| v_k^0 \right\|^2, \qquad (6)$$

является сильно выпуклой и ограниченной функцией на выпуклом компакте $\mathfrak{W}_{ad}^\ell \subset \mathfrak{W}_{ad}$. Тогда последовательность $\{w_k^\ell\}$ является минимизирующей, сходится к w^ℓ при $k \to \infty$ и фиксированном $\ell > p$ по норме $\mathbb{U}$, при этом $J_k(w_k^\ell) \to J(w^\ell)$ и выполняется неравенство

$$q\left\|w_k^\ell - w^\ell\right\|^2 \le J_k(w_k^\ell) - J(w^\ell).$$

Доказательство. Так как $J_k(w_k^\ell)$ и $J(w)$, определяемые формулами (6) и (4) соответственно, являются непрерывными и ограниченными на $\mathfrak{W}_{ad}^\ell$ функциями справедливо неравенство

$$\left|\inf J_k(w_k^\ell) - \inf J(w)\right| \le \sup\left|J_k(w_k^\ell) - J(w)\right|.$$

Действительно,

$$J_k(w_k^\ell) = J_k(w_k^\ell) + J(w) - J(w),$$
$$\sup J_k(w_k^\ell) \le \sup J(w) + \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w)),$$
$$\sup J_k(w_k^\ell) - \sup J(w) \le \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w)),$$
$$-\inf J_k(w_k^\ell) + \inf J(w) \le \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w)),$$
$$\left|\inf J_k(w_k^\ell) - \inf J(w)\right| \le \sup(J_k(w_k^\ell) - J(w))$$

из чего получаем, что

$$\left|\inf J_k(w_k^\ell) - \inf J(w)\right| \le \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{w_k^\ell\}$ является минимизирующей при $k \to \infty$, сходится к w^ℓ так, что $J_k(w_k^\ell) \to J(w^\ell)$ при фиксированном $\ell > p$.

А так как функционал, определяемый (6) является сильно выпуклой и непрерывной функцией на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{W}_{ad}^\ell$, то по теореме о сильно выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом замкнутом множестве последовательность $\{w_k^\ell\}$ сходится к w^ℓ по норме в $\mathbb{U}$ и справедливо неравенство

$$q\left\|w_k^\ell - w^\ell\right\|^2 \le J_k(w_k^\ell) - J(w^\ell).$$

Лемма доказана.

Следствие 2. *В условиях леммы 2 для задачи смешанного управления последовательность* $\{\tilde{x}_k^l\}$ *является минимизирующей, при* $k \to \infty$ *и фиксированном* $\ell > p$*, сходится к* $x(w^\ell)$.

Теорема 4. *Пусть матрица* M (L, p)*-регулярна,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det \mathrm{M} \ne 0$. *Функционал (4) является непрерывной, сильно выпуклой, ограниченной на выпуклом компактном множестве* $\mathfrak{W}_{ad}$. *Пусть* $\left(w, x(w,t)\right)$ *– точное, а* $\left(w_k^\ell, x_k^\ell(w_k^\ell, t)\right)$ *– приближенное решение задачи смешанное управления (1) – (4). Тогда последовательность* $\{w_k^l\}$ *сходится к* $\{w\}$ *по норме* $\mathbb{U}$*, последовательность* $\{x_k^\ell\}$ *сходится к* $x(w)$ *по норме* $\mathfrak{X}$ *при* $k \to \infty$, $\ell \to \infty$ *так, что* $J_k(w_k^\ell) \to J(w)$*, причем выполняется неравенство* $q\left\|w_k^\ell - w^\ell\right\|^2 \le J_k(w_k^\ell) - J(w)$.

Доказательство. Из справедливости лемм 1 и 2, следствий из них и теоремы о повторных пределах существует повторный предел $\lim\limits_{k\to+\infty}\lim\limits_{\ell\to+\infty} J_k(w_k^\ell) = J(w)$, причем $w_k^\ell \to w^\ell \to w$ и $x(w_k^\ell) \to x(w^\ell) \to x(w)$.

Неравенство справедливо, т.к.

$$q\left\|w_k^\ell - w\right\|^2 = q\left\|w_k^\ell - w^\ell + w^\ell - w\right\|^2 \le q\left\|w_k^\ell - w\right\|^2 + q\left\|w^\ell - w\right\|^2 \le$$

$$\le J(\tilde{w}_k^\ell) - J(w^\ell) + J(w^\ell) - J(w) = J(\tilde{w}_k^\ell) - J(w).$$

Теорема доказана.

