

ИССЛЕДОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МНОГОЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ю.П. Сердега, В.А. Волохов

Показаны возможности визуализации процесса исследования многозвенных механизмов с использованием компьютерных средств и современного программного обеспечения на примере программы MathCAD.

Ключевые слова: теория механизмов и машин, многозвенные механизмы, визуализация.

Рассмотрим методику составления уравнений, описывающих закон движения точек механизма на примере семизвеного механизма с применением компьютерных технологий и программы Mathcad [1].

Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω . Звено 3 соединено с кривошипом 1 шатуном 2 и может поворачиваться относительно оси O_3 . В точке D к шатуну шарнирно присоединен *второй контур* механизма в виде звена 4 с ползуном на конце, который может перемещаться по наклонной направляющей (рис. 1). Пусть заданы длины всех звеньев: L_1 , L_2 , L_3 и L_4 . Задан угол наклона направляющей ползуна – β , а также координаты второй неподвижной точки механизма – O_3 (x_3 , y_3) и точка пересечения направляющей ползуна звена 4 с осью $X - X_n$.

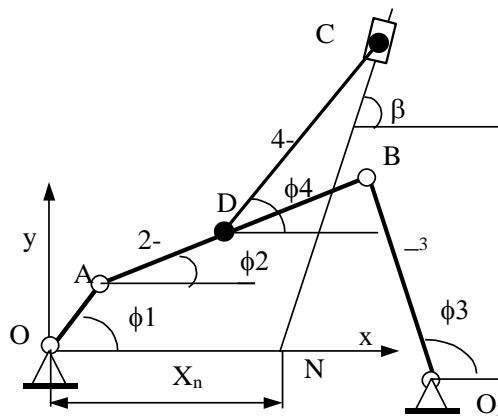


Рис. 1. Семизвеноый механизм

Для описания движения данного механизма необходимо задать:

- **длины звеньев механизма, совершающего плоскопараллельное движение;**
- **координаты неподвижных точек механизма;**
- **угол наклона и положение направляющей для тел, совершающих поступательное движение;**
- **закон движения ведущего звена.**

Положение звеньев механизма и их углы наклона к горизонту зависят как от угла ведущего звена – ϕ_1 , так и от ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 . Причем углы: ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 однозначно определяются углом ведущего звена – ϕ_1 , но явно через него не выражаются. Для определения углов: ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 в функции угла ϕ_1 составим систему уравнений, связывающих координаты точек В и С с углами наклона звеньев механизма. Как видно из рис. 1, координаты точек, принадлежащие одновременно двум телам механизма, выражаются следующими зависимостями:

$x_b = l_1 \cdot \cos(\phi_1) + l_2 \cdot \cos(\phi_2)$	$x_b = x_1 + l_3 \cdot \cos(\phi_3)$
$y_b = l_1 \cdot \sin(\phi_1) + l_2 \cdot \sin(\phi_2)$	$y_b = y_1 + l_3 \cdot \sin(\phi_3)$
$x_d = l_1 \cdot \cos(\phi_1) + l_4 \cdot \cos(\phi_2)$	$y_d = l_1 \cdot \sin(\phi_1) + l_4 \cdot \sin(\phi_2)$
$x_c = x_d + l_4 \cdot \cos(\phi_4)$	$y_c = y_d + l_4 \cdot \sin(\phi_4)$
Кроме того, из рисунка очевидно, что	$y_c = (x_c - x_n) \cdot \tan(\beta)$

Замечание. Так как угол наклона направляющей β может быть острым, тупым, или равным 90° , а при $\beta=90^\circ$ функция $\text{tg}(\beta)$ *терпит разрыв*, то при составлении уравнений, связывающих углы наклона звеньев механизма, необходимо это учитывать и координаты точки С выразить следующим образом:

1)	– при $\beta=0$ $y_c = y_n$;
2)	– при $\beta=\pi/2$ $x_c = x_n$;
3)	– при $0 < \beta < \pi$ $y_c = (x_c - x_n) \cdot \tan(\beta)$.

