

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И ЕЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Г. А. Закирова, А. И. Седов

AN INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR LAPLACE OPERATOR AND IT'S APPROXIMATE SOLUTION

G.A. Zakirova, A.I. Sedov

Исследуются обратные спектральные задачи для математических моделей с оператором Лапласа. Построен алгоритм численного нахождения приближенного решения.

Ключевые слова: оператор Лапласа, обратная спектральная задача, приближенное решение

The authors consider inverse spectral problems for mathematical models with Laplace operator. They obtain a numerical algorithm for the approximate solution founding.

Keywords: Laplace operator, inverse spectral problem, approximate solution

Введение

Пусть

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \dots, N\}, a_j > 0.$$

В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим дискретный самосопряженный оператор T_\circ , определенный краевой задачей Дирихле

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\partial\Pi$ — граница Π .

В настоящей работе исследуется обратная задача для степени оператора T_\circ , порожденного краевой задачей (1). Основным методом исследования является так называемый резольвентный метод, теоретически обоснованный в работах [1, 2]. Применяя идеи этого метода, мы доказываем теоремы существования решения поставленной обратной задачи. Впервые рассматривается случай, когда оператор Лапласа имеет непростой спектр. В работе также описывается процедура численного нахождения приближенного решения.

Отметим, что обратные спектральные задачи в различных постановках играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют множество приложений в естествознании. Большинство работ в этом направлении связаны с обыкновенными дифференциальными операторами. Что касается операторов в частных производных, то здесь, в основном, рассматривается степень оператора Лапласа с простым спектром. Так, в работах [1 - 6] решена обратная задача для степени оператора Лапласа больше 2 на прямоугольнике. В работах [7 - 8] поставленная задача решена для степени больше 3/2, в работах [9 - 10] - для степени больше единицы. Обратная задача для оператора Лапласа с кратным спектром ранее не исследовалась.

1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, являющийся степенью оператора T_0 , где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0 , $\beta \geq 1$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Очевидно, спектр $\sigma(T)$ оператора T неединственный. Иногда, для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \dots, m_N)}$ оператора T и связанные с ними спектральные объекты одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность ν_t собственного числа λ_t , т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_j}$.

Пусть P — оператор умножения на вещественную функцию $p \in L_2(\Pi)$, называемую потенциалом.

Обозначим через μ_t собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через u_t — соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа.

Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$, близкая к спектру оператора T . При различных степенях $\beta \geq 1$ требуется доказать существование оператора P , такого что спектр $\sigma(T + P)$ совпадает с последовательностью $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$.

2. Основные спектральные тождества

Сформулируем вспомогательные утверждения, на которых базируется доказательства основных результатов данной статьи. Доказательства самих вспомогательных утверждений приведены в работе [11].

Обозначим:

$$R_0(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}, \quad R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1};$$

$$a_t = \left\{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda = \frac{\lambda_{t+1} + \lambda_t}{2} \right\}, \quad \Gamma_t = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in a_t \}, \quad \gamma_t = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_t - \lambda| = r_0 \},$$

$$r_t = \frac{1}{2} \min\{ \lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1} \}, \quad r_0 = \inf_t r_t;$$

$$\Omega_t = \{ \lambda : |\lambda_t - \lambda| \geq r_0 \}, \quad \Omega = \bigcap_{t=1}^\infty \Omega_t, \quad V = \prod_{j=1}^n a_j.$$

Лемма 1.

Если $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, то оператор $T + P$ — дискретен, причем

(i) если $R_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, то $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, $1 \leq q < \infty$,

(ii) если $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, то $\mu_t^s \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, $s = \overline{1, \nu_t}$, ν_t — кратность собственного числа λ_t .

Теорема 1. Если $\beta \geq N/2$, $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, то для любого $t \in \mathbb{N}$ имеет место спектральное тождество:

$$\sum_{s=1}^{\nu_t} \mu_t^{(s)} = \nu_t \lambda_t - \sum_{s=1}^{\nu_t} (P v_t^{(s)}, v_t^{(s)}) + \alpha_t(p), \tag{2}$$

$$\text{где } \alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_t}} \lambda \operatorname{Sp} \left[R(\lambda) (P R_0(\lambda))^2 \right] d\lambda.$$

3. Степень оператора Лапласа с потенциалом на N-мерном параллелепипеде

В данном разделе доказывается теорема существования решения обратной спектральной задачи для оператора Лапласа на многомерном параллелепипеде. Приводятся условия, налагаемые на произвольную последовательность, при соблюдении которых спектр возмущенного оператора будет совпадать с данной последовательностью.

