УДК 517.948

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В.П. Танана, А.И. Сидикова

Получена оценка для приближенного решения одной обратной задачи для параболического уравнения в частных производных.

Ключевые слова: *некорректная задача, обратная задача, параболическое уравнение*

Во многих отраслях техники встречаются процессы, связанные с нагреванием твердых тел потоками жидкости или газа. Особую роль при этом играет информация о температуре на поверхности этих тел.

Как правило, единственным способом определения этой температуры является решение граничных обратных задач для уравнений теплообмена в твердых телах по результатам измерений внутри этих тел [1].

В настоящей работе решается одна из таких задач, сформулированная в [2].

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a(x)u(x,t), \tag{1}$$

в котором $x \in [0,1]$, $t \geq 0$, $a(x) \leq 0$ и $a(x) \in C^2[0,1]$.

Предположим, что решение $u(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

и

$$u(1,t) = v(t), \qquad t \geq 0. \tag{4}$$

Граничное значение $v(t)$ на правом конце отрезка нам неизвестно, а вместо него дано значение функции $u(x,t)$ в точке $x_0 \in (0,1)$.

$$u(x_0,t) = \varphi(t), \qquad t \geq 0. \tag{5}$$

Требуется определить значение $u(t) = u(x_1,t)$, где $x_0 < x_1 < 1$. Эта задача является некорректно поставленной. Потому предположим, что при $\varphi(t) = \varphi_0(t)$, где $\varphi_0 \in W_2^1[0,\infty)$, существует решение $u(x,t)$ задачи (1–5) такое, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \in C([0,1];L_2[0,\infty))$ и

$$u(x_1,t) = u_0(t); \ t \geq 0, \tag{6}$$

такое, что, соответствующее $v_0(t) = u(1,t)$ удовлетворяет условию

$$\|v_0\|_{L_2} \leq r. \tag{7}$$

Предположим, что решение $u(x,t)$ задачи (1 – 4) при $u(1,t)=v_0(t)$ удовлетворяет условию

$$u(x_0,t)=\varphi_0(t), \qquad t\geq 0. \tag{8}$$

Пусть точное значение $\varphi_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $\varphi_\delta(t)\in L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что

$$\|\varphi_0-\varphi_\delta\|_{L_2}\leq\delta. \tag{9}$$

Требуется, используя исходные данные φ_δ, δ и r, построить приближенное решение $u_\delta(t)$ задачи (1–5) и оценить его уклонение $\|u_\delta-u_0\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t)$.

Таким образом, задача (1 – 5) неявно определяет оператор T, действующий из пространства $L_2[0,\infty)$ в $L_2[0,\infty)$, который функции $\varphi(t)$ ставит в соответствие искомое значение $u(t)=u(x_1,t)$

$$T\varphi(t)=u(t), \qquad t\geq 0. \tag{10}$$

2. Формальное сведение задачи (1 – 5) к задаче вычисления значений оператора

Для формального решения задачи (1 – 5), используем косинус F_c и синус F_s преобразования.

Умножив уравнение (1) на мнимую единицу i

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial(t)}=i\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+ia(x)u(x,t), \tag{11}$$

применим к уравнениям (1) и (11) синус и косинус преобразования, соответственно.

После чего получим

$$-\lambda F_c(u)=\frac{d^2F_s(u)}{dx^2}+a(x)F_s(u), \qquad \lambda\geq 0 \tag{12}$$

и

$$\lambda iF_s(u)=i\frac{d^2F_c(u)}{dx^2}+ia(x)F_c(u), \qquad \lambda\geq 0. \tag{13}$$

Складывая почленно соотношения (12) с (13) и нормируя сумму, будем иметь

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lambda\int_0^\infty u(x,t)(\cos\lambda t-i\sin\lambda t)dt= \tag{14}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^2}{dx^2}\left[\int_0^\infty u(x,t)(i\cos\lambda t+\sin\lambda t)dt\right]+\frac{1}{\sqrt{\pi}}a(x)\int_0^\infty u(x,t)(i\cos\lambda t+\sin\lambda t)dt.$$

С учетом того, что $i\cos\lambda t+\sin\lambda t=i(\cos\lambda t-i\sin\lambda t)$, из (14) следует

$$\frac{d^2\hat{u}(x,\lambda)}{dx^2}+a(x)\hat{u}(x,\lambda)=i\lambda\hat{u}(x,\lambda), \tag{15}$$

