# Краткие сообщения

УДК 517.956.223

## ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

***И.А. Гулящих*[1]**

**Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре.**

*Ключевые слова: задача Неймана; полигармоническое уравнение; условия разрешимости.*

Рассмотрим задачу Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре $S=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$

$$\begin{aligned} &\Delta^k u(x) = f(x), \quad x\in S;\\ &\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}_{|\partial S} = \varphi_j(s), \quad s\in\partial S, \quad j=\overline{1,k}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial S$. В работе [1] была рассмотрена более общая краевая задача, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях, а в работе [2] приводится решение задачи Дирихле для уравнения из (1). В работе [3] была исследована задача Неймана для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре, а в [4] дается решение соответствующей задачи Дирихле. В работе [5] получены условия разрешимости задачи Неймана (1), а также дается способ нахождения ее решения. Обозначим $\Lambda u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}$.

**Теорема 1.** [5, теорема 8] Решение задачи Неймана (1) имеет вид

$$u(x) = \int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t} + C, \tag{2}$$

где $v(x)$ – решение следующей задачи Дирихле

$$\begin{aligned} &\Delta^k v(x) = (\Lambda + 2k) f(x), \quad x\in S;\\ &v_{|\partial S} = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial^j v}{\partial \nu^j}_{|\partial S} = j\varphi_j(s) + \varphi_{j+1}(s), \quad s\in\partial S, \quad j=\overline{1,k-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из приведенной теоремы следует, что условие разрешимости задачи Неймана (1) записывается в виде $v(0)=0$, где $v(x)$ – решение задачи Дирихле (3). Рассмотрим частный случай задачи (1), когда $f(x)=0$ и обозначим $f_0=\varphi_1$, $f_j = j\varphi_j + \varphi_{j+1}$ при $j=1,\dots,k-1$. Для нахождения значения $v(0)$ решения задачи Дирихле с функциями $f_0,\dots,f_{k-1}$ на границе воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 2.** [6, теорема 2] Для всякой полигармонической в единичном шаре $S\subset\mathbb{R}^n$ функции $v\in C^{k-1}(\overline{S})$ справедливо равенство

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\Big(h_k^0 v + h_k^1\frac{\partial v}{\partial \nu} + \dots + h_k^{k-1}\frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}\Big) ds_x, \tag{4}$$

где числа $h_k^s$ являются коэффициентами разложения многочлена

$$H_{k-1}(\lambda) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!!}(\lambda-2)\cdots(\lambda-2k+2) \tag{5}$$

---

[1] Гулящих Илья Анатольевич – аспирант, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: giarist@mail.ru

(здесь $H_0(\lambda)=1$) по факториальным степеням $\lambda^{[s]}=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-s+1)$

$$H_{k-1}(\lambda)=h_k^{k-1}\lambda^{[k-1]}+h_k^{k-2}\lambda^{[k-2]}+\cdots+h_k^1\lambda^{[1]}+h_k^0. \tag{6}$$

Учитывая соотношения $f_0=\varphi_1$, $f_j=j\varphi_j+\varphi_{j+1}$, где $j=1,\ldots,k-1$, перепишем равенство (4) в виде

$$v(0)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=0}^{k-1}h_k^i(i\varphi_i(s)+\varphi_{i+1}(s))\,ds_x=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{i=1}^{k}(ih_k^i+h_k^{i-1})\varphi_i(s)\,ds_x,$$

где надо учитывать, что $h_k^k=0$. Определим производную по правилу $P^{(1)}(\lambda)=P(\lambda+1)-P(\lambda)$ [2]. Нетрудно видеть, что $(\lambda^{[k]})^{(m)}=k^{[m]}\lambda^{[k-m]}$, а поэтому из (6) находим $h_k^i=\frac{1}{i!}(H_{k-1})^{(i)}(0)$, а значит, используя формулу (5), получим

$$ih_k^i+h_k^{i-1}=\frac{1}{(i-1)!}(H_{k-1})^{(i)}(0)+\frac{1}{(i-1)!}(H_{k-1})^{(i-1)}(0)=\frac{1}{(i-1)!}\Big((H_{k-1})^{(1)}(\lambda)+$$

$$+H_{k-1}(\lambda)\Big)^{(i-1)}(0)=\frac{1}{(i-1)!}\Big(H_{k-1}(\lambda+1)\Big)^{(i-1)}(0)=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!!}\frac{1}{(i-1)!}(N_{k-1})^{(i-1)}(0),$$

где обозначено $N_{k-1}(\lambda)=(\lambda-1)\cdots(\lambda-2k+3)$. Значит, условие $v(0)=0$ равносильно условию

$$\int_{\partial S}\sum_{i=1}^{k}n_k^{i-1}\varphi_i(s)\,ds_x=0,$$

где числа $n_k^i$ являются коэффициентами разложения многочлена $N_{k-1}(\lambda)$ по факториальным степеням $\lambda^{[i]}$. Вычислим числа $n_k^i$.

