УДК 517.9

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

А.А. Замышляева

ON A SOBOLEV TYPE EQUATION DEFINED ON THE GRAPH

A.A. Zamyshlyaeva

Изучается начально-краевая задача для уравнения Буссинеска - Лява, определенного на графе. Проводится редукция к абстрактной задаче Коши для уравнения Соболевского типа второго порядка. Получена теорема о фазовом пространстве исходного уравнения.

Ключевые слова: уравнения Соболевского типа, фазовое пространство, M,N-функции, дифференциальные уравнения на графах

The author considers the initial-boundary value problem for the Boussinesqe - Love equation which is defined on graph by reducing it to the Cauchy problem for the Sobolev type equation of the second order. The author obtains a theorem on the phase space of such equation.

Keywords: Sobolev type equations, phase space, M,N-functions, differential equations defined on graphs

Введение

В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. За последние годы тематика теории графов стала еще более разнообразной. Краевые и начально-краевые задачи для уравнений на графах начали изучать в конце прошлого века практически одновременно в разных регионах нашей планеты. Здесь можно отметить работы S. Kosugu, C. Cattaneo, G. Medolla, A.G. Setti, F. Barra. Независимо от этих авторов и впервые в России краевыми и начально-краевыми задачами для уравнений на графах начал заниматься Ю.В. Покорный [1] со своими учениками. Ими изучены качественные свойства дифференциальных уравнений на многообразиях типа сети, функция Грина, дифференциальные неравенства, разработана теория эллиптических уравнений на ветвящихся многообразиях.

Г.А. Свиридюк [2] рассмотрел начально-краевую задачу для полулинейного уравнения Соболевского типа первого порядка на графе, эти результаты были развиты в работе [3].

Данная работа посвящена изучению уравнения Буссинеска - Лява [4]

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u, \tag{0.1}$$

описывающего продольные колебания упругого стержня, где параметры $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0, \beta > 0$ характеризуют среду, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу задачи. Пусть $G = G(\mathcal{V};\mathcal{E})$ - конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ – множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxtt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j) \text{ для всех } x \in (0, l_j),\ t \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(0.2)}$$

Для уравнений (0.2) в каждой вершине V_i зададим краевые условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0; \quad \textbf{(0.3)}$$

$$u_s(0,t) = u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = u_m(l_m,t), \quad \text{для всех } E_s, E_j \in E^\alpha(V_i),\ E_k, E_m \in E^\omega(V_i), \quad \textbf{(0.4)}$$

которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (0.3) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (0.4) – что решение в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф G состоит из единственной нециклической дуги, условие (0.4) исчезает, а условие (0.3) превращается в однородное условие Неймана.

Поток пропорционален ширине дуги и градиенту решения. Однако не это является главной причиной введения в рассмотрение ширины дуги. Оказывается, конечномерное уравнение (0.1), заданное в трубчатой области, можно свести к одномерному (0.2), где x – натуральный параметр дуги E_j. Поэтому задачу (0.2) – (0.4) можно рассматривать как задачу Неймана для уравнения (0.1), заданного на области, являющейся объединением конечного множества трубчатых областей с диаметром d_j. Если дополнить (0.3), (0.4) начальным условием

$$u_j(x,0) = u_{0j}(x),\ u_{jt}(x,0) = u_{1j}(x), \quad \text{для всех } x \in (0, l_j), \quad (0.5)$$

то мы получим задачу Коши - Неймана для уравнения (0.1). Отметим, что данная задача ранее не рассматривалась даже в случае, когда граф G состоит из единственной дуги.

1. Редукция к абстрактной задаче

Проведем редукцию задачи (0.3) - (0.5) для уравнений (0.2) к задаче Коши

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \quad (1.1)$$

для линейного уравнения Соболевского типа второго порядка

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u. \quad (1.2)$$

Через $L_2(G)$ обозначим множество

$$L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}.$$

Множество $L_2(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Через $\mathcal{U}$ обозначим множество $\mathcal{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено условие (0.4)$\}$. Множество $\mathcal{U}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|^2_{\mathcal{U}} = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (u^2_{jx}(x) + u^2_j(x)) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0,l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит $\mathcal{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $L_2(G)$. Отождествим $L_2(G)$ со своим сопряженным, и через $\mathcal{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство к $\mathcal{U}$. Очевидно, $\mathcal{F}$ – банахово пространство, причем вложение $\mathcal{U}$ в $\mathcal{F}$ компактно.

Формулой

$$\langle Du, v\rangle = \sum_{E_j\in\mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x)v_{jx}(x) + au_j(x)v_j(x))dx,$$

где $a > 0, u, v \in \mathcal{U}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathcal{U}$. Поскольку

$$|\langle Du, v\rangle| \leq C_1\|u\|_{\mathcal{U}}\|v\|_{\mathcal{U}}$$

в силу неравенства Коши - Буняковского и

$$C_2\|u\|^2_{\mathcal{U}} \leq |\langle Du, v\rangle| \leq C_3\|v\|^2_{\mathcal{U}} \tag{1.3}$$

при всех $u, v \in \mathcal{U}$ и некоторых $C_k > 0$, $k = 1,2,3$, то линейный оператор $D : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ непрерывен и инъективен. Кроме того, из первой оценки (1.3) вытекает сюръективность сопряженного оператора $D^* : \mathcal{F}^* \to \mathcal{U}^*$. В силу рефлексивности пространства $\mathcal{U}$ и самосопряженности оператора D получаем, что оператор $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ биективен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$. Поскольку вложение $\mathcal{U}$ в $\mathcal{F}$ компактно, то оператор $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ является компактным. Значит, спектр оператора D вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Теперь фиксируем $\alpha, \beta > 0$ и $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ и построим операторы

$$A = (\lambda - a)I + D,\ B_1 = \alpha((a - \lambda')I + D),\ B_0 = \beta((a - \lambda'')I + D).$$

Из сказанного следует

Теорема 1. *Операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, причем спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.*

Итак, редукция задачи (0.2) – (0.5) к задаче (1.1) – (1.2) закончена.