При составлении уравнений необходимо соблюдать также следующее:

- число составляемых для механизма уравнений должно соответствовать числу тел, совершающих плоскопараллельное движение;
- углы наклона подвижных звеньев механизма следует замерять от положительного направления оси х.

Итак, в нашем случае три уравнения, однозначно определяющие углы ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 , являются уравнения координат: x_b , y_b и x_c :

$$\begin{aligned} l_1 \cdot \cos(\phi_1) + l_2 \cdot \cos(\phi_2) &= x_1 + l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_1 \cdot \sin(\phi_1) + l_2 \cdot \sin(\phi_2) &= y_1 + l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ l_1 \cdot \cos(\phi_1) + l_d \cdot \cos(\phi_2) + l_4 \cdot \cos(\phi_4) &= x_n + \frac{l_1 \cdot \sin(\phi_1) + l_d \cdot \sin(\phi_2) + l_4 \cdot \sin(\phi_4)}{\tan(\beta)} \end{aligned}$$

Естественно, разрешить эту систему уравнений относительно ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 аналитическим путем не удастся. Поэтому определим значения этих углов численным методом, записав систему уравнений и используя вычислительный блок системы Mathcad, как показано ниже.

Алгоритм расчета углов наклона звеньев многозвенника в Mathcad.

<p>Длины звеньев механизма: $l_1 := 0.4, l_2 := 2, l_3 := 1.5, l_4 := 2, l_d := 1.$ Координаты второй неподвижной точки механизма O1: $x_1 := 2, y_1 := -1,$ и точка пересечения направляющей ползуна с осью x $x_n := 0.5.$ Угол наклона направляющей ползуна: $\beta := \frac{\pi}{3}.$</p>
<p>Введем первое приближение неизвестным: $\phi_2 := .1 \cdot \pi, \phi_3 := .4 \cdot \pi, \phi_4 := \pi \cdot 0.5.$ Введем дискретную переменную i и выразим текущее значение угла ϕ_1: $N := 720, i := 0..N, \phi_{1_i} := \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i.$</p>
<p>Given $l_1 \cdot \cos(\phi_1) + l_2 \cdot \cos(\phi_2) = x_1 + l_3 \cdot \cos(\phi_3)$ $l_1 \cdot \sin(\phi_1) + l_2 \cdot \sin(\phi_2) = y_1 + l_3 \cdot \sin(\phi_3)$ $l_1 \cdot \sin(\phi_1) + l_d \cdot \sin(\phi_2) + l_4 \cdot \sin(\phi_4) = (l_1 \cdot \cos(\phi_1) + l_d \cdot \cos(\phi_2) + l_4 \cdot \cos(\phi_4) - x_n) \cdot \tan(\beta)$</p>
<p>Найдем углы для частного значения ϕ_1: $\left(\begin{array}{c} \phi_{2_i} \\ \phi_{3_i} \\ \phi_{4_i} \end{array} \right) := \text{FricFac}(\phi_{1_i}).$</p>

Представим координаты точек в векторной форме:

$$A(i) := l_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_{1i}) \\ \sin(\phi_{1i}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ld(i) := ld \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_{2i}) \\ \sin(\phi_{2i}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L2(i) := l_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_{2i}) \\ \sin(\phi_{2i}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L3(i) := l_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_{3i}) \\ \sin(\phi_{3i}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L4(i) := l_4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_{4i}) \\ \sin(\phi_{4i}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} B(i) &:= A(i) + L2(i), \\ D(i) &:= A(i) + Ld(i), \\ C(i) &:= D(i) + L4(i). \end{aligned}$$

Замечание. Для наглядного представления исследуемого механизма с помощью графического редактора, необходимо математически описать **создание контуров звеньев механизма и его точек**. Для этого будет введена еще одна переменная – s , принимающая всего два значения: 0 и 1.