Алгоритм численного метода решения задач смешанного управления для систем леонтьевского типа

Будем искать приближенные решения смешанного оптимального управления для систем леонтьевского типа в виде:

$$v^0 = col(a_{01}, \ldots, a_{0n}),\ v^\ell(t) = col\left(\sum_{\mathrm{j}=0}^{\ell} a_{1\mathrm{j}} t^{\mathrm{j}}, \ldots, \sum_{\mathrm{j}=0}^{\ell} a_{\mathrm{nj}} t^{\mathrm{j}}\right).$$

В этом случае задача нахождения приближенного решения (1)–(3) сведется к решению задачи выпуклого программирования относительно массива $A_{\mathrm{n}\times(\ell+2)} = (a_{ij})$.

Этап 1. Вычисление $\det \mathrm{M}$. Проверка на отличие его значения от нуля с точностью $\varepsilon = 10^{-30}$. В случае $\det \mathrm{M} = 0$ необходимо провести замену $z = e^{\lambda t} x$ и продолжить нахождение решения.

Этап 2. Вычисление порядка полюса $p = n - q$, где $q = \deg\det\left(\mu \mathrm{L} - \mathrm{M}\right)$.

Этап 3. Вычисление числа K, начиная с которого можно вычислять приближенное решение $K = \max\left\{k_1, k_2\right\}$. Здесь $k_1 = \dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=0}^{q}\left|a_i\right| + 1$, $k_2 = \dfrac{1}{\alpha p^p}\sum\limits_{i=0}^{q}\left|a_i\right|(p+1)^{n-i} + 1$, где $\alpha = \max\left\{1, \dfrac{1}{\left|a_q\right|}\sum\limits_{i=0}^{q}\left|a_i\right|\right\}$.

Этап 4. По заданному η и отрезку интегрирования $\left[0, \tau\right]$ осуществляется расчет весов ω_j и узлов s_j квадратурной формулы Гаусса

$$\int_0^\tau f(x)dx \approx \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{2\eta+1}\omega_j f\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}s_j\right),\quad j = \overline{1, 2\eta+1},$$

где s_j – нули полинома Лагранжа $P_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!}\cdot\dfrac{d^n}{at^n}[(t^2-1)^2]$, $n = 0,1$, а веса определяются формулой $\omega_j = \dfrac{2}{[P_n'(s_j)]^2(1-s_j)^2}$.

Этап 5. В заданных точках $\vartheta_j \in [0,\tau]$ при нулевых значениях a_{ij} из $v^0 = col(a_{01},\dots,a_{0n})$ и $v^\ell(t) = col\left(\sum_{\mathrm{j}=0}^{\ell} a_{1\mathrm{j}}t^{\mathrm{j}},\dots,\sum_{\mathrm{j}=0}^{\ell} a_{\mathrm{nj}}t^{\mathrm{j}}\right)$ вычисляются $x_k(0,t)$ и $J_k(0,0)$.

Этап 6. Находится минимум функционала $J\left(\tilde{v}_k^0;\tilde{v}_k^\ell\right)$

$$J\left(\tilde{v}_k^0;\tilde{v}_k^\ell\right) = \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{2\eta+1}\left\|Cx_k\left(v^0;v^\ell;\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}s_j\right) - Cx_0\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}s_j\right)\right\|^2\omega_j +$$

$$+\frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{2\eta+1}\left\|Cx_k'\left(v^0;v^\ell;\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}s_j\right) - Cx_0'\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}s_j\right)\right\|^2\omega_j +$$

$$+\frac{\tau}{2}\sum_{q=0}^{\theta}\sum_{j=1}^{2\eta+1}\left\langle N_q(v^\ell)^{(q)}\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}s_j\right);(v^\ell)^{(q)}\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}s_j\right)\right\rangle$$

и $\tilde{v}_k^0 = col\left(a_{0j}^*,...,a_{0j}^*\right)$, $\tilde{v}_k^\ell = col\left(\sum_{j=0}^{\ell}a_{1j}^*t^j,...,\sum_{j=0}^{\ell}a_{nj}^*t^j\right)$, при которых он достигается. В основе алгоритма лежит метод покоординатного многошагового спуска с памятью.

Этап 7. Вычисляется значение $\tilde{x}_k^\ell = x_k(\tilde{v}_k^0;\tilde{v}_k^\ell;t)$.

Обсуждая алгоритм, следует подчеркнуть, что при распараллеливании процессов алгоритм может быть улучшен: выбор изменяемых элементов в строках массива $A_{\mathrm{n}\times(\ell+2)} = (a_{ij})$ должен осуществляться при сопоставлении изменений не в одной строке, а во всех одновременно.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – С. 1912–1919.

2. Федоров, В.Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1548–1556.

3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 179 p.

4. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для одного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богонос // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 42–53.

5. Замышляева, А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 5–28.

6. Келлер, А.В. Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа / А.В. Келлер, М.А. Сагадеева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – Т. 32, № 19(162). – С. 57–66.

