

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БАРЕНБЛАТТА - ЖЕЛТОВА - КОЧИНОЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

А. С. Шипилов

Описаны экспоненциальные дихотомии решений уравнений Баренблатта - Желтова - Кочиной, определенных на геометрическом графе.

Ключевые слова: уравнения Баренблатта - Желтова - Кочиной, геометрический граф, относительно  $p$ -ограниченные операторы, экспоненциальные дихотомии.

## Введение

Пусть  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$  – конечный связный ориентированный граф, где  $\mathfrak{V} = \{V_i\}$  – множество вершин, а  $\mathfrak{E} = \{E_j\}$  – множество ребер, причем, каждому ребру  $E_j$  сопоставлены два положительных числа  $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$ , которые удобно трактовать как длину и площадь поперечного сечения соответственно. Такой граф  $\mathbf{G}$  предложено называть *геометрическим графом* [1]. Пусть на каждом ребре  $E_i$  задано уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \alpha u_{jxx} - \beta u, \quad (0.1)$$

где производные берутся по  $x \in (0, l_i)$  и  $t \in \mathbb{R}$ . В каждой вершине  $V_i$  зададим *условия непрерывности*

$$\begin{aligned} u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \\ E_j, E_k \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i), E_m, E_n \in \mathfrak{E}^\omega(V_i), \end{aligned} \quad (0.2)$$

и *условия баланса потоков*

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in \mathfrak{E}^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \quad (0.3)$$

где через  $\mathfrak{E}^\alpha(V_i)$  и  $\mathfrak{E}^\omega(V_i)$  обозначено множество ребер, «выходящих» из вершины  $V_i$ , и, соответственно, «входящих» в вершину  $V_i$ . Физический смысл задачи (0.1) – (0.3) объяснен в [2]. Кстати сказать, термин «отсутствовать» в контексте условий непрерывности не означает «быть равным нулю». Скажем, если из вершины  $V_i$  не «выходит» ни одно ребро, то первые два равенства в (0.2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Более того, если в вершину  $V_i$  «входит» (или «выходит» из нее) только одно ребро, то условия (0.2) для этой вершины «отсутствуют».

Впервые уравнения в частных производных на геометрических графах начали изучаться в конце прошлого века в связи с моделированием процессов «реакции-диффузии» в трубчатых реакторах, а также динамики давления и влагопереноса в «тонких» областях. Первая монография [1] по классическим уравнениям на геометрических графах вышла в 2004 г. Первая статья [3], в которой рассмотрены неклассические уравнения – уравнения соболевского типа, появилась в 2002 г. Первая диссертация [4], в которой описаны фазовые пространства некоторых уравнений соболевского типа, защищена в 2005 г. В данной статье впервые исследуется устойчивость и неустойчивость (в зависимости от параметров

$\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) решений задачи (0.1) – (0.3). Статья, кроме вводной части и списка литературы, содержит два параграфа. В первом приводятся вспомогательные сведения о дихотомиях решений уравнений соболевского типа, почерпнутые из гл.7 [5], куда они попали из [6]. Во втором параграфе описываются дихотомии решений задачи (0.1) – (0.3).

## 1. Инвариантные пространства и дихотомии решений

Пусть  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{F}$  – банаховы пространства; операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ , причем, оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  (т. е.  $M$  ( $L, \sigma$ )-ограничен, и  $\infty$  – несущественная особая точка  $L$ -резольвенты оператора  $M$ ; если  $p \in \mathbb{N}$ , то  $p$  – порядок полюса в  $\infty$ , а если  $p = 0$ , то  $\infty$  – устранимая особая точка).

Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.1}$$

Вектор-функцию  $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{U})$ , удовлетворяющую ему (1.1), назовем *решением*. Решение  $u = u(t)$  уравнения (1.1), удовлетворяющее еще и начальному условию Коши

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

назовем *решением задачи* (1.1), (1.2).

**Определение 1.** Множество  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{U}$  называется фазовым пространством уравнения (1.1), если

(i) любое решение  $u = u(t)$  уравнения (1.1) лежит в  $\mathfrak{F}$  поточечно, т. е.  $u(t) \in \mathfrak{F}, \forall t \in \mathbb{R}$ ;

(ii) для любой точки  $u_0 \in \mathfrak{F}$  существует единственное решение задачи (1.1), (1.2).

Если существует оператор  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ , то фазовым пространством уравнения (1.1) служит пространство  $\mathcal{U}$ . Если оператор  $L$  необратим, в частности,  $\ker L \neq \{0\}$ , то описание фазового пространства – нетривиальная задача.

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Тогда фазовым пространством уравнения (1.1) является образ  $Im P$  проектора

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu.$$

Здесь  $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$  – правая  $L$ -резольвента оператора  $M$ , а контур  $\gamma \subset \mathbb{C}$  ограничивает область, содержащую  $L$ -спектр оператора  $M$ .