Выразим радиус-векторы звеньев АВ, AD, DC и ОВ в начальном положении и создадим контуры точек и звеньев, которые определятся из выражений:

$$\begin{aligned} AB &:= L2(n), & AD &:= Ld(n), & OB &:= L3(n), & DC &:= L4(n). \\ A2 &:= A(n), & B2 &:= A2 + AB, & D2 &:= A2 + AD, & C2 &:= D2 + DC. \\ oa_s &:= A2 \cdot s, & ab_s &:= A2 + AB \cdot s, & bo1_s &:= O1 + OB \cdot s, & dc_s &:= D2 + DC \cdot s. \end{aligned}$$

Mathcad позволяет численным методом находить углы наклона звеньев механизма, а графический редактор Mathcad построит траекторию движения всех точек механизма, а также контуры его звеньев, если отложить по координатным осям проекции индексных переменных векторов.

Для построения траекторий движения всех точек механизма, а также контуров его звеньев, достаточно вызвать двухмерный график графического редактора **Mathcad** и отложить по горизонтальной оси проекции векторов с индексом 0, а по вертикальной оси – с индексом 1, как показано на рис. 2.

По отклонению траектории движения точки **С** от прямой можно оценить **погрешность численного метода**. При этом, точность расчета легко поднять, уменьшая шаг дискретной переменной. Поскольку механизм **может иметь** несколько сборок, то при расчете численным методом **крайне важно задать неизвестным первые приближения близкие к действительным значениям**. Чтобы более точно задать начальное значение углов наклона всех звеньев механизма, следует **прорисовать положение всех звеньев механизма при начальном положении входного звена**. Выполнить это следует только лишь **для начального положения механизма**, что однозначно определит сборку механизма. Кроме того, возможности

графического редактора Mathcad позволяют наглядно представить механизм и траектории его точек в зависимости *от сборки*, которую Mathcad определит и представит в зависимости от углов наклона его звеньев, заданных при расчете в первом приближении, что и показано на рис. 3. Если угловая скорость ведущего звена задана, то угловые скорости и ускорения всех звеньев механизма будут однозначно зависеть от угла поворота ведущего (входного) звена, но для их расчета воспользуемся дискретными значениями углов наклона звеньев, найденными выше численным методом.

Если угловая скорость ведущего звена задана, то угловые скорости и ускорения всех звеньев механизма будут однозначно зависеть от угла поворота ведущего (входного) звена, но для их расчета воспользуемся дискретными значениями углов наклона звеньев, найденными выше численным методом. *Угловые скорости и ускорения звеньев механизма* определим по приближенным формулам, приняв, что последнее для заданного цикла значение переменной и последующее за ним изменяются плавно. Хотя расчет угловых скоростей и ускорений звеньев произведен по приближенным формулам, но погрешность расчета, не превышает нескольких долей %, а точность расчета повышается с уменьшением шага дискретной переменной.

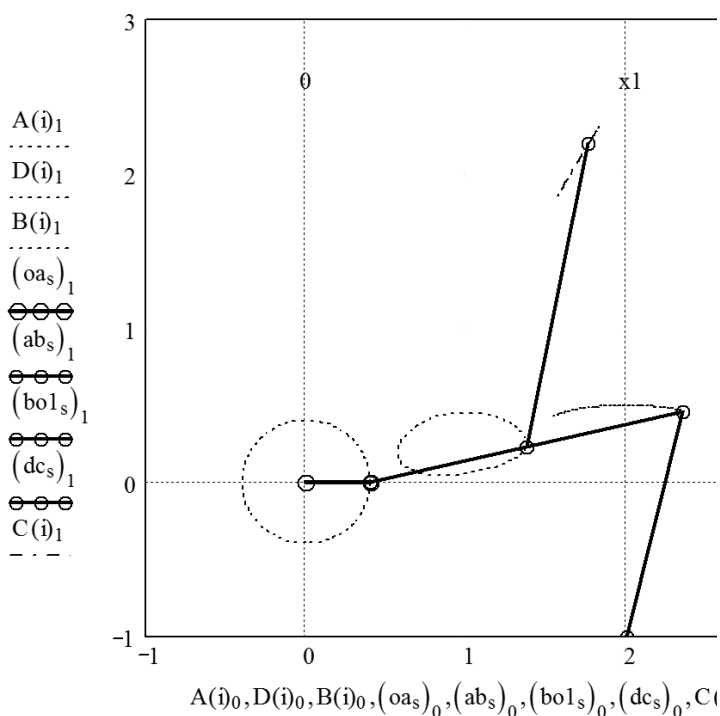


Рис. 2. Представление траекторий движения точек механизма и контуров его звеньев в MATHCAD

