На правах рукописи

Каргаполов Андрей Валерьевич

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург 2012

Работа выполенена в ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет"(НИУ) на кафедре алгебры.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент, Алеев Рифхат Жалялович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
доцент, Ревин Данила Олегович

кандидат физико-математических наук,
Маслова Наталья Владимировна

Ведущая организация: Челябинский государственный университет

Защита состоится 22 мая 2012 года в 15.30 часов на заседании специализированного совета Д 004.006.03 в Институте математики и механики УрО РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16).

Автореферат разослан   апреля 2012 года

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук   И. Н. Белоусов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию вопроса о центральных единицах групповых колец знакопеременных групп.

Групповые кольца — естественный и важный объект современных алгебраических исследований. Результаты, относящиеся к групповым кольцам, широко используются не только во многих разделах алгебры, но и в других разделах математики, например, в топологии. В теории групповых колец можно выделить два основных направления: исследования кольцевой структуры и исследование мультипликативной структуры. Данное исследование в основном касается второго направления, то есть изучаются группы единиц (обратимых элементов) групповых колец.

Сначала вопросы мультипликативной структуры колец рассматривались для колец целых элементов полей алгебраических чисел. Например, теорема Дирихле о группах единиц колец целых полей алгебраических чисел, результаты Синнота о группах единиц колец целых абелевых полей (полей с абелевой группой Галуа над полем рациональных чисел). Хигман исследовал группы обратимых элементов групповых колец над конечными алгебраическими расширениями кольца целых чисел.

Классическим объектом исследований в теории групповых колец являются целочисленные групповые кольца конечных групп. Интерес к таким кольцам связан с тем, что именно для них наиболее ярко проявляются самые важные характеристики групповых колец конечных групп. Если рассматривать групповые алгебры над полями характеристики 0, то классическая теория представлений сводит их изучение к матричным кольцам над телами.

Так как группа центральных единиц совпадает с центром группы всех единиц, то получение информации об этой группе является важной задачей при исследовании группы всех единиц. Дополнительную значимость этому придает тот факт, что в большинстве случаев на центре заканчивается верхний центральный ряд группы единиц. Кроме того, полные описания групп всех единиц целочисленных групповых колец получены лишь для некоторых групп небольших порядков.

В мультипликативной теории групповых колец можно выделить две основные области исследований: построение подгрупп единиц, имеющих определенные свойства (свобода, центральность, конечность индекса и др.), и выяснение свойств групп всех единиц.

Цель работы. Целями данной работы являются вычисление рангов групп центральных единиц для как можно бóльших степеней знакопеременных групп, вывод приближенных формул для рангов и полное описание группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопреременной группы степени 14, что является первым примером полного описания в случае ранга большего 1.

Методы исследования. В исследовании применяются методы теории конечных групп, теории характеров, теории чисел и компьютерной алгебры. Для вычислений используется компьютерная система GAP и разработанные автором программы на Java и C++.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми и снабжены полными доказательствами.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертации позволяют в группах центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп:

- находить центральные единицы;
- строить подгруппы конечного индекса;
- находить ранги групп центральных единиц;
- полностью описывать группы центральных единиц таких колец.

В работе также впервые дано полное описание группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы степени 14 (первый случай, когда ранг не равен 1).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на VII Международной школе-конференции посвященой 60-летию А.С. Кондратьева (г. Челябинск, 2008), на Международной молодежной школе - конференции "Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей"(г. Новосибирск, 2010), на 40 и 41 молодежной школе-конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (г. Екатеринбург, 2009, 2010), на I, II и III научной конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ (г. Челябинск, 2009, 2010, 2011). По результатом работы автор неоднократно выступал на городском алгебраическом семинаре (г. Челябинск, 2008-2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [19]- [26].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, библиографии и приложений. Она изложена на 87 страницах, библиография содержит 26 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава
"Предварительные сведения и результаты"

В этой главе содержатся необходимые определения, обозначения и результаты, которые используются в последующих главах.

Вторая глава
"Вычисление рангов $U(Z(\mathbf{Z}A_n))$"

Данная глава посвящена разработке алгоритмов для поиска рангов. Во всех алгоритмах используются разбиения натуральных чисел.

Определение. *Разбиением* натурального числа n называется всякая конечная невозрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_r$, для которой $\sum_{i=1}^{r} a_i = n$. Числа a_i называются *частями* разбиения.