Заметим, что если оператор  $L : \mathcal{U} \rightarrow \{0\}$ , то фазовое пространство  $\mathfrak{F} = \{0\}$ , поскольку в этом случае оператор  $M$  непрерывно обратим.

**Определение 2.** Множество  $\mathcal{I} \subset \mathfrak{F}$  называется инвариантным пространством уравнения (1.1), если для любого  $u_0 \in \mathcal{I}$  решение задачи (1.1), (1.2) лежит в  $\mathcal{I}$  поточечно.

В частности, фазовое пространство является инвариантным пространством, однако обратное, вообще говоря, неверно.

**Теорема 2.** Пусть оператор  $M$  ( $L, p$ )-ограничен,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Пусть  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$  расщепляется на две компоненты  $\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M)$  так, что существует контур  $\gamma_0 \subset \mathbb{C}$ , ограничивающий область, содержащую  $\sigma_0^L(M)$ , причем,  $\gamma_0 \cap \sigma_1^L(M) = \emptyset$ .

Тогда существует инвариантное пространство  $\mathcal{I}_0$  уравнения (1.1), совпадающее с образом  $\text{Im} P_0$  проектора

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R_{\mu}^L(M) d\mu.$$

**Определение 3.** Говорят, что решения уравнения (1.1) имеют экспоненциальную дихотомию, если

(i) фазовое пространство  $\mathfrak{F}$  уравнения (1.1) расщепляется в прямую сумму двух инвариантных пространств,  $\mathfrak{F} = \mathcal{I}^s \oplus \mathcal{I}^u$ ;

(ii) существуют константы  $a, C \in \mathbb{R}_+$  такие, что при любом  $u_0 \in \mathcal{I}^s$  ( $u_0 \in \mathcal{I}^u$ ) и любом  $t \in \mathbb{R}_+$  ( $t \in \mathbb{R}_-$ )

$$\|u(t)\|_{\mathcal{U}} \leq C e^{-at} \|u_0\|_{\mathcal{U}} \quad (\|u(t)\|_{\mathcal{U}} \leq C e^{at} \|u_0\|_{\mathcal{U}}).$$

Термин «дихотомия» предполагает некоторую «раздвоенность» фазового пространства. Однако в приложениях нередко возникает ситуация, когда либо  $\mathfrak{F} = \mathcal{I}^s$ , либо  $\mathfrak{F} = \mathcal{I}^u$ . Поэтому в таких ситуациях мы будем говорить либо об экспоненциальной устойчивости решений, либо об их экспоненциальной неустойчивости соответственно.

**Теорема 3.** Пусть оператор  $M$   $(L, p)$ -ограничен, и

$$\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset. \tag{1.3}$$

Тогда если

(i)  $\sigma^L(M) \subset \{Re \mu < 0\} = \mathbb{C}_-$ , то решения уравнения (1.1) экспоненциально устойчивы.

(ii)  $\sigma^L(M) \subset \{Re \mu > 0\} = \mathbb{C}_+$ , то решения уравнения (1.1) экспоненциально неустойчивы.

(iii)  $(\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_- \neq \emptyset) \wedge (\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset) \wedge (\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset)$ , то решения уравнения (1.1) имеют экспоненциальную дихотомию.

## 2. Устойчивость и неустойчивость решений

Здесь мы редуцируем задачу (0.1) – (0.3) к уравнению (1.1), а затем применим результаты из п. 1. Для этого согласно [2], введем в рассмотрение гильбертово пространство  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(E_j)\}$  со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

и банахово пространство  $\mathcal{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(E_j) \text{ и выполнено (0.2)}\}$  с нормой

$$\|u\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Очевидно, вложение  $\mathcal{U} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$  плотно и компактно, поэтому обозначим через  $\mathfrak{F}$  сопряженное к  $\mathcal{U}$  относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  пространство.

Формулой

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx} v_{jx} dx, \quad u, v \in \mathcal{U}$$

зададим оператор  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathfrak{F})$ , чей спектр  $\sigma(A)$  неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке  $+\infty$ . Обозначим через  $\{\lambda_k\}$  собственные значения оператора  $A$ , занумерованные по убыванию с учетом кратности. Заметим, что первое собственное значение  $\lambda_1 = 0$  однократно, причем соответствующий нормированный (в смысле  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ ) собственный вектор имеет следующий вид:

$$\varphi_1 = \left( \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-\frac{1}{2}} (1, 1, \dots, 1, \dots).$$

Далее построим операторы  $\langle Lu, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle Au, v \rangle$  и  $\langle Mu, v \rangle = -\alpha \langle Au, v \rangle - \beta \langle u, v \rangle$ . По построению операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , и выполнено одно из следующих условий:

- (i) при всех  $k \in \mathbb{N}$   $\lambda \neq -\lambda_k$ ,
  - (ii) существует  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\lambda = \lambda_k$ , но  $\beta \neq \alpha\lambda$ .
- Тогда оператор  $M (L, 0)$ -ограничен.

