УДК 62-51

ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБРАТНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В РАДИОНАВИГАЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Д.В. Иванеев

Рассмотрены вопросы использования задачи фильтрации оценки параметров и сопровождения сигнала, как обратной некорректной задачи и возможности ее решения с помощью методов регуляризации. На основе анализа установлено, что задача редукции сигнала (обратная некорректная задача) является перспективным направлением в радионавигации и может позволить получить уменьшение погрешности при измерении радионавигационных параметров летательного объекта и повышения разрешения близко летящих целей.

Ключевые слова: задача редукции, обратные, некорректные задачи, регуляризация.

В радиотехнике при определении параметров сигналов чаще отдают предпочтение методам, основанным на постобработке массива информации о поведении сигнала, например, методы адаптации, компенсации локальных сигналов-помех, методы, использующие собственные значения и векторы симметрично ковариационной матрицы, теоретико-информационные методы и т.д. Эти методы решают некоторые задачи повышения помехоустойчивости и добиваются значительных результатов. Но эти методы имеют существенный недостаток: они не могут дать оценку потенциальной возможности разработанной аппаратуры в пределах точности параметров сигнала, то есть используют принцип «что сделали, то и получили», а применяемые методы постобработки улучшают только вероятностные характеристики обрабатываемых сигналов.

Методы решения задачи редукции, основанные на определении устойчивого решения обратных некорректных задач, приближают к определению истинных параметров сигнала и определяют потенциальные возможности разработанной аппаратуры.

Измерительное устройство, будь то радиолокатор, телескоп, радиотелескоп, томограф, фотоаппарат, и т.д. характеризуется тем, что измеренный сигнал содержит близкие максимумы, которые слабо разрешены. А слабые максимумы, вследствие наложения шума, невозможно определить. Это обусловлено тем, что аппаратная функция, которая, например, в радиотехнике в большей степени является диаграммой направленности, не имеет бесконечно узкую форму, а имеет некоторую ширину и тем, что на всю систему в целом действуют помехи различной природы.

Варианты задачи редукции в радионавигации. Постановка задачи

Для математической обработки, при условии f – результат измерений, а y– искомая, неизвестная функция, характерно следующее соотношение:

$$f = Ay,$$

где A – математический оператор (например, обратная матрица, а в случае обработки сигналов – система линейных или линейно-нелинейных алгебраических уравнений).

Тогда обратная задача будет иметь вид:

$$y = A^{-1} f. \tag{1}$$

На практике обратная задача может принять вид интегрального, дифференциального уравнения, системы линейных алгебраических уравнений, системы линейно-нелинейных алгебраических уравнений и так далее. Но чаще всего такие задачи описывают интегральным уравнением Фредгольма I рода:

$$\int_a^b A(x,s)y(s)ds = f(x), c \le x \le d, \tag{2}$$

где $A(x,s)$ – ядро; $f(x)$– выходной сигнал; $y(s)$ – искомая функция (входной сигнал); x и s – параметры (линейные или угловые координаты, время, температура, частота и так далее); c и d– область измерения $f(x)$, a и b область поиска $y(s)$.

Уравнение (2)применяют в спектрометрии, а также для разрешения протяженных сигналов, при моделировании распада клеток и так далее [1].

Существует как минимум три подхода постановки некорректной задачи в радионавигации.

Первый подход предполагает априорные сведения об аппаратной функции, при этом задача радионавигации рассматривается, как:

$$\begin{cases} V = A_1^{-1} V_{\text{изм}} \\ \theta = A_2^{-1} \theta_{\text{изм}} \\ R = A_3^{-1} R_{\text{изм}} \end{cases}, \tag{3}$$

где $V_{\text{изм}}, \theta_{\text{изм}}, R_{\text{изм}}$ – измеренные радионавигационные параметры (скорость, азимут и дальность, соответственно); V, θ, R– истинные радионавигационные параметры; A_1, A_2, A_3 – аппаратные функции.