Связь рангов с разбиениями следует из результата Ферраза:

Лемма 1. *Ранг группы $U(Z(\mathbf{Z}A_n))$ равен числу разбиений $a = (a_1, \ldots, a_m)$ натурального числа n, удовлетворяющих следующим свойствам:*

(1) a_i *нечетно при* $1 \leq i \leq m$;

(2) $a_i \neq a_j$ *при* $i \neq j$;

(3) $n \equiv m \pmod 4$;

(4) $\prod_{i=1}^{m} a_i$ *не является квадратом натурального числа.*

В первом параграфе приводится параллельный переборный алгоритм. Перебор подвергнут жесткой оптимизации: перебираются только разбиения, удовлетворяющие условиям (1)–(3) леммы 1, проверка условия (4) выполняется с помощью битовых операций над степенями простых чисел в разложении элементов разбиения вместо непосредственного произведения чисел. Эти оптимизации и успешное распределение вычислений между узлами кластера позволили вычислить ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп A_n до $n = 800$, что значительно больше, чем удавалось ранее ($n = 240$).

Во втором параграфе описывается алгоритм, активно использующий оперативную память для сохранения промежуточных результатов. Этот алгоритм называется улучшенным, он позволяет вычислить ранги для знакопеременной группы большей степени, но его сложнее распараллелить, поэтому в диссертации он последовательный.

Количество разбиений, удовлетворяющих условиям (1)–(3) леммы 1, обозначается $r_{(mod\ 4)}(n)$, а число разбиений, удовлетворяющих условиям (1)–(3), но не удволетворяющее условию (4) — $squares(n)$ (сами разбиения при этом обозначаются $a_s(n)$). Количество разбиений, удовлетворяющих всем условиям, обозначается $rank(n)$.

Приводится рекурсивный алгоритм $R4Count$ для вычисления $r_{(mod\ 4)}(n)$, а также доказывается теорема о его корректности и вычислительной сложности.

Теорема 1. *Алгоритм $R4Count$ корректен. Получение значения $r_{(\mathrm{mod}\ 4)}(n)$ требует $O(n^2)$ операций.*

Такая вычислительная сложность позволяет вычислить значения $r_{(\mathrm{mod}\ 4)}(n)$ для достаточно больших n. Бо́льшую сложность составляет вычисление $squares(n)$ (алгоритм $SquaresCount$).

После того как была предпринята попытка посчитать разбиения, элементы которых в произведении являются квадратом натурального числа, а не наоборот, удалось записать необходимые условия, невыполнение которых позволяет сузить перебор.

В диссертации доказывается 3 таких условия.

Лемма 2. *В разложении элементов $a_s(n)$ на простые множители отсутствуют простые числа p в нечетной степени такие, что $p > n/4$.*

Лемма 3. *Количество разбиений n на положительные нечетные слагаемые, произведение которых делится на простые числа $p_1, \ldots, p_l$, равно нулю, если $\sum_{i=1}^{l} p_i > n$.*

Следующее условие более общее, и именно оно используется в алгоритме вычисления рангов.

Лемма 4. *Количество разбиений n на положительные нечетные слагаемые не ménьшие, чем k, произведение которых делится на простые числа $p_1, \ldots, p_l$, равно нулю, если*

$$\min_P \sum P_j > n,$$

где P — это разбиение $p_1, \ldots, p_l$ на непересекающиеся подмножества, а P_j — минимальное нечетное число такое, что содержит все простые числа j-го подмножества в качестве делителей и $P_j \geq k$.

Приводится эффективный алгоритм $MinimumSum$ для проверки условия леммы 4 с использованием динамического программирования.

В конце второй главы приводится алгоритм вычисления $squares(n)$ и $rank(n)$, а также посчитанные ранги до $n = 1000$.

Третья глава
"Приближенные формулы для рангов $U\left(Z\left(\mathbf{Z}A_n\right)\right)$"

Данная глава посвящена доказательству различных формул для количества разбиений, которые помогут в подсчете рангов $U\left(Z\left(\mathbf{Z}A_n\right)\right)$.

Сначала приводится рекуррентная точная формула для $r_{\pmod 4}(n)$:

$$R\left(n, k, shift\right) = R\left(n-k, k+2, \left(shift+1-k\right) \pmod 4\right) +$$

$$+R\left(n, k+2, shift\right),$$

где $R\left(0, *, 0\right) = 1$, $1 \leq k \leq n$, $k \equiv 1 \pmod 2$, $0 \leq shift < 4$.

