УДК 517.984.54

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА

А.И. Седов

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE INVERSE SPECTRAL ANALYSIS PROBLEM FOR A SELF-ADJOINT DISCRETE OPERATOR

A.I. Sedov

Приведены достаточные условия налагаемые на последовательность комплексных чисел, для которой существует возмущенный дискретный оператор такой, что его спектр совпадает с данной последовательностью.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, собственные числа, ядерный оператор, возмущение

The author introduces sufficient conditions prescribed for the consecutive order of the complex numbers, for which such a discrete operator exists which spectrum coincides with the given consecutive order.

Keywords: inverse spectral problem, eigenvalue, kernel operator, perturbation

Пусть дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор T с ядерной резольвентой действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что спектр оператора $\sigma(T)$, простой и занумеруем собственные числа оператора λ_n в порядке возрастания $n = \overline{0,\infty}$. Через v_n обозначим соответствующие λ_n ортонормированные в H собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: *для данной последовательности $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ мало отличающейся, в некотором смысле, от последовательности $\{\lambda_n\}$ доказать существование и единственность такого оператора, что его спектр совпадает с данной последовательностью $\{\xi_n\}$.*

Будем искать этот оператор в виде суммы $T + P$, где P — оператор умножения на функцию $p \in H$ действующий в H. Обозначим: $r_n = \frac{1}{2}\min\{\lambda_{n+1} - \lambda_n; \lambda_n - \lambda_{n-1}\}$, $r_0 = \inf\limits_n r_n$, $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| = r_n\}$, $\Omega_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| \geq r_n\}$, $\Omega = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

Лемма 1. *Пусть $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, тогда оператор $T + P$ — дискретен и его собственные числа μ_n имеют такую же кратность, что и λ_n, причем*

(i) если $R_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, то $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, $1 \leq q < \infty$,

(ii) если $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_r$, то $\mu_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_r$,

где R_0 и R резольвенты операторов T и $T + P$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим очевидное операторное тождество, справедливое при всех $\lambda \in \Omega$:

$$T + P - \lambda E = (E + PR_0(\lambda))(T - \lambda E).$$

Так как $\|R_0(\lambda)\| = \dfrac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}$, то $\|PR_0(\lambda)\| < \dfrac{r}{2} \cdot \dfrac{1}{r_n} \le \dfrac{1}{2}$. Значит существует линейный ограниченный в H оператор $(E + PR_0(\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (PR_0(\lambda))^k$, причем ряд сходится по норме равномерно по $\lambda \in \Omega$ и $\|(E + PR_0(\lambda))^{-1}\| \le 2$.

Тогда всюду на Ω существует линейный ограниченный оператор

$$R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1} = R_0(\lambda)(E + PR_0(\lambda))^{-1}. \tag{1}$$

Отсюда следует, что оператор $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, и для него справедливо разложение в сходящийся по норме ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k, \ \lambda \in \Omega. \tag{2}$$

Так как $R(\lambda)$ — компактный оператор в H, то оператор $T + P$ дискретен.

Норма разности проекторов Рисса, при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R(\lambda) - R_0(\lambda)) d\lambda \right\| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \|R(\lambda)\| \cdot \|PR_0(\lambda)\| |d\lambda| < \frac{1}{2\pi} 2\pi r_n \frac{2}{2r_n - r} \frac{r}{2r_n} \le \frac{r}{r_n} \le 1, \tag{3}$$

поэтому все корневые подпространства оператора $T + P$ имеют такую же размерность, как и у оператора T.

Кроме того, если $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_n$, то $\mu_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega_n$. □

Рассмотрим операторное тождество

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)PR_0(\lambda) + R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2, \ \lambda \in \Omega.$$

Умножим его на $\frac{\lambda}{2\pi i}$, проинтегрируем по контуру γ_n и найдем след. В итоге получим следующее утверждение.

Теорема 1. $\|P\| < \frac{r_n}{2}$, *то имеет место спектральное тождество*

$$\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \alpha_n(p), \tag{4}$$

где $\alpha_n(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \lambda \, \mathrm{Sp} \left[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2 \right] d\lambda$.

Лемма 2. *Если* $\|P_j\| \le r/2$, $0 < r \le r_0$, $j = 1, 2$, *то*

$$|\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)| \le r r_n \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2,$$

где $\|\cdot\|_2$ — *норма Гильберта–Шмидта.*

Доказательство. Введем обозначение $R_j(\lambda) = (T + P_j - \lambda E)^{-1}$, $j = 1, 2$.