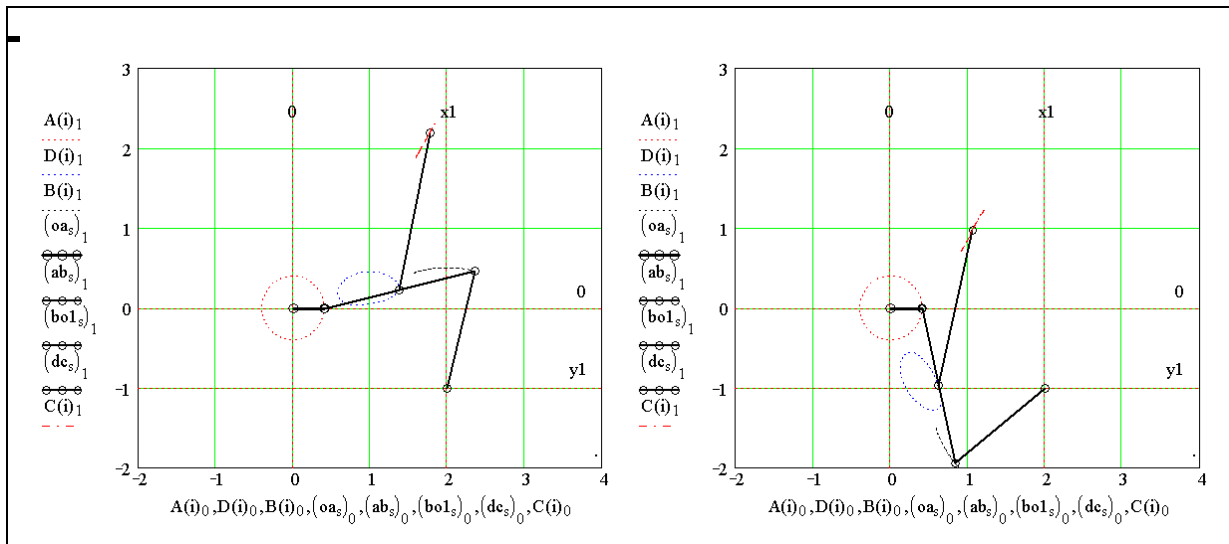


Рис. 3. Две возможные сборки семизвенного механизма

$$\begin{aligned} \phi_{2N+1} &:= \phi_{21}, & \phi_{3N+1} &:= \phi_{31}, & \phi_{4N+1} &:= \phi_{41}, \\ \omega_{2i} &:= \frac{\phi_{2i+1} - \phi_{2i}}{\Delta\tau}, & \omega_{3i} &:= \frac{\phi_{3i+1} - \phi_{3i}}{\Delta\tau}, & \omega_{4i} &:= \frac{\phi_{4i+1} - \phi_{4i}}{\Delta\tau}, \\ \omega_{2N+1} &:= \omega_{21}, & \omega_{3N+1} &:= \omega_{31}, & \omega_{4N+1} &:= \omega_{41}, \\ \varepsilon_{2(i)} &:= \frac{\omega_{2i+1} - \omega_{2i}}{\Delta\tau}, & \varepsilon_{3(i)} &:= \frac{\omega_{3i+1} - \omega_{3i}}{\Delta\tau}, & \varepsilon_{4(i)} &:= \frac{\omega_{4i+1} - \omega_{4i}}{\Delta\tau}. \end{aligned}$$

При этом дискретный шаг изменения времени – $\Delta\tau := \frac{2 \cdot \pi}{N \cdot \omega_1}$.

На рис. 4. приведены закономерности, дающие наглядное представление об изменении угловых скоростей и ускорений звеньев механизма за цикл вращения ведущего (входного) звена.