7. Келлер, А.В. Методика построения динамической и статической балансовых моделей на уровне предприятия / А.В. Келлер, Т.А. Шишкина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. – 2013. – Т. 7, № 3. – С. 6–11.

8. Shestakov, A.L. The Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, A.V. Keller, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 1. – С. 3–16.

9. Келлер, А.В. Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – № 3. – С. 74–82.

10. Ebel, S.I. Numerical Research of Degenerate Dynamic Balance Model of the Cell Cycle / S.I. Ebel // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 2, № 2. – С. 25–38.

11. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. … докт. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.

12. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.

13. Gliklikh, Yu.E. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, № 2. – С. 45–51.

14. Шестаков, А.Л. Оптимальные измерения детерминированных и стохастических сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014: сб. науч. тр. – Москва, 16–19 июля 2014 г. – С. 1231–1242.

15. Плеханова, М.В. Задача со смешанным управлением для одного класса линейных уравнений соболевского типа / М.В. Плеханова, А.Ф. Исламова // Вестник Челябинского государственного университета. – 2010. – № 23. – С. 49–58.

16. Keller, A.V. The existence of a unique solution to a mixed control problem for Sobolev-type equations / A.V. Keller, A.A. Ebel // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 121–127.

Поступила в редакцию 3 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2015, vol. 7, no. 4, pp. 37–45

DOI: 10.14529/mmph150405

A NUMERICAL METHOD OF THE SOLUTION OF MIXED CONTROL PROBLEMS FOR LEONTIEFF TYPE SYSTEMS

A.V. Keller[1], A.A. Ebel[2]

The article presents exact and approximate solutions of mixed control problems. A detailed algorithm for the numerical method of the solution of mixed control problems is presented, the convergence of approximate solutions to the exact one is proved. Methods of the theory of degenerate (semi) groups, of the optimal control theory are used. The importance of the introduced functional quality which enables to solve applied problems in economics and engineering is shown.

Keywords: mixed control problem; Leontieff type system; numerical solution.

References

1. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. *Differentsial'nye uravneniya,* 1995, Vol. 31, pp. 1912–1919. (in Russ.).

2. Fedorov V.E., Plehanova M.V. *Differentsial'nye uravneniya,* 2004, Vol. 40, no. 11, pp. 1548–1556. (in Russ.).

3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht; Boston: VSP, 2003. 179 p.

4. Manakova N.A., Bogonos E.A. *Izvestiya irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Serya: Matematika*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp.42–53. (in Russ.).

5. Zamyshlyaeva A.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software"*, 2014, Vol. 7, no. 2, pp. 5–28. (in Russ.).

[1] Keller Alevtina Viktorovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Modeling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: Kellerav@susu.ac.ru

[2] Ebel Andrey Aleksandrovich is Post-graduate Student, Mathematical Modeling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia.
E-mail: Ebelaa@susu.ac.ru

6. Keller A.V., Sagadeeva M.A. *Belgorod State University Scientific bulletin. Serya: Matematika, Physica*, 2013, Vol. 32, no. 19(162), pp. 57–66. (in Russ.).

7. Keller A.V., Shyshkina T.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Economics and Management"*, 2013, Vol. 7, no. 3, pp. 6–11. (in Russ.).

8. Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk G.A. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics,* 2014, Vol. 1, no. 1. pp. 3–16. (in Russ.).

9. Keller A.V., Nazarova E.I. *Izvestiya irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Serya: Matematika*, 2011, no. 3, pp. 74–82. (in Russ.).

10. Ebel, S.I. Numerical Research of Degenerate Dynamic Balance Model of the Cell Cycle. *Journal of Computational and Engineering Mathematics,* 2015, Vol. 2, no. 2, pp. 25–38. (in Russ.). DOI: 10.14529/jcem150204

11. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk* [Numerical study of optimal control problems for models of Leontieff type. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Chelyabinsk, The South Ural State University, 2011. 237 p. (in Russ.).

12. Zagrebina S.A., Keller A.V. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software"*. 2015. Vol. 8, no. 2. pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201

13. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution. *Journal of Computational and Engineering Mathematics,* 2014, Vol. 1, no. 2, pp. 45–51. (in Russ.).

14. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Yu.V. Optimal'nye izmereniya determinirovannykh i stokhasticheskikh signalov [Optimal measuring of determined and stochastic signals]. *XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014: sb. nauch. tr.* [Proceedings of XII All-Russian conference on the problems the control VSPU 2014]. Moscow, 16–19 July 2014. pp. 1231–1242. (in Russ.).

15. Plehanova M.V., Islamova A.F. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta,* 2010, no. 23, pp. 49–58. (in Russ.).

16. Keller A.V., Ebel A.A. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software",* 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 121–127. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140313

Received September 3, 2015