Умножая ряд (2) на $(P_j R_0(\lambda))^2$, получим

$$R(\lambda)(P_j R_0(\lambda))^2 = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k R_0(\lambda)(P_j R_0(\lambda))^k, \ \lambda \in \Omega.$$

Обозначив через $\alpha_n^{(k)}$ k-ю поправку:

$$\alpha_n^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \lambda \, \mathrm{Sp} \left[R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k \right] d\lambda = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i k} \int_{\gamma_n} \mathrm{Sp} \, [PR_0(\lambda)]^k d\lambda,$$

из (4) получим $\alpha_n(p) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \alpha_n^{(k)}(p)$.

Оценим разности k-х поправок, $k \geq 2$.

$$|\alpha_n^{(k)}(p_1) - \alpha_n^{(k)}(p_2)| = \frac{1}{2\pi k} \left| \int_{\gamma_n} \mathrm{Sp} \left[(P_1 R_0(\lambda))^k - (P_2 R_0(\lambda))^k \right] d\lambda \right| \leq$$

$$\frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left\| (P_1 R_0(\lambda))^k - (P_2 R_0(\lambda))^k \right\|_1 \leq$$

$$\frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left\| \sum_{s=0}^{k-1} (P_2 R_0(\lambda))^s (P_1 - P_2) R_0(\lambda) (P_1 R_0(\lambda))^{k-s-1} \right\|_1 =$$

$$\frac{r_n}{k} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \|P_1 - P_2\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \, \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right) =$$

$$r_n \|P_1 - P_2\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left(\|R_0(\lambda)\|_2^2 \, \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right).$$

Далее оценим модуль разности:

$$|\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)| \leq r_n \|P_1 - P_2\| \frac{r}{2} \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|^k \leq$$

$$r r_n \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2. \qquad \square$$

Разложим v_n^2 по ортонормированному базису $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда $v_n^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{nk} \varphi_k$. Отсюда получаем $(P v_n, v_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} p_k$, где p_k — коэффициенты Фурье функции p в базисе $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Перепишем (4): $\mu_n - \lambda_n - \alpha_n(p) = (P v_n, v_n)$ и обозначим: $a_n = \mu_n - \lambda_n - \alpha_n(p)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad C = (c_{ij})_{i,j=0}^{\infty}.$$

Тогда основное спектральное тождество (4) запишется в матричной форме $A = CP$. Обозначим элементы обратной матрицы C^{-1} через c_{ij}^{-}.

Следующая теорема является обобщением результатов работ [1 – 2].

Теорема 2. *Если матрица C обратима и для нее выполняется неравенство:*

$$\frac{r}{\|1\|_H} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{-} r_k \max_{\lambda \in \gamma_k} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \omega < 1,$$

то для любой комплексной последовательности $\{\xi_n\}$ удовлетворяющей неравенству:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{-} |\xi_k - \lambda_k| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

существует функция $p \in H$, такая, что $\sigma(T + P) = \{\xi_n\}$.

Доказательство. В пространстве H рассмотрим уравнение относительно p:

$$p = \alpha_0 - \alpha(p), \tag{5}$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{-}(\xi_k - \lambda_k)\varphi_n, \tag{6}$$

$$\alpha(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{-}\alpha_k(p)\varphi_n. \tag{7}$$

Введем оператор $A : H \to H$, определяемый равенством: $Ap = \alpha_0 - \alpha(p)$. Так как $\|Ap\|_H \le \|\alpha_0\|_H + \|\alpha(p)\|_H \le \frac{r}{2}(1-\omega) + \frac{r}{2}\omega = \frac{r}{2}$, то оператор A отображает замкнутый шар $U(0, \frac{r}{2})$ в себя. Покажем, что оператор A сжимающий в этом подпространстве.

$$\|Ap_1 - Ap_2\|_H = \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\|_H = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{-}(\alpha_k(p_1) - \alpha_k(p_2))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}^{-}|\,|\alpha_k(p_1) - \alpha_k(p_2)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$r\|P_1 - P_2\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}^{-}| r_k \max_{\lambda\in\gamma_k}\|R_0(\lambda)\|_2^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \omega\|p_1 - p_2\|_H.$$

По принципу С. Банаха уравнение (5) имеет единственное решение p.

Определим оператор P, действующий в H, следующим образом: $Pv(x) = p(x)v(x)$, где p — решение уравнения (5). Оператор P удовлетворяет условиям леммы 1, поэтому оператор $T + P$ имеет дискретный спектр $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Кроме того, для этого оператора выполняется основное спектральное тождество (4).

Литература

1. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов, В.В. Дубровский // Электромагнитные волны & электронные системы. - 2005. - Т. 10, № 1 - 2. - С. 1 - 8.

2. Седов, А.И. О существовании и единственности решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа на параллелепипеде / А.И. Седов, ГА. Закирова // Вестник МаГУ. Математика. - 2006. - № 9. - С. 145 - 149.

Кафедра математических методов в экономике,
Магнитогорский государственный университет,
sedov@masu.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2008 г.