Лемма 2.

Если $\beta > \frac{3N}{4}$, то ряд $\sum_{t=1}^{\infty} r_t^2 \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4$ сходится.

Если $\beta > N$, то ряд $\sum_{t=1}^{\infty} r_t \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2$ сходится.

Обозначим сумму первого ряда через s^2 , а второго через s_{∞} .

Основные результаты данного раздела выражают следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $\beta > \frac{3N}{4}$, $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{s\sqrt{2N}}\})$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

где $\omega = \sqrt{2^N} sr < 1$, то существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$ такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_t^k, \tag{3}$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$.

Теорема 3. Пусть $\beta > N$, $r < \min\{r_0, \frac{1}{s_{\infty} 2^N}\}$, $\omega = 2^N s_{\infty} r$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$2^N \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t| < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

то существует потенциал $p \in L_{\infty}(\Pi)$, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_t^k, \tag{4}$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$.

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2^{N+q}}{V}} \prod_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right),$$

где $m = (m_1, \dots, m_N)$, $m_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, q – число ненулевых индексов в мультииндексе m . При $m_j \in \mathbb{N}$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами так же, как и систему $\{v_m\}$, т.е. в соответствии с нумерацией собственных чисел λ_t^k .

Лемма 3. Множества M вещественных $p \in L_2(\Pi)$, обладающих следующими свойствами:

$$p(a_1 - x_1, x_2, \dots, x_N) = p(x_1, a_2 - x_2, \dots, x_N) = \dots = p(x_1, x_2, \dots, a_N - x_N) = p(x_1, x_2, \dots, x_N) \text{ для почти всех } (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Pi, \quad (5)$$

$$(p, \varphi_m) = 0, \text{ при } \prod_{j=1}^N m_j = 0, m_j = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

$$\|p\|_{L_2} \leq \frac{r}{2}. \quad (7)$$

замкнуто в $L_2(\Pi)$.

Лемма 4. Если $\|P_j\| \leq r/2, 0 < r \leq r_0, j = 1, 2$, то

$$|\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)| \leq rr_t \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим уравнение относительно p :

$$p = \alpha_0 - \alpha(p), \quad (8)$$

где

$$\alpha_0 = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} (\xi_t^k - \lambda_t) \varphi_t^k, \quad (9)$$

$$\alpha(p) = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\alpha_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k. \quad (10)$$

Из вида уравнения следует, что решение удовлетворяет свойствам (5) и (6).

Введем оператор $A : L_2(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi)$, определяемый равенством: $Ap = \alpha_0 - \alpha(p)$.

Так как $\|Ap\|_{L_2} \leq \|\alpha_0\| + \|\alpha(p)\| \leq \frac{r}{2}(1 - \omega) + \frac{r}{2}\omega = \frac{r}{2}$, то оператор A отображает замкнутый шар $U(0, \frac{r}{2})$ в себя. Можно показать, что пересечение данного шара с множеством функций, удовлетворяющих свойствам (5) и (6), замкнутое множество. Используя лемму (4) покажем, что оператор A сжимающий в этом подпространстве.

$$\|Ap_1 - Ap_2\|_{L_2} = \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\| = \sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{|\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)|^2}{\nu_t} \right)^{1/2} \leq$$

$$\sqrt{2^N} r \|p_1 - p_2\|_{L_2} = \omega \|p_1 - p_2\|_{L_2}.$$

По принципу С.Банаха уравнение (8) имеет единственное решение p .

Определим оператор P , действующий в $L_2(\Pi)$, следующим образом: $Pv(x) = p(x)v(x)$, где p — решение уравнения (8). Оператор $T + P$ дискретный, и его собственные числа μ_m также можно занумеровать одним нижним и одним верхним индексами. Покажем, что решение p и есть искомый потенциал.