где $\hat{u}(x,\lambda)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty u(x,t)\,e^{-i\lambda t}dt.$

Из (3) и (5) будем иметь, что

$$\hat{u}(0,\lambda)=0, \tag{16}$$

а

$$\hat{u}(x_0,\lambda)=\hat{\varphi}(\lambda), \tag{17}$$

где $\hat{\varphi}(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) e^{-i\lambda t} dt.$

Из общего вида решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка следует, что задача (15–17) имеет решение

$$\hat{u}(x,\lambda) = l(\lambda) e(x,\lambda); \qquad x \in [0,1], \qquad \lambda \geq 0, \tag{18}$$

где $l(\lambda)$-некоторая функция, а $e(x,\lambda)$–решение задачи (15),(16), удовлетворяющее условию $e'_x(0,\lambda) = 1$.

Используя условие (17), определим функцию $l(\lambda)$ формулой

$$l(\lambda) = \frac{\hat{\varphi}(\lambda)}{e(x_0,\lambda)}, \qquad \lambda \geq 0. \tag{19}$$

Из (18),(19) следует, что

$$\hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_0,\lambda) e(x_1,\lambda) \hat{\varphi}(\lambda); \qquad \lambda \geq 0. \tag{20}$$

Исследуем поведение функции $l(\lambda)$, определяемой формулой (19).

Теорема 1. *Для любого* $\lambda \geq 0$ *функция* $e(x_0,\lambda) \neq 0$, *а функция* $l(\lambda)$ *непрерывна на полупрямой* $[0,\infty)$.

Доказательство. Так как функции $\hat{\varphi}(\lambda)$ и $e(x_0,\lambda)$ непрерывны на полупрямой $[0,\infty)$, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого $\lambda \geq 0$ $\quad e(x_0,\lambda) \neq 0$. Предположим противное, то есть найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$e(x_0,\lambda_0) = 0. \tag{21}$$

Тогда рассмотрим пространство $H_0 = L_2[0,x_0]$ над полем комплексных чисел и оператор B, действующий из H_0 в H_0 и определяемый формулами

$$Bu = \frac{d^2u}{dx^2} + a(x)u, \;\; u \in D(B), \tag{22}$$

а

$$D(B) = \{u: \; u, Bu \in H_0, u(0) = u(x_0) = 0\}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что оператор B отрицательно определен и самосопряжен. Поэтому существует число $\lambda_1 < 0$ такое, что спектр $Sp(B)$ оператора B лежит в полупрямой $(-\infty, \lambda_1]$.

Так как

$$Be(x,\lambda_0) = i\lambda_0 e(x,\lambda_0),$$

то $e(x,\lambda_0) = 0$ при любом значении $x \in [0,x_0]$ и $e'_x(0,\lambda_0) = 0$, что противоречит определению функции $e(x,\lambda)$ и доказывает теорему. □

Пусть $\tau = \sqrt{\lambda}$, а $e_1(x,\tau) = e(x,\lambda)$. Тогда функция $e_1(x,\tau)$ будет удовлетворять интегральному уравнению

$$e_1(x,\tau) = \frac{\operatorname{sh} \mu_0 x\tau}{\mu_0\tau} - \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0 (x-\xi)\tau}{\mu_0\tau} a(\xi)\, e_1(\xi,\tau) d\xi, \tag{24}$$

где $\mu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i), x \in [0,1]$, а $\tau \geq 0$. Исследуем поведение функции $|e_1(x,\tau)|$ при $\tau \longrightarrow \infty$.