С учетом ошибок, которые возникают при измерении сигнала уравнение (3) примет вид:

$$\begin{cases} V = A_1^{-1} V_{\text{изм}} + \Delta V \\ \theta = A_2^{-1} \theta_{\text{изм}} + \Delta \theta \,. \\ R = A_3^{-1} R_{\text{изм}} + \Delta R \end{cases} \tag{4}$$

Если принять, что модель прохождения радиосигнала описывается одномерным интегральным уравнением Фредгольма первого рода типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x-s) y(s) ds = f(x), \tag{5}$$

где $f(x)$– измеренное значение сигнала; $y\,(x)$ – истинное значение сигнала;

$A(x–s)$ – аппаратная функция, тогда решение (5) по методу регуляризации Тихонова будет иметь вид [1]:

$$\begin{cases} V_{\alpha\text{ист}}(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\widehat{A}_1(-\omega)\widehat{V}_{\text{изм}}(\omega)}{\left|\widehat{A}_1(-\omega)\right|^2 + \alpha|\omega|^{2p}} e^{-j\omega x} d\omega \\ \theta_{\alpha\text{ист}}(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\widehat{A}_2(-\omega)\widehat{\theta}_{\text{изм}}(\omega)}{\left|\widehat{A}_2(-\omega)\right|^2 + \alpha|\omega|^{2p}} e^{-j\omega x} d\omega, \\ R_{\alpha\text{ист}}(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\widehat{A}_3(-\omega)\widehat{R}_{\text{изм}}(\omega)}{\left|\widehat{A}_3(-\omega)\right|^2 + \alpha|\omega|^{2p}} e^{-j\omega x} d\omega \end{cases}$$

где $V_{\alpha\text{ист}}(x), \theta_{\alpha\text{ист}}(x), R_{\alpha\text{ист}}(x)$ – приближенное истинное значение;

$\widehat{V}_{\text{изм}}(\omega), \widehat{\theta}_{\text{изм}}(\omega), \widehat{R}_{\text{изм}}(\omega)$ – Фурье-образы $V_{\text{изм}}(x), \theta_{\text{изм}}(x), R_{\text{изм}}(x)$;

$\widehat{A}_1(-\omega), \widehat{A}_2(-\omega), \widehat{A}_2(-\omega)$ – Фурье-образы аппаратных функций;

$\alpha,\ p$ – параметры регуляризации.

Второй подход предполагает определение параметров V, θ, R любым известным методом (методом Андерсона, Фроста, методами адаптации и т.д.) при этом вместо аппаратной функции будет использоваться некоторая модель ее замещающая

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} A\left(x, x_i\right) y_i\left(x\right) + \delta f, \tag{6}$$

где x – параметр обработки (угол, скорость и т.д.);

$A\left(x, x_i\right)$ – некоторая модель, замещающая аппаратную функцию.

В этом случае получается система линейных алгебраических уравнений, которую можно решать обобщенными методами редукции с использованием методов регуляризации [1].

Третий подход предполагает определение параметров V, θ, R, выполняя обработку сигналов с использованием критерия максимального правдоподобия[2],[3]. В итоге задача сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, которые решают с помощью методов регуляризации.

В качестве примера решения некорректной задачи можно привести задачу вычисления преобразования Фурье:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{i\omega t} dt, -\infty < t < \infty, \tag{7}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} dt, -\infty < \omega < \infty, \tag{8}$$

где $Y(\omega)$ – прямое непрерывное преобразование Фурье, а$y(t)$ – обратное непрерывное преобразование Фурье.

Пусть имеется функция, для которой необходимо выполнять прямое преобразование Фурье по формуле (7):

$$y(t) = \frac{\sin(\omega_z t)}{\omega_z t}. \tag{9}$$

Подставив в (7) получается:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_z t)}{\omega_z t} e^{i\omega t} dt. \tag{10}$$

Аналитически решая уравнение (10), находят спектр:

$$|Y(\omega)| = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_z}, \omega \in (-\omega_z, \omega_z) \\ 0, \omega \notin (-\omega_z, \omega_z) \\ \frac{\pi}{2\omega_z}, \omega = \pm\omega_z \end{cases}.$$

Преобразование Фурье является некорректной (неустойчивой) задачей, так как связана с уравнением Фредгольма первого рода, хотя неустойчивость несколько сглаживается, потому что это уравнение решают аналитически.