Умножим скалярно уравнение (8) на функции φ_t^k и просуммируем по $k = \overline{1, \nu_t}$. Получим

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} (p, \varphi_t^k) = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k - \nu_t \lambda_t - (-1)^N \sqrt{2^N V} \alpha_t(p). \quad (И)$$

Используя свойства (5)-(6), преобразуем

$$(Pv_m, v_m) = \frac{2^N}{V} \int_{\Pi} p(x_1, \dots, x_N) \prod_{j=1}^N \sin^2\left(\frac{\pi m_j x_j}{a_j}\right) dx_1 \dots dx_N =$$

$$\frac{(-1)^N}{V} \int_{\Pi} p(x_1, \dots, x_N) \prod_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right) dx_1 \dots dx_N = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2^N V}} (p, \varphi_m).$$

Отсюда, учитывая кратность

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} (Pv_t^k, v_t^k) = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2^N V}} \sum_{k=1}^{\nu_t} (p, \varphi_t^k). \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12) и сравнивая с (2), получаем (3). □

Замечание 1. Оператор $T + P$, обладающий свойством (3), неединственен.

Действительно, достаточно поменять местами два члена последовательности $\{\xi_t^k\}_{t=1}^{\infty}$, попадающих в одну сумму $\sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2$, и мы получим другую последовательность $\{\tilde{\xi}_t^k\}_{t=1}^{\infty}$.

Объединим в один класс P все операторы, спектр которых обладает свойством (3). Если мы не будем различать представителей этого класса, то можем говорить о единственности решения обратной задачи.

4. Возмущенный оператор Лапласа с неядерной резольвентой на N -мерном параллелепипеде

Как уже говорилось во введении, чаще всего в обратных задачах рассматривается степень оператора Лапласа, так как в данном случае мы будем иметь ядерную резольвенту. Но в приложениях более важную роль играет сам оператор Лапласа, а не его степени. С помощью специально подобранных аналитических функций в работе [12] удалось получить результат для оператора Лапласа с простым спектром, но формулировался он не для самих собственных чисел, а для значений введенных функций, зависящих от собственных чисел. В данной работе полученный результат обобщен на случай кратного спектра.

Пусть функции $f_t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ таковы, что $f_t(\lambda_n) = \delta_{tn}$, где δ_{tn} – символ Кронекера и пусть $\beta_t = \sup_{\text{Re } \lambda > 0} (|\lambda|^2 \cdot |f_t(\lambda)|) < \infty$. Введем функции $g_t(\lambda) = \int_0^\lambda f_t(z) dz$.
 Можно показать, что функции

$$f_t(\lambda) = A_t \left(\frac{e^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right)^2 \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda} e^{-\lambda_k}) \right) \left(\prod_{k=1, k \neq t}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda} \right), \text{Re } \lambda > 0,$$

где нормирующие множители A_t выбраны из условия $f_t(\lambda_t) = 1$, $t \in \mathbb{N}$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Теорема 4. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^{(k)}\}$ существует подпоследовательность $\{c_t\} \subset \{a_t\}$ такая, что выполняются следующие неравенства:

$$(i) \omega = 2^{N-1} r_0 \max_{\lambda \in \Omega} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta_t}{c_t} < 1,$$

$$(ii) 2^N \sum_{t=1}^{\infty} \left| \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} (g_t(\xi_j^{(k)}) - g_t(\lambda_j)) \right| < \frac{r_0}{2}(1 - \omega),$$

то существует потенциал p , такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\mu_j^{(k)}) = \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\xi_j^{(k)}).$$

Доказательство этой теоремы основывается на тех же идеях, что и теорема(2)

5. Степень оператора Лапласа с потенциалом на равнобедренном прямоугольном треугольнике

В данном разделе впервые рассматривается непрямоугольная область.

Пусть $K = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq \pi\}$. В пространстве $L_2(K)$ рассмотрим дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор T_0 , порожденный краевой задачей Дирихле (1).

Введем оператор $T = \int_0^{\infty} \lambda^{\beta} dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta > 1$, $\lambda^{\beta} > 0$ при $\lambda > 0$.

Нетрудно показать, что собственным числам $\lambda_{mn} = (m^2 + n^2)^{\beta}$ оператора T соответствуют собственные функции $v_{mn} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin mx \sin ny - \sin nx \sin my)$, $m > n > 0$, образующие ортонормированный базис в $L_2(K)$.