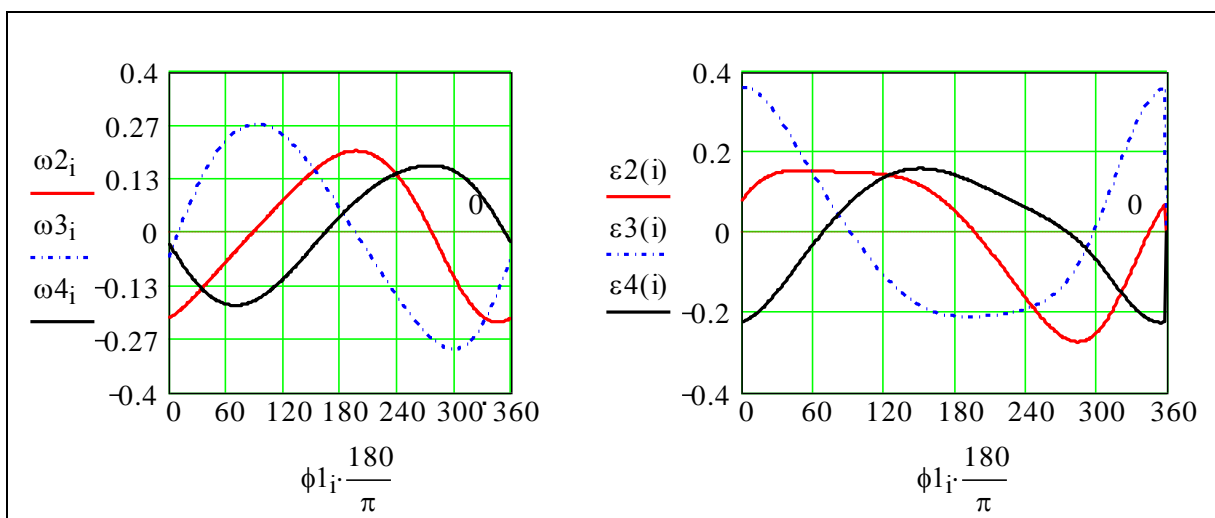


Рис. 4. Изменение угловых скоростей и ускорений звеньев механизма

Mathcad представляет уникальную возможность определения линейных скоростей и ускорений любой точки механизма сразу, как **по модулю**, так и **в проекциях** на оси координат, но для этого необходимо использовать **векторную форму представления геометрических и кинематических параметров**. Учитывая, что найденные угловые скорости и ускорения звеньев механизма являются проекциями соответствующих векторов на ось z, выразим эти вектора в форме **вектор столбца** с тремя элементами.

$$\omega_a(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_2(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{2i} \end{pmatrix}, \quad \Omega_3(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{3i} \end{pmatrix}, \quad \Omega_4(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{4i} \end{pmatrix},$$

$$E_2(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{2(i)} \end{pmatrix}, \quad E_3(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{3(i)} \end{pmatrix}, \quad E_4(i) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{4(i)} \end{pmatrix}.$$

Тогда **линейную скорость** любой точки механизма относительно полюса можно представить как векторное произведение угловой скорости звена на его радиус-вектор относительно этого полюса, а **абсолютную линейную скорость** любой точки механизма необходимо представлять в виде векторной суммы скорости полюса и скорости точки звена относительно этого полюса.

$$V_a(i) := \omega_a(i) \times A(i), \quad V_{da}(i) := \Omega_2(i) \times L_d(i), \quad V_d(i) := V_a(i) + V_{da}(i),$$

$$V_b(i) := \Omega_3(i) \times L_3(i), \quad V_{cd}(i) := \Omega_4(i) \times L_4(i), \quad V_c(i) := V_d(i) + V_{cd}(i).$$