Теорема 2. *Пусть $a(x) \in C^2[0,1]$ и для любого $x \in [0,1]$ $a(x) \le 0$. Тогда существует число $\tau_1 > 0$ такое, что для любого $\tau \ge \tau_1$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\tau|}{\tau} \le |e_1(x,\tau)| \le \frac{4}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\tau|}{\tau}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon(x,\tau) = \dfrac{\mu_0\tau}{\operatorname{sh}\mu_0 x\tau}\, e_1(x,\tau)$. Тогда из (24) следует, что

$$\varepsilon(x,\tau) = 1 - \frac{1}{\mu_0\tau}\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0(x-\xi)\tau\ \operatorname{sh}\mu_0\xi\tau}{\operatorname{sh}\mu_0 x\tau} a(\xi)\varepsilon(\xi,\tau)d\xi. \tag{25}$$

Так как

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0(x-\xi)\tau\ \operatorname{sh}\mu_0\xi\tau}{\operatorname{sh}\mu_0 x\tau}\right| = 1 + o(1) \text{ при } \tau \to \infty,$$

то из (25) следует существование числа $\tau_1 > 0$ такого, что для любого $\tau \ge \tau_1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{\mu_0\tau}\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0(x-\xi)\tau\ \operatorname{sh}\mu_0\xi\tau}{\operatorname{sh}\mu_0 x\tau} a(\xi)d\xi\right| \le \frac{1}{4}. \tag{26}$$

Решение уравнения (25) будем искать в виде

$$\varepsilon(x,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k(x,\tau), \tag{27}$$

где $\varepsilon_0(x,\tau) = 1$, а

$$\varepsilon_{k+1}(x,\tau) = -\frac{1}{\mu_0\tau}\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0(x-\xi)\tau\ \operatorname{sh}\mu_0\xi\tau}{\operatorname{sh}\mu_0 x\tau} a(\xi)\varepsilon_k(\xi,\tau)d\xi. \tag{28}$$

Из (26–28) следует, что для любых значений k, $\tau \ge \tau_1$ и $x \in [0,1]$

$$|\varepsilon_k(x,\tau)| \le 4^{-k}, \tag{29}$$

а из (27) и (29), что для любых значений $x \in [0,1]$ и $\tau \ge \tau_1$

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty}4^{-k} \le |\varepsilon(x,\tau)| \le \sum_{k=0}^{\infty}4^{-k}.$$

Таким образом для любых значений $x \in [0,1]$ и $\tau \ge \tau_1$

$$\frac{1}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\tau|}{\tau} \le |e_1(x,\tau)| \le \frac{4}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\tau|}{\tau}.$$

Тем самым теорема доказана. □

Так как

$$|\operatorname{sh}\mu_0 x\tau| = e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}}(1 + o(1)) \text{ при } \tau \to \infty,$$

то из теоремы 2 следует существования числа $\tau_2 \ge \tau_1$ такого, что для любых значений $\tau \ge \tau_2$ и $x \in [0,1]$

$$\frac{1}{6}\frac{e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}}}{\tau} \le |e_1(x,\tau)| \le \frac{8}{3}\frac{e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}}}{\tau}. \tag{30}$$

3. Доказательство метрической эквивалентности задач (10) и (20)

Пусть $\overline{H} = L_2[0,\infty) + iL_2[0,\infty)$, а F–оператор, отображающий пространство $L_2[0,\infty)$ в $\overline{H}$ и определяемый формулой

$$F(u(t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u(t)e^{-i\lambda t}dt, \;\; \lambda \geq 0, \; u(t) \in L_2[0,\infty). \tag{31}$$

Лемма 1. *Оператор F,определяемый формулой (31), изометричен.*

Доказательство. Пусть $u(t) \in L_2[0,\infty)$. Продолжим эту функцию на отрицательную полуось, положив

$$u(t) = 0 \text{ при } t < 0. \tag{32}$$

Таким образом $u(t) \in L_2(-\infty,\infty)$.

Обозначим через $\hat{u}(\lambda)$ преобразование Фурье функции $u(t)$

$$\hat{u}(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty u(t)e^{-i\lambda t}dt, \qquad -\infty < \lambda < \infty. \tag{33}$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [3] на с. 412, следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\|_{L_2} = \|u(t)\|_{L_2}. \tag{34}$$

Из (32) и (33) следует, что

$$\hat{u}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^\infty u(t)e^{-i\lambda t}dt, & \lambda \geq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^\infty u(t)e^{i|\lambda|t}dt, & \lambda < 0 \end{cases} \tag{35}$$

Из (35) следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\|^2_{L_2} = \int_0^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda + \int_0^\infty \overline{|\hat{u}(\lambda)|}^2 d\lambda, \tag{36}$$

где $\overline{\hat{u}(\lambda)}$-функция, сопряженная функции $\hat{u}(\lambda)$.