Положим:

- 1) $s_{\Delta} = \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} r_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} \max_{\lambda \in \gamma_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 + \frac{1}{2^{2k+1}} r_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} \max_{\lambda \in \gamma_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right);$
- 2) $0 < r_{\Delta} < \min\left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}s_{\Delta}}; r_0 \right\};$
- 3) $\phi_{mn} = \frac{2}{\pi} (\cos mx \cos ny + \cos nx \cos my)$, $m, n = 0, 1, \dots$

Теорема 5. Пусть $\beta > 2$, $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{3\sqrt{2}s_{\Delta}}\})$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_{mn}\}$ выполняется неравенство:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m>n>0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (\xi_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} - \lambda_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}) - \frac{1}{2^{2k+1}} (\xi_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} - \lambda_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}) \right| < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

где $\omega = 3\sqrt{2}s_{\Delta}r < 1$, то существует функция $p \in L_{\infty}(K)$ такая, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m^2+n^2=\lambda_t} (\mu_{mn} - \frac{1}{2}\mu_{m+n, m-n}) = \sum_{m^2+n^2=\lambda_t} (\xi_{mn} - \frac{1}{2}\xi_{m+n, m-n}), \tag{4.1}$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_{mn}\}$.

6. Численные расчеты

В этом разделе описывается процедура получения приближенного решения обратной спектральной задачи. Для этого используется основное уравнение, приведенное в процессе

доказательства теоремы (2) существования решения обратной задачи. Для простоты ограничимся изложением двумерного случая.

Поставим задачу найти приближенное решение, существование которого показано в теореме (2).

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_{mn}(x) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b}.$$

При $m, n > 0$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами в соответствии с нумерацией собственных чисел λ_t^k .

Уравнение $p = \alpha_0 - \alpha(p)$, где

$$\alpha_0 = \sqrt{ab} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} (\xi_t^k - \lambda_t^k) \varphi_t^k, \quad \alpha(p) = \sqrt{ab} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\alpha_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k,$$

$$\alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}\left[\sum_{k=2}^{\infty} R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda,$$

имеет единственное решение p .

Найти его можно методом последовательных приближений.

Пусть $p_0 \equiv 0$, тогда $p_{t+1} = \alpha_0 - \alpha(p_t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_t = p$.

Найдем приближенное решение \tilde{p} .

$\tilde{p} = \alpha_0 - \tilde{\alpha}(\alpha_0)$, где

$$\tilde{\alpha}(p) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\tilde{\alpha}_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k, \quad \tilde{\alpha}_t(p) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_t^{(k)}(p),$$

здесь

$\alpha_t^{(k)}$ — k -тая поправка теории возмущений:

$$\alpha_t^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp} \left[R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k \right] d\lambda = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i k} \int_{\gamma_t} \operatorname{Sp}[PR_0(\lambda)]^k d\lambda.$$

Оценим разности k -х поправок, $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} |\alpha_t^{(k)}(p) - \alpha_t^{(k)}(p_1)| &= \frac{1}{2\pi k} \left| \int_{\gamma_t} \operatorname{Sp} \left[(PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k \right] d\lambda \right| \leq \\ &\frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left\| (PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k \right\|_1 \leq \\ &\frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left\| \sum_{s=0}^{k-1} (P_1R_0(\lambda))^s (P - P_1)R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^{k-s-1} \right\|_1 = \\ &\frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \|P - P_1\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right) = \\ &r_t \|P - P_1\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left(\|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right). \end{aligned}$$

Здесь P_1 — оператор умножения на p_1 , т.е. на α_0 . Далее оценим модуль разности:

$$|\alpha_t(p) - \alpha_t(p_1)| \leq r_t \|P - P_1\| \frac{r}{2} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|^k \leq$$

$$rr_t \|P - P_1\| \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 < rr_t (\|P\| + \|P_1\|) \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 < \frac{2r^2 r_t}{\sqrt{ab}} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

Итак,

$$|\alpha_t(p) - \tilde{\alpha}_t(\alpha_0)| < \frac{2r^2 r_t}{\sqrt{ab}} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

$$\tilde{\alpha}_t(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}[R_0(\lambda)(P_1 R_0(\lambda))^2] d\lambda =$$

$$= \sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k) \cdot (\alpha_0 \varphi_j^k, \varphi_t^k)}{\lambda_t^k - \lambda_j^k} = \sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k)^2}{(\lambda_t^k - \lambda_j^k)}.$$

Таким образом, $\tilde{p} = \alpha_0 - \sqrt{ab} \sum_t (\sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k)^2}{(\lambda_t^k - \lambda_j^k)}) \varphi_t^k$.