Аналогично, в виде векторной суммы представим **линейные ускорения** точек механизма: ускорения полюса, плюс векторное произведение углового ускорения звена на радиус-вектор точки относительно выбранного полюса (вращательное ускорение), плюс векторное произведение угловой скорости звена на линейную скорость точки относительно выбранного полюса – (центростремительное ускорение). Так, например, для точек В, С и D полные ускорения через вращательное и центростремительное будут иметь вид:

$$W_a(i) := \omega_a(i) \times V_a(i), \quad W_b(i) := E_3(i) \times L_3(i) + \Omega_3(i) \times V_b(i),$$

$$W_d(i) := W_a(i) + E_2(i) \times L_d(i) + \Omega_2(i) \times V_{da}(i),$$

$$W_c(i) := W_d(i) + E_4(i) \times L_4(i) + \Omega_4(i) \times V_{cd}(i).$$

Проекции ускорений точек C и D в на ось x (переменная с индексом 0) и на y (с индексом 1):

$$\begin{aligned} W_{dx(i)} &:= W_d(i)_0, & W_{dy(i)} &:= W_d(i)_1, \\ W_{cx(i)} &:= W_c(i)_0, & W_{cy(i)} &:= W_c(i)_1. \end{aligned}$$

На рис. 5а и рис. 5в представлены скорости и ускорения точек C и D в проекциях на оси, рассчитанные и построенные в системе Mathcad.

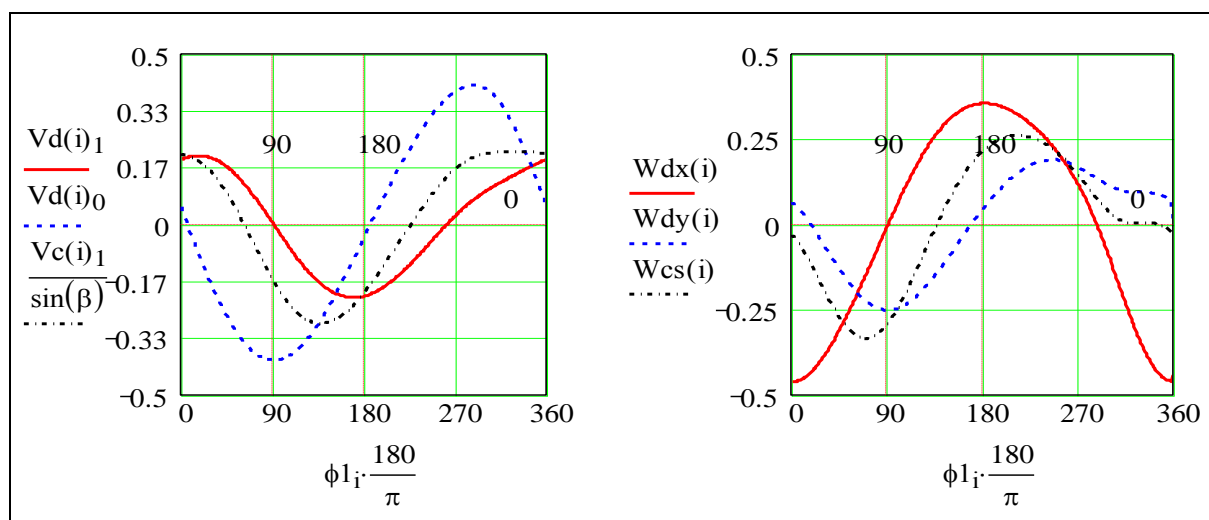


Рис. 5. Изменение линейных скоростей и ускорений точек механизма

Если математически описать контуры векторов линейных скоростей и ускорений точек механизма, то с помощью системы **Mathcad** возможно не только определить линейные скорости и ускорения любой точки механизма, но и представить контуры этих векторов, а также оценить плавность изменения кинематических параметров, воспользовавшись их векторной формой представления.

Методику визуализации решения задач кинематики многозвенных механизмов в системе Mathcad с применением графики, в том числе и анимационной, поясним на рассмотренном примере, позволяющей наглядно представить:

- **положение отдельных тел в определенный момент времени;**
- **траектории движения заданных точек механизма;**
- **анимацию механизма и контуров векторов заданных точек.**

Алгоритм «оживления» механизма его тел и заданных точек предполагает выполнение следующих этапов:

- а) создание контуров точек механизма и их траекторий;
- б) создание контуров звеньев механизма и заданных контуров векторов;

с) вызов объектов анимации в проекциях для изображения их в графическом редакторе системы Mathcad.