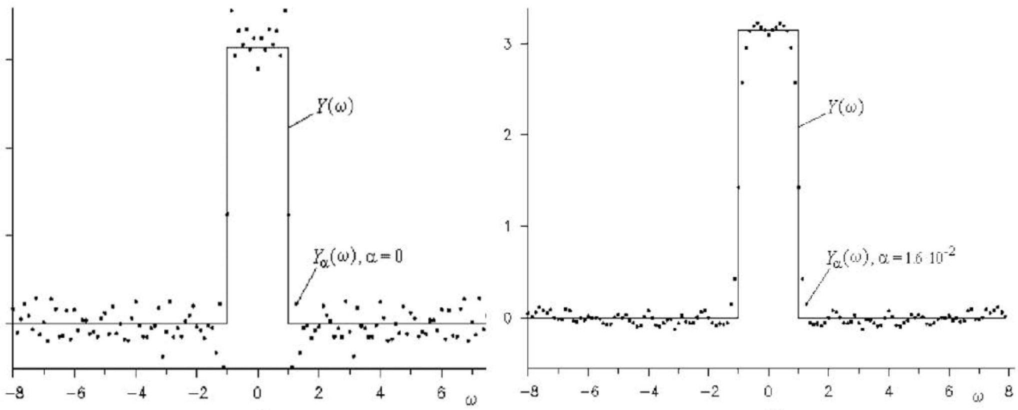
В [4] приводится вывод регуляризированной формулы для нахождения преобразования Фурье на основе метода регуляризации Тихонова.

В общем виде формула имеет вид:

$$Y_\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{1 + \alpha t^{2n}} e^{i\omega t} dt, \tag{11}$$

где $f(t,\alpha)=\dfrac{1}{1+\alpha t^{2n}}$ – стабилизирующий коэффициент, подавляющий высокие частоты [4]; α, n – параметры регуляризации.

На рис. показан пример регуляризированного преобразования Фурье.



а) б)

Выполнение преобразования Фурье (а) и его регуляризация (б)

Из рис. а видно, что вместо $Y(\omega)$ в виде прямоугольника получается окно с осцилляциями $Y_\alpha(\omega)$. И при $\alpha=0$ (без регуляризации) возникает эффект Гиббса. Если использовать регуляризированную формулу $Y_\alpha(\omega)$ при $\alpha=1{,}6\cdot10^{-2}$, то подавляются те отсчеты, которые вносят наибольшие погрешности и уменьшается погрешность вычислений (1б). Таким образом, регуляризация уменьшает погрешность вычисления $Y(\omega)$ (а значит, увеличивается соотношение сигнал/шум) в несколько раз. Причина этого в том, что слагаемое $\alpha\cdot t^{kn}$ в (11) подавляет умеренно дальние отсчеты в $y(t)$, чьи погрешности вносит наибольший вклад в $Y_\alpha(\omega)$. Метод регуляризации Тихонова является идейным продолжением метода наименьших квадратов (дающий псевдорешение) и метода псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза (дающий нормальное решение) [5].

Метод регуляризации Тихонова решается посредством неопределенных множителей Лагранжа:

$$\|Ay-f\|_{L_2}^2+\alpha\|y\|_{L_2}^2=\min_y, \qquad (12)$$

где $\alpha>0$ – параметр регуляризации, играющий роль неопределенного множителя Лагранжа. Если $\alpha=0$, то метод переходит в метод наименьших квадратов с малой невязкой $\|Ay-f\|$ и большой неустойчивостью. С увеличением α решение становится более гладким, но невязка увеличивается. Поэтому подбирая α, можно приблизиться к приемлемой невязке, и решение будет приемлемо устойчивым.

Из (12) вытекает:

$$\left(\alpha E + A^* A\right) y_\alpha = A^* f, \tag{13}$$

где E – единичный оператор.