Так как для любого $\lambda \geq 0$

$$\|\hat{u}(\lambda)\|^2_{L_2} = \sqrt{2} \int_0^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda, \tag{37}$$

а из (34) и (37) следует утверждение леммы. □

Теперь введем пространства Φ, $\hat{U}$ и $\hat{V}$. Предположим, что они являются подпространствами $\overline{H}$ и определяются формулами

$$\hat{\Phi} = F[L_2[0,\infty)], \tag{38}$$

где F-оператор, определяемый формулой (31),

$$\hat{U} = \{\hat{u} : \; \hat{u} \in \overline{H}, \; \hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_0,\lambda)\, e(x_1,\lambda)F[u(t)], \;\; u(t) \in L_2[0,\infty)\}, \tag{39}$$

а

$$\hat{V} = \{\hat{v} : \; \hat{v} \in \overline{H}, \; \hat{v}(\lambda) = e^{-1}(x_0,\lambda)\, e(1,\lambda)F[v(t)], \;\; v(t) \in L_2[0,\infty)\}. \tag{40}$$

Из леммы 1 следует, что пространства $\hat{\Phi}$, $\hat{U}$, $\hat{V}$, определяемые формулами (38-40), изометричны пространству $L_2[0,\infty)$.

Теперь запишем задачу (20) в виде

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{T}\hat{\varphi}(\lambda), \tag{41}$$

где $\quad \hat{T}\hat{\varphi}(\lambda) = e^{-1}(x_0,\lambda)e(x_1,\lambda)\hat{\varphi}(\lambda);\ \hat{\varphi}(\lambda) \in \hat{\Phi}$, а $\hat{u}(\lambda) \in \hat{U}$.

Таким образом, из формулы (30) следует, что задача (41) является задачей вычисления значений неограниченного оператора $\hat{T}$, и она метрически эквивалентна исходной задаче (10).

4. Решение задачи (41)

Так как задача (41) некорректна, то для ее решения в пространстве $\hat{U}$ введем класс корректности $\hat{M}_r$. Для определения $\hat{M}_r$ используем условие (20). Пусть $\hat{L}$—линейный инъективный оператор, действующий из $\hat{U}$ в $\hat{V}$ и определяемый формулой

$$\hat{L}\hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_1,\lambda)\, e(1,\lambda)\, \hat{u}(\lambda), \tag{42}$$

где $\hat{u}(\lambda) \in \hat{U}$, а $\hat{L}\hat{u}(\lambda) \in \hat{V}$.
Тогда

$$\hat{M}_r = \{\hat{u}(\lambda) :\ \hat{u}(\lambda) \in \hat{U},\ \|\hat{L}\hat{u}\| \le r\}. \tag{43}$$

Далее исходные пространства $\hat{\Phi}$ и $\hat{U}$ разложим в ортогональные суммы

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_1 \dot{+} \hat{\Phi}_2 \tag{44}$$

и

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \dot{+} \hat{U}_2, \tag{45}$$

где $\hat{\Phi}_1 = \{\hat{\varphi}_1(\lambda) :\ \hat{\varphi}_1(\lambda) = F[\varphi(t)],\ \varphi \in L_2[0,\infty),\ \ 0 \le \lambda \le \tau_2^2\}$,

$$\hat{\Phi}_2 = \{\hat{\varphi}_2(\lambda) :\ \hat{\varphi}_2(\lambda) = F[\varphi(t)],\ \varphi \in L_2[0,\infty),\ \ \tau_2^2 \le \lambda < \infty\}$$

и аналогично

$$\hat{U}_1 = \{\,\hat{u}_1(\lambda) :\ \ \hat{u}_1(\lambda) = e^{-1}(x_0,\lambda)e(x_1,\lambda)\hat{\varphi}_1(\lambda),\ \ \hat{\varphi}_1(\lambda) \in \hat{\Phi}_1\},$$

$$\hat{U}_2 = \{\,\hat{u}_2(\lambda) :\ \ \hat{u}_2(\lambda) = e^{-1}(x_0,\lambda)e(x_1,\lambda)\hat{\varphi}_2(\lambda),\ \ \hat{\varphi}_2(\lambda) \in \hat{\Phi}_2\}.$$

Ортогональное разложение пространств (44) и (45) порождает разбиение задачи (41) на две.