Создание анимационного клипа, воспроизводящего движение механизма его тел и точек, осуществляется через меню системы: «Вид», «Анимация».

В окне меню системы Mathcad необходимо указать число фрагментов анимации, затем выделить область документа вместе с объектами, созданными в графическом редакторе, и «щелкнуть» по кнопке «Анимация». После создания видео клипа, необходимо его сохранить в виде файла, присвоив ему имя.

Ниже, на примере семизвенного механизма (рис. 1), рассмотрен алгоритм создания анимационного клипа в системе Mathcad. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω . Звено 3 соединено с кривошипом 1 шатуном 2 и может поворачиваться относительно оси O_1 . В точке D к шатуну шарнирно присоединен второй контур механизма в виде звена 4 с ползуном на конце, который, если оживить решение задачи, будет перемещаться по наклонной направляющей. Алгоритму создания анимационного клипа должен предшествовать алгоритм расчета кинематических параметров механизма с использованием Mathcad, в котором необходимо задать исходные данные механизма, а также временной интервал исследования t_0 . Чтобы проиллюстрировать влияние на кинематику механизма исходных данных, изменим одну лишь координату оси качания звена 3 – x_1 , присвоив ей новое значение – $x_1 = 2,9$ м.

Пример создания анимационного клипа в системе Mathcad по задаче «Семизвенный механизм»

Следуя порядку, изложенному выше, составить алгоритм анимации. Ниже представлен алгоритм **создания контуров звеньев**, а также **контуров** векторов скоростей или ускорений в виде, в котором он реализован в системе Mathcad.

Анимация! - FRAME

Зададим число фрагментов анимации: $\text{Fra} := 72$

Тогда фрагментная переменная - n
должна принимать следующие значения $n := \frac{N}{\text{Fra}} \cdot \text{FRAME}$

Введем новую дискретную переменную $s := 0..1$

Выразим радиус-векторы звеньев AB, AD, DC и OB для конкретного фрагмента и создадим контуры точек и звеньев.

Отметим, что контур звена можно создать, если принять за начало координаты фрагментной точки и прибавить значение вектора, помноженное на s, которое принимает два значения: 0 и 1.

$$\begin{aligned}
 AB &:= L2(n), & AD &:= Ld(n), & OB &:= L3(n), & DC &:= L4(n). \\
 A2 &:= A(n), & B2 &:= A2 + AB, & D2 &:= A2 + AD, & C2 &:= D2 + DC. \\
 oa_s &:= A2 \cdot s, & ab_s &:= A2 + AB \cdot s, & bo1_s &:= O1 + OB \cdot s, & dc_s &:= D2 + DC \cdot s.
 \end{aligned}$$

Создадим контуры векторов скоростей точек, используя для наглядности масштабный коэффициент – K_v .

Построим траектории движения всех точек механизма, а также контуры звеньев и векторов ускорений в графическом редакторе Mathcad (рис. 6).