Существует способы подбора α,три из которых представлены в [1]. В более общем виде метод регуляризации Тихонова можно записать:

$$\left\| Ay - f \right\|_{L_2}^2 + \alpha \left\| y - \psi \right\|_{L_2}^2 = \min_y, \tag{14}$$

где ψ – математическое ожидание или начальное приближение.

Применительно к интегральному уравнению Фредгольма Iрода:

$$Ay \equiv \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x), \quad c \le x \le d,$$

$$\alpha y_\alpha(t) + \int_a^b R(t,s) y_\alpha(s) ds = F(t), \quad a \le t \le b,$$

где:

$$R(t,s) = R(s,t) = \int_c^d K(x,t) K(x,s) dx,$$

$$F(t) = \int_c^d K(x,t) f(x) dx.$$

Для уравнения Фредгольма Iрода типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) y(s) ds = f(x), \ -\infty \le x \le \infty, \tag{15}$$

решение можно найти с помощью метода преобразовании Фурье и затем регуляризировать найденное решение.

Исходя из [1] аналитическое решение (15) примет вид обратного преобразования Фурье:

$$y(\mathrm{s}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i\omega s} d\omega,$$

в котором:

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{\lambda(\omega)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{i\omega x} dx}.$$

Регуляризированное решение находится из условия минимума сглаживающего функционала (14):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[Ay-f(x)\right]^2dx+\alpha\int_{-\infty}^{\infty}M(\omega)\left|Y(\omega)\right|^2dx=\min_y, \qquad (16)$$

где $M(\omega)=|\omega|\lambda q,$ где $q\geq 0.$

Из (16) получается регуляризированное решение:

$$y_\alpha(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(-\omega)F(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}e^{-i\omega s}d\omega,$$

где $L(\omega)=\left|\lambda(\omega)\right|^2$.

При выборе q следует учесть, что чем больше это значение, тем сильнее подавляются высокие гармоники, а при выборе параметра регуляризации α использовать уже существующие алгоритмы, такие как метод невязки, метод подбора и т.д.

Метод регуляризации Тихонова является идеальным инструментом для нахождения квазиустойчивого решения некорректных задач с точки зрения сложности алгоритмов и точности. Также не требует большого количества априорных сведений (только значения погрешностей и иногда математическое ожидание ψ), в отличие от метода оптимальной фильтрации Калмана–Бьюси. Поэтому фильтр Калмана относят к методам статистической регуляризации наравне с фильтром Винера. Оптимальный фильтр Калмана требует априорное знание о ковариации ошибок, а также матожидания правых частей.

Таким образом, если существует физическая задача, то ее необходимо свести к интегральному уравнению Фредгольма. Затем решать ее с помощью методов регуляризации.

Выводы

Подводя итог, можно сказать, что решение прикладных задач как некорректных задач интересно, в первую очередь, своей оригинальностью. Несмотря на то, что об обратных задачах (некорректных задачах) знают уже больше ста лет, практическое применение они находят только с недавнего времени, когда нашли способ устойчивого решения с применением методов регуляризации.

На сегодняшний день, когда вычислительная мощность процессоров не ограничивает конструкторов в разработке сложных алгоритмов, необходимо усовершенствовать методы регуляризации и искать новые подходы для улучшения качества обработки сигналов, изображений и т.д. Поэтому необходимость применения обратных задач для обработки сигналов в радионавигации наряду с классическими методами авторы представленной статьи считают обоснованным и актуальным.

Библиографический список

1. Сизиков, В.С. Математические методы обработки результатов измерений / В.С. Сизиков. – СПб: Политехника, 2001. – 240 с.

2. Курикша, А.В. Применение методов решения некорректных задач для синтеза алгоритмов повышения разрешающей способности в радиолокации: дис. … канд. техн. наук / А.В. Курикша. – М., 2006. – 92 с.

3. Плохута, П.А. Исследование методов решения некорректных задач многосигнальной радиопеленгации на одной частоте: дис. … канд. техн. наук / П.А. Плохута. – М., 2009. – 162 с.

4. Сизиков, В.С. Использование регуляризации для устойчивого вычисления преобразования Фурье / В.С. Сизиков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 3. – С. 376–386.

5. Тихонов, А.Н., Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – 2-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 283 с.