Доказательство леммы 1 принципиально не отличается от доказательства леммы (3.1) [2]. Заметим лишь, что в данном случае  $L$ -спектр оператора  $M$  состоит из объединения точек вида

$$\mu_k = -\frac{\alpha\lambda_k + \beta}{\lambda + \lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = -\lambda_l\}. \quad (2.1)$$

Обозначим через  $\{\varphi_k\}$  множество ортонормированных (в смысле  $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ ) собственных векторов оператора  $A$ . Тогда в силу теоремы 1 справедлива

**Теорема 4.** Если выполнено условие (i) леммы 1, то фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит все пространство  $\mathcal{U}$ . Если выполнено условие (ii) леммы 1, то фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит образ проектора

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda = -\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Перейдем к изучению устойчивости решений задачи (0.1) – (0.3). Для этого потребуем, чтобы параметры  $\alpha$  и  $\beta$  были положительны, это хорошо согласуется с физическим смыслом задачи. Кроме того, положительность этих параметров обеспечивает выполнение условия  $\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ . Теперь применим теорему 3, разбив ее на четыре части для того, чтобы снабдить каждую часть некоторыми комментариями.

**Теорема 5.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}_+$ , тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит пространство  $\mathcal{U}$ , причем, решения этой задачи экспоненциально устойчивы.

Действительно, при любом  $u_0 = (u_{10}, u_{20}, \dots, u_{j0}, \dots) \in \mathcal{U}$  существует единственное решение задачи (0.1) – (0.3) с начальными данными Коши, которые здесь имеют вид

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0, l_j). \quad (2.2)$$

Решение к тому же имеет вид  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$ . Экспоненциальная устойчивость таких решений в силу теоремы 5 очевидна.

**Теорема 6.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda = 0$ . Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит множество  $\mathfrak{P} = \{u \in \mathcal{U} : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}$ , причем, решения этой задачи экспоненциально устойчивы.

Фазовое пространство находим из теоремы 4. Ввиду однократности первого собственного значения оператора  $A$  оно действительно ортогонально вектору  $\varphi_1$ . Аналогично предыдущему, решение задачи (0.1) – (0.3) при любом  $u_0 \in \mathfrak{F}$  имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x),$$

и оно, очевидно, экспоненциально устойчиво.

**Теорема 7.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda \in \mathbb{R}_- \setminus \{-\lambda_k\}$ . Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) является  $\mathfrak{U}$ , причем, решения этой задачи имеют экспоненциальную дихотомию.

Пусть  $u_0 \in \mathfrak{U}$ , тогда единственное решение задачи (0.1) – (0.3), удовлетворяющее 5, имеет вид

$$u(x, t) = \left( \sum_{\lambda_k > -\lambda} + \sum_{\lambda_k < -\lambda} \right) \exp\left(-\frac{\alpha\lambda_k + \beta}{\lambda + \lambda_k} t\right) \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x). \quad (2.3)$$

Устойчивые  $\mathfrak{J}^s$  и неустойчивые  $\mathfrak{J}^u$  инвариантные пространства ортогональны в смысле  $L_2(\mathbf{G})$ , причем,  $\mathfrak{J}^u = \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k < -\lambda\}$ , т. е. конечномерно.

**Теорема 8.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  и существует натуральное число  $l > 1$  такое, что  $\lambda = -\lambda_l$ . Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит множество  $\mathfrak{F} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle \geq 0, \lambda_k = -\lambda\}$ , причем, решения имеют экспоненциальную дихотомию.

Этот, на вид самый трудный, случай исследуется аналогично предыдущему. Инвариантные пространства здесь имеют следующий вид:  $\mathfrak{J}^s = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle \geq 0, \lambda_k \leq -\lambda\}$ ,  $\mathfrak{J}^u = \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k < -\lambda\}$ . Они, очевидно, ортогональны, причем,  $\mathfrak{J}^s \oplus \mathfrak{J}^u = \mathfrak{F}$ . Любое решение задачи (0.1) – (0.3) имеет вид 6, где  $u_0 \in \mathfrak{F}$ .

## Литература

1. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. - М.: Физматлит, 2004. - 272 с.
2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта - Желтова - Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Вестн. МАГУ. Сер. Математика - 2003. - №4. - С.129 - 139.
3. Свиридюк, Г.А. Уравнения Соболевского типа на графах. / Г.А. Свиридюк // Некласс, уравн. матем. физики - Новосибирск, 2002. - С. 221 - 225.
4. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений Соболевского типа на графах дис... канд. физ.-мат. наук / В. В. Шеметова. - Магнитогорск, 2005.
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.T. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.T. Fedorov. - Utrecht, Koln, Tokyo: VSP, 2003. - 216 p.
6. Свиридюк Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика. - 1997. - №5. - С. 60 - 68.

Кафедра математического анализа  
Южно-Уральский государственный университет  
[9226348588@mail.ru](mailto:9226348588@mail.ru)

Поступила в редакцию 5 марта 2008 г.