На основе полученного результата в среде Maple 6 впервые создан программный продукт, позволяющий численно находить приближенное решение поставленной обратной задачи.

Положим для примера $a = 1$, $b = \sqrt[4]{3}$, $\beta = 5/2$, $\xi_{mn} = \lambda_{mn} + 0.0001$. Тогда приближенное решение, вычисленное по первым четырем членам последовательности $\{\xi_{mn}\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{p} = & 0.3999996438 \cos(25.13274123x) \cos(9.548376831y) + 0.4006108966 + \\ & + 0.3996028571 \cos(4.774188417y) + 0.3999774004 \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999955835 \cos(14.32256525y) + 0.3998713899 \cos(6.283185308x) + \\ & + 0.3999953594 \cos(19.09675367y) + 0.3999939656 \cos(6.283185308x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999665522 \cos(6.283185308x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.3999990308 \cos(6.283185308x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999987184 \cos(6.283185308x) \cos(14.32256525y) + 0.3999958620 \cos(12.56637062x) + \\ & + 0.4000013739 \cos(12.56637062x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.3999970936 \cos(12.56637062x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999958348 \cos(12.56637062x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.4000019328 \cos(18.84955592x) + 0.3999996560 \cos(12.56637062x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999997128 \cos(18.84955592x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.3999993495 \cos(18.84955592x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.3999984754 \cos(18.84955592x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.3999999510 \cos(18.84955592x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999999768 \cos(25.13274123x) + 0.3999999242 \cos(25.13274123x) \cos(19.09675367y) + \\ & + 0.3999998700 \cos(25.13274123x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.3999995842 \cos(25.13274123x) \cos(4.774188417y). \end{aligned}$$

Литература

1. Дубровский, В.В. К обратной задаче для степени оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. - 1990. - Т. 26, № 9. - С. 1563 - 1567.
2. Дубровский, В.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из L_2 / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. - 1992. - Т. 28, № 9. - С. 1552 - 1561.
3. Дубровский, В.В. Устойчивость решения обратных задач спектрального анализа / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный А.В. // Дифференц. уравн. - 1992. - Т. 28, № 5. - С. 839 - 843.
4. Дубровский, В.В. Теорема существования в обратной задаче спектрального анализа / В.В. Дубровский // Дифференц. уравн. - 1997. - Т. 33, № 12. - С. 1702 - 1703.
5. Дубровский, В.В. Теорема о существовании решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа / В.В. Дубровский, А.С. Великих // Электромагнитные волны L -электронные системы. - 1998. - Т. 3, № 5. - С. 6 - 9.
6. Дубровский, В.В. Обратная задача спектрального анализа и интерполяция по Л. Карлесону / В.В. Дубровский // Математические заметки. - 2001. - Т. 70, вып. 3. - С. 468 - 471.
7. Садовничий, В.А. Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // Докл. Акад. наук. - 1999. - Т. 367, № 3. - С. 307 - 309.
8. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // Дифференц. уравн. - 2000. - Т. 36, № 12. - С. 1695 - 1698.
9. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, В.В. Дубровский (мл.) // Докл. Акад. наук. - 2001. - Т. 377, № 3. - С. 310 - 312.
10. О восстановлении потенциала в обратной задаче спектрального анализа / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, В.В. Дубровский (мл.), Е.А. Пузанкова // Докл. Акад. наук. - 2001. - Т. 380, № 4. - С. 462 - 464.
11. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестн. СамГУ, Естественнонаучная серия. - 2008. - № 2(61). - С. 34 - 42.
12. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов, В.В. Дубровский // Электромагнитные волны & электронные системы. - 2005 - Т. 10, № 1 - 2. - С. 1 - 8.

Кафедра математического анализа,
Магнитогорский государственный университет
zakirova81@mail.ru

Поступила в редакцию 22 сентября 2008 г.