**Лемма 1.** Имеет место равенство

$$(\lambda-1)\cdots(\lambda-2k+3)=(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{2k-i-2}{i}(2k-2i-3)!!\lambda^{[i]}, \tag{7}$$

причем при $k=1$ многочлен слева равен 1.

*Доказательство.* При $k=1$ и $k=2$ равенство верно. Пусть оно верно при $k$, докажем его верность и при $k=k+1$. Умножим (7) на $\lambda-2k+1$. Учитывая, что $\lambda^{[i]}(\lambda-2k+1)=\lambda^{[i+1]}-(2k-i-1)\lambda^{[i]}$, справа будем иметь

$$(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{2k-i-2}{i}(2k-2i-3)!!\Big(\lambda^{[i+1]}-(2k-i-1)\lambda^{[i]}\Big)=(-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\times$$

$$\times\left(\binom{2k-i-1}{i-1}(2k-2i-1)!!+\binom{2k-i-2}{i}(2k-2i-3)!!(2k-i-1)\right)\lambda^{[i]}.$$

Выражение в круглых скобках имеет значение

$$\frac{(2k-2i-3)!!}{i!}(2k-i-1)\cdots(2k-2i+1)(2k-2i-1)(i+(2k-2i))=$$

$$=\frac{(2k-2i-3)!!}{i!}(2k-i-1)\cdots(2k-2i+1)(2k-2i-1)(2k-i)=(2k-2i-1)!!\binom{2k-i}{i},$$

а значит выражение в круглых скобках равно

$$(-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(2k-2i-1)!!\binom{2k-i}{i}\lambda^{[i]}.$$

Это означает, что формула (7) верна при $k=k+1$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что

$$n_k^{i-1}=(-1)^{i-1}\binom{2k-i-1}{i-1}(2k-2i-1)!!,$$

а значит, условие разрешимости однородной задачи Неймана имеет вид

$$\int_{\partial S} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{2k-i-1}{i-1} (2k-2i-1)!!\varphi_i(s)\, ds_x = 0.$$

Полученное условие согласуется с найденным в [5].

**Литература**

1. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.

2. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1149–1170.

3. Karachik, V.V. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov, A. Bekaeva // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 81, № 3. – P. 487–495.

4. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. XV, № 2(50). – С. 86–98.

5. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. XVI, № 4(56). – С. 61–74.

6. Карачик, В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре / В.В. Карачик // Математические труды. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 69–88.

***Поступила в редакцию 5 февраля 2015 г.***

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2015, vol. 7, no. 2, pp. 70–72***

## NEUMANN PROBLEM FOR POLYHARMONIC EQUATION IN THE UNIT BALL

***I.A. Gulyashchikh***[1]

Necessary and sufficient solvability conditions of Neumann problem for homogeneous polyharmonic equation in the unit ball are obtained.

*Keywords: Neumann problem; polyharmonic equation; solvability conditions.*

**References**

1. Karachik V.V. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*. 1991. Vol. 32, no. 5. pp. 51–58. (in Russ.).

2. Karachik V.V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2014. Vol. 54, no. 7. pp. 1149–1170. (in Russ.). DOI: 10.7868/S0044466914070072

3. Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekaeva A. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2012. Vol. 81, no. 3. pp. 487–495.

4. Karachik V.V., Antropova N.A. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2012. Vol. XV, no. 2(50). pp. 86–98. (in Russ.).

5. Karachik V.V. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2013. Vol. XVI, no. 4(56). pp. 61–74. (in Russ.).

6. Karachik V.V. On the mean value property for polyharmonic functions in the ball. *Siberian Advances in Mathematics.* 2014. Vol. 24, no. 3. pp. 169–182.

***Received 5 February 2015***

[1] Gulyashchikh Il'ya Anatol'evich is Post-graduate Student, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: giarist@mail.ru