Чтобы узнать $r_{\pmod 4}(n)$ нужно вычислить значение $R(n, 1, 0)$, то есть

$$r_{\pmod 4}\left(n\right) = R\left(n, 1, 0\right).$$

Затем для $r(n)$:

$$nr\left(n\right) = \sum_{j=1}^{n} \sigma'\left(j\right) r\left(n-j\right),$$

где

$$\sigma'(n) = \sum_{\substack{i=0 \\ (2i+1)m=n \\ m\in N}}^{2i+1\leq n} (-1)^{m+1}(2i+1)$$

На основе интегральной теоремы Коши доказывается асимптотическая формула для $r(n)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *При $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$r(n) \backsim \frac{e^{\pi\lambda_n/\sqrt{6}}}{2\sqrt[4]{24}\lambda_n^{3/2}},$$

где $\lambda_n = \left(n - \frac{1}{24}\right)^{1/2}$.

Данные формулы не позволяют точно вычислить ранг $U(Z(\mathbf{Z}A_n))$, но они позволяют вычислить его приближенно. Кроме того, из вычислительных экспериментов следует, что для рангов выполняются следующие предположения.

Предположение 1. *При $n \to \infty$ имеет место формула*

$$r_{\pmod 4}(n) \backsim r(n)/2.$$

Предположение 2. *При $n \to \infty$ имеет место формула*

$$rank(n) \backsim r_{\pmod 4}(n) \backsim \frac{e^{\pi\sqrt{n/6}}}{4\sqrt[4]{24n^3}}.$$

В конце третьей главы приводится сравнение приближенно вычисленных рангов с точными значениями. Все значения дают хорошее приближение к $rank(n)$.

Четвертая глава
“Построение $U(Z(\mathbf{Z}A_n))$”

В четвертой главе впервые проводится исследование случая, когда ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы больше 1, а именно, получено полное описание группы центральных единиц знакопеременной группы A_{14}, ранг которой равен 3. Результаты данной главы опубликованы в работе [25].

Пусть χ — нецелый неприводимый характер группы A_n, **тогда нецелые** значения χ это $\frac{1+b\sqrt{d}}{2}$ и $\frac{1-b\sqrt{d}}{2}$, где b натурально, d свобод**но от квадратов** (О характерах полусимметрической группы §3 [10]).

Обозначение. Положим

$$w_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2},$$

$$\sigma = \frac{1+b\sqrt{d}}{2} = \frac{1-b}{2} + bw_d$$

и

$$\sigma^* = \frac{1-b\sqrt{d}}{2} = \frac{1-b}{2} + bw_d^*,$$

$$\lambda - \text{единица кольца } Z\left[b\omega_d\right],$$

$$u\left(\lambda\right) - \text{локальная единица } U(Z(ZA_n)).$$

Лемма 5. *Пусть λ — единица кольца $Z\left[b\omega_d\right]$, $u\left(\lambda\right) = \sum \gamma_i y_i$ — локальная единица $U(Z(ZA_n))$. Тогда, согласно [1]:*

$$\gamma_i = \frac{\operatorname{tr}\left(\chi\left(x_i\right)\left(\lambda-1\right)\right)}{z},$$

*где $z = \frac{|A_n|}{\deg\chi}$, y_i — **кла**ссовые суммы для классов с **представителями** x_i, γ_i — целочисленны.*

Следующая лемма позволяет вычислять нужные **для определения** $u\left(\lambda\right)$ следы на основе λ и σ.

Лемма 6. *Пусть $\lambda = \alpha + \beta\omega$, тогда*

$$\operatorname{tr}\left(\lambda-1\right) = 2\left(\alpha-1\right) + \beta,$$

$$\operatorname{tr}\left(\sigma\left(\lambda-1\right)\right) = \left(\alpha-1\right) + \frac{1+bd}{2}\beta,$$

$$\operatorname{tr}\left(\sigma^*\left(\lambda-1\right)\right) = \left(\alpha-1\right) + \frac{1-bd}{2}\beta.$$

По условию леммы 5 нужно, чтобы γ_i для всех i были целыми, поэтому можно сформулировать требование на коэффициенты α и β, при которых выполняется это условие.

Лемма 7. *$u(\lambda) \in \mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_n))$ тогда и только тогда, когда для некоторого целого t*

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \frac{z}{2}\frac{bd+1}{bd}t, \\ \beta = -\frac{z}{bd}t. \end{cases}$$

В конце четвертой главы приводится основной результат — описание группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_{14}.