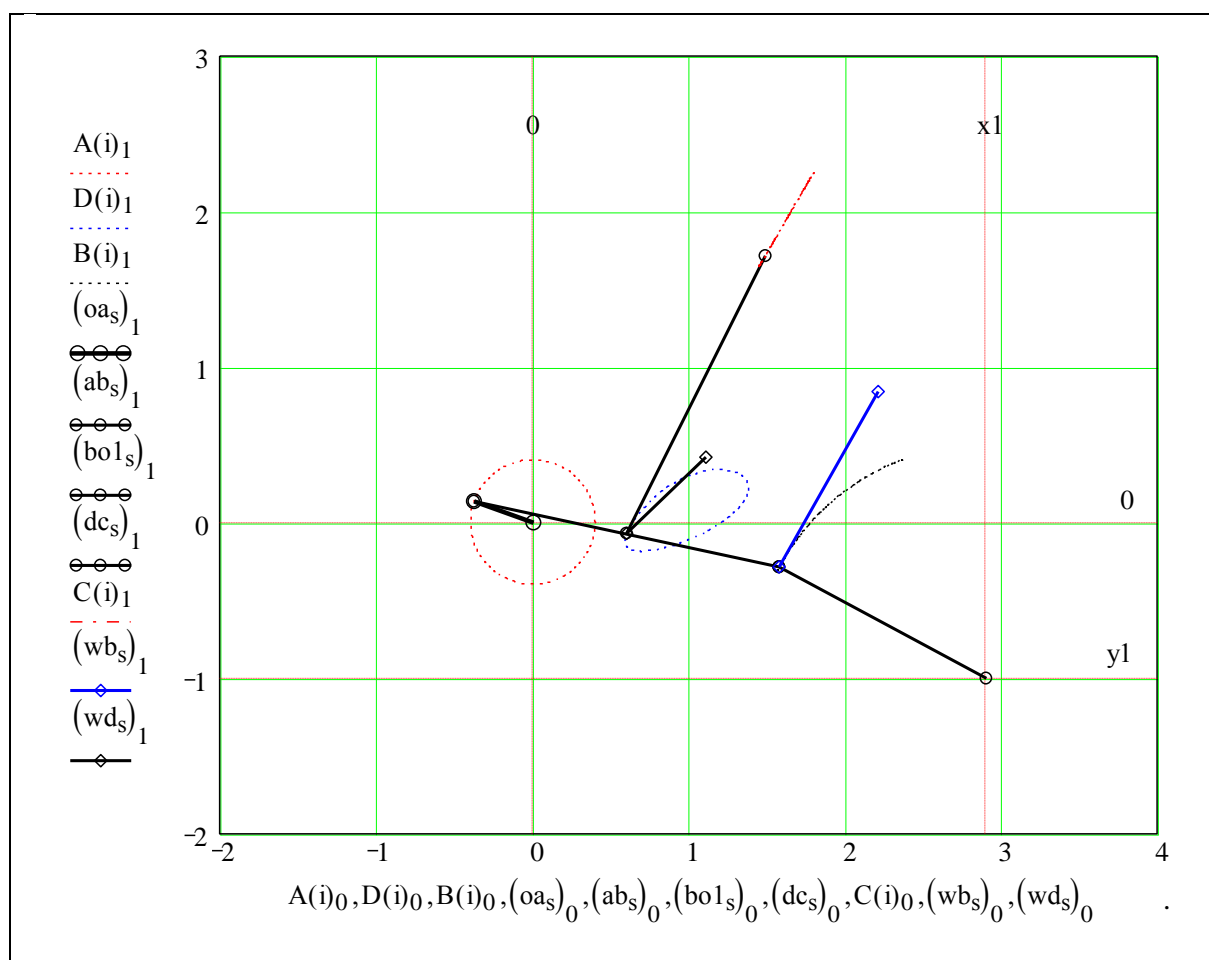


Рис. 6. Кадр видео клипа семизвенного механизма при $\phi_1 = 150^\circ$

Аналогично создаются контуры векторов ускорений точек, используя масштабный коэффициент – K_u . Отметим, что контуры векторов скоростей и ускорений обозначены другими символами, отличающимися от символов самих векторов скоростей и ускорений, и которые предстанут в кадре, если отложить по осям проекции векторов с индексом 0 по x и с индексом 1 по y (рис. 6).

$$\begin{array}{lll} Ku := 1 & wa_s := A2 + Wa(n) \cdot s \cdot Ku & wd_s := D2 + Wd(n) \cdot s \cdot Ku \\ & wb_s := B(n) + Wb(n) \cdot s \cdot Ku & wc_s := C(n) + Wc(n) \cdot s \cdot Ku \end{array}$$

Библиографический список

1. Дьяконов, В.П. Mathcad 7 в математике, физике и в Internet / В.П. Дьяконов, И.В. Абраменкова. – М.: Нолидж, 1999. – 345 с.