Первая из них

$$\hat{u}_1(\lambda) = \hat{T}_1\hat{\varphi}_1(\lambda);\ \ \hat{u}_1 \in U_1,\ \text{а}\ \ \hat{\varphi}_1 \in \hat{\Phi}_1, \tag{46}$$

где $\ \hat{T}_1\hat{\varphi}_1(\lambda) = e^{-1}(x_0,\lambda)\, e(x_1,\lambda)\, \hat{\varphi}_1(\lambda)$.
Так как, на основании теоремы 1, функция $e^{-1}(x_0,\lambda)e(x_1,\lambda)$ непрерывна на отрезке $[0,\tau_2^2]$, то существует число $c_1 > 0$ такое, что для любого $\lambda \in [0,\tau_2^2]$

$$|e^{-1}(x_0,\lambda)e(x_1,\lambda)| \le c_1. \tag{47}$$

Из (47) будет следовать ограниченность оператора $\hat{T}_1$ и, соответственно, корректность задачи (46).

Приближенное решение задачи (46) обозначим через $\hat{u}_{1,\delta}(\lambda)$ и определим формулой

$$\hat{u}_{1,\delta}(\lambda) = \hat{T}_1 \hat{\varphi}_{1,\delta}(\lambda), \tag{48}$$

где $\hat{\varphi}_{1,\delta}(\lambda) = F[\varphi_\delta(t)]; \quad 0 \le \lambda \le \tau_2^2.$
Из (9), (47), (48) и леммы 1 будет следовать оценка

$$\|\hat{u}_{1,\delta} - \hat{u}_{1,0}\| \le c_1 \delta, \tag{49}$$

где $\hat{u}_{1,0}(\lambda) = \hat{T}_1 \hat{\varphi}_{1,0}(\lambda)$, а $\varphi_{1,0}(\lambda) = F[\varphi_0(t)], \quad 0 \le \lambda \le \tau_2^2.$

Вторая задача будет иметь вид

$$\hat{u}_2(\lambda) = \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda); \ \ \hat{u}_2 \in \hat{U}_2, \text{ а } \hat{\varphi}_2 \in \hat{\Phi}_2, \tag{50}$$

где $\hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)\, e(x_1, \lambda)\, \hat{\varphi}_2(\lambda), \quad \lambda \ge \tau_2^2$, а

$$D(\hat{T}_2) = \{\hat{\varphi}_2(\lambda) \ : \ \hat{\varphi}_2(\lambda) \in \hat{\Phi}_2, \qquad \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda) \in U_2\}.$$

Из теоремы 2 следует, что оператор $\hat{T}_2$ неограничен и потому задача (50) некорректна. Предположим, что $\alpha > \tau_2^2$ и определим оператор $\hat{T}_2^\alpha$, отображающий пространство $\hat{\Phi}_2$ в $\hat{U}_2$, формулой

$$\hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_2(\lambda) = \begin{cases} \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda), & \text{при } \tau_2^2 \le \lambda \le \alpha, \\ 0 & , \text{ при } \lambda > \alpha. \end{cases} \tag{51}$$

Приближенное решение $\hat{u}_{2,\delta}^\alpha$ задачи (50) будет иметь вид

$$\hat{u}_{2,\delta}^\alpha(\lambda) = \hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_{2,\delta}(\lambda), \tag{52}$$

где $\hat{\varphi}_{2,\delta}(\lambda) = F[\varphi_\delta(t)]; \qquad \tau_2^2 \le \lambda < \infty.$

Таким образом,

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \le \|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}^\alpha\| + \|\hat{u}_{2,0}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\|, \tag{53}$$

где $\hat{u}_{2,0}(\lambda) = \hat{T}_2 \hat{\varphi}_{2,0}(\lambda)$, $\hat{u}_{2,0}^\alpha(\lambda) = \hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_{2,0}(\lambda)$, а $\hat{\varphi}_{2,0}(\lambda) = F[\varphi_0(t)]$, $\tau_2^2 \le \lambda < \infty$.
Так как $\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}^\alpha\| \le \|\hat{T}_2^\alpha\| \cdot \delta$, а $\|\hat{u}_{2,0}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \le \Delta_1(\alpha)$,

где $\