Теорема 3. $U(Z(ZA_{14})) = \langle -1 \rangle \times \left\langle u_{20}(1+\omega_{13})^{3360} \right\rangle \times \left\langle u_{57}(19+8\omega_{33})^{840} \right\rangle \times \left\langle u_{59}(2+3\omega_5)^{504} \right\rangle$. *Здесь u_{20} — локальная единица, соответствующая характеру группы A_{14} степени 4752, u_{57} — локальная единица, соответствующая характеру группы A_{14} степени 29952, u_{59} — локальная единица, соответствующая характеру группы A_{14} степени 34320, $\omega_{13} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\omega_{33} = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$, $\omega_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Список литературы

[1] **Алеев Р.Ж.** Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. д-ра физ.-мат. наук / Р.Ж. Алеев. Челябинск, 2000, 355 с.

[2] **Алеев Р.Ж.** Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп / Р.Ж. Алеев // Матем. труды, 2000, том 3, № 1, с. 3–37.

[3] **Алеев Р.Ж.** Числа Хигмана конечных групп / Р.Ж. Алеев // Матем. труды, 2000, том 3, с. 3–28.

[4] **Алеев Р.Ж.** О группах центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / Р.Ж. Алеев, В.В. Соколов // Труды института математики, 2009, том 15, № 2, с. 3–11.

[5] **Боревич З.И.** Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич // Москва: Наука, 1985.

[6] **Кормен Т.** Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн // Издательский дом "Вильямс" , 2005.

[7] **Липский В.** Комбинаторика для программистов / В. Липский // Москва: Мир, 1988.

[8] **Постников А.Г.** Введение в аналитическую теорию чисел / А.Г. Постников // Москва: Наука, 1971.

[9] **Финхтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц // Т. II, Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[10] **Фробениус Г.** Теория характеров и представлений групп / Г. Фробениус // Харьков: Гос. науч.-техн. изд Украины, 1937.

[11] **Шпаковский Г.И.** Программирование для многопроцессорных систем в стандарте MPI / Г.И. Шпаковский Г.И, Н.В. Серикова // Минск: БГУ, 2002.

[12] **Эндрюс Г.** Теория разбиений / Г. Эндрюс // Москва: Наука, 1982.

[13] **Aleev R. Ž** Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers / R. Ž. Aleev // Intern. J. of Algebra and Comp., 1994, vol. 4, № 3, p. 309–358.

[14] **Ayoub R.** An introduction to the analytic theory of numbers / R. Ayoub // American mathematical society, 1963.

[15] **Ferraz R.A.** Simple components and central units in group rings / R.A. Ferraz // Journal of Algebra, 2004, vol. 279, № 1, p. 191–203.

[16] **Flajolet P.** Analytic Combinatorics / P. Flajolet, R. Sedgewick // Cambridge University Press, 2009.

[17] **GAP.** The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.2; 2004 // http://www.gap-system.org.

[18] **Rota G.C.** The number of Partitions of a Set / G.C. Rota // The American Mathematican Monthly. Huntsville: 1964, vol. 71, № 5, p. 498–504.

Работы автора по теме диссертации

[19] **Алеев Р.Ж.** Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / Р.Ж. Алеев, А.В. Каргаполов, В.В. Соколов // Фундамент. и прикл. матем. Москва: 2008, том 14, № 7, с. 15–21.

[20] **Каргаполов А.В.** Разбиения натуральных чисел и их приложения в алгебре и комбинаторике / А.В. Каргаполов // Научный поиск: материалы первой научной конференции аспирантов и докторантов. Социально-гуманитарные и естественные науки. Челябинск: ЮУрГУ, 2009, с. 39–43.

[21] **Каргаполов А.В.** Параллельный алгоритм для нахождения рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / А.В. Каргаполов // Труды 40-й Всероссийской молодежной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2009, с. 395–401.

[22] **Каргаполов А.В.** Параллельный алгоритм для нахождения рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / А.В. Каргаполов // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Сб. научных трудов. Екатеринбург: УрО РАН, 2009, № 10, с. 8–12.

[23] **Каргаполов А.В.** Приближенные формулы для рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / А.В. Каргаполов // Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2010, с. 34–40.

[24] **Каргаполов А.В.** Асимптотическая формула для рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / А.В. Каргаполов // Научный поиск: материалы второй научной конференции аспирантов и докторантов. Естественные науки. Челябинск: ЮУрГУ, 2010, с. 41–45.

[25] **Каргаполов А.В.** Группа центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы степени 14 / А.В. Каргаполов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика.». Челябинск: ЮУрГУ, 2011, № 10, с. 18–24.

[26] **Aleev R.Zh.** The ranks of central unit groups of integral group rings of alternating groups / R.Zh. Aleev, A.V. Kargapolov, V.V. Sokolov // Journal of Mathematical Sciences. New York: Springer, 2010, vol. 164, № 2, p. 163–167.