2. Морфология фазового пространства

Из теоремы 1 вытекает, что оператор A – фредгольмов. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов (B_0, B_1).

Лемма 1. *Пусть параметры $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, исключая случай, когда $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda' = \lambda''$. Тогда пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, причем ∞ является устранимой особой точкой A-резольвенты пучка $\vec{B}$ [5].*

Доказательство. (i) Пусть $0 \notin \sigma(A)$, тогда существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, причем операторы $A^{-1}B_1, A^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ по построению. Утверждение леммы очевидно.

Пусть $0 \in \sigma(A)$. Тогда любой вектор $\varphi \in \ker A \setminus \{0\}$ имеет вид

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l} a_k\varphi_k,\ a_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{l} |a_k| > 0,$$

где $\ker A = \text{span}\{\varphi_0, ..., \varphi_l\}$, $l = \dim\ker A$. Так как оператор A, в силу самосопряженности, фредгольмов, то, в силу теоремы 1.4.2 [6], достаточно показать отсутствие $\vec{B}$-присоединенных векторов у любого вектора $\varphi \in \ker A \setminus \{0\}$.

(ii) Пусть $\lambda \neq \lambda'$. Тогда

$$B_1\varphi = B_1(\sum_{k=1}^{l} a_k\varphi_k) = \alpha(\lambda - \lambda')\sum_{k=1}^{l} a_k\varphi_k \notin \text{im}A.$$

Значит, ни один собственный вектор оператора A не имеет относительно присоединенных векторов.

(iii) Если $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda'$, но $\lambda \neq \lambda''$, то

$$B_0\varphi = B_0(\sum_{k=1}^{l} a_k\varphi_k) = \beta(\lambda - \lambda'')\sum_{k=1}^{l} a_k\varphi_k \notin \text{im}A.$$

Следовательно, и в этом случае ни один собственный вектор оператора A не имеет относительно присоединенных векторов высоты 1. □

Замечание 1. Как нетрудно видеть, в случае $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda' = \lambda''$ пучок операторов $\vec{B}$ не будет полиномиально A-ограничен.

Замечание 2. В случаях (i) и (iii) имеет место выполнение условия

$$\int_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu = 0, \qquad (A)$$

где $\gamma = \{|\mu| = r > a\}$, a – константа из определения полиномиальной A-ограниченности. Это условие является необходимым и достаточным при построении фазового пространства. В случае (ii)

$$\int_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu \neq 0,$$

поэтому он исключается из дальнейших рассмотрений.

Определение 1. *Множество $\mathcal{P}$ называется фазовым пространством уравнения (1.2), если*

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1.2) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $u(t) \in \mathcal{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

(ii) для любых $u_0, u_1 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.2).

Пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения оператора D, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(G)$ функции. Построим проекторы [5]

$$P = \begin{cases} I, \ 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \ 0 \in \sigma(A); \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} I, \ 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \ 0 \in \sigma(A), \end{cases}$$

определенные на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно, и семейство M, N-функций уравнения (1.2)

$$M(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}(\mu A - B_1)e^{\mu t} d\mu =$$

$$= \sum{}' \left[\frac{\mu_k^1(\lambda - (a+\lambda_k)) + \alpha(\lambda' - (a+\lambda_k))}{(\lambda - (a+\lambda_k))(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \frac{\mu_k^2(\lambda - (a+\lambda_k)) + \alpha(\lambda' - (a+\lambda_k))}{(\lambda - (a+\lambda_k))(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right] \times$$

$$\times \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k;$$

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} A e \mu t d\mu =$$

$$= \sum{}' \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

здесь $\sigma^A(\vec{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\}$, а $\mu_k^{1,2}$ – корни уравнения

$$(\lambda - (a+\lambda_k))\mu^2 + \alpha(\lambda' - (a+\lambda_k))\mu + \beta(\lambda'' - (a+\lambda_k)) = 0,$$

а штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = a + \lambda_k$.

Отсюда справедлива

Теорема 2. *Пусть $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и (i) $0 \notin \sigma(A)$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.2) является все пространство $\mathcal{U}$, т. е. для любых $u_0, u_1 \in \mathcal{U}$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R};\mathcal{U})$ задачи (1.1), (1.2), которое имеет вид $u(t) = M(t)u_0 + N(t)u_1$.*

(ii) $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda'$, но $\lambda \neq \lambda''$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.2) является подпространство $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0,$ при $\lambda_k = \lambda - a\}$, т.е. для любых $u_0, u_1 \in \mathcal{U}^1$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R};\mathcal{U}^1)$ задачи (1.1), (1.2), которое имеет вид $u(t) = M(t)u_0 + N(t)u_1$.

Литература

1. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. - Новосибирск, 2002. - С. 221 - 225.
3. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика. - 2005. - № 11. - С. 47 - 52.
4. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. - М.: Мир, 1977.
5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений Соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит, технологии - 2003. - Т. 8, № 4. - С. 45 - 54.
6. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений Соболевского типа высокого порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Замышляева - Челябинск, 2003.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
alzam@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 8 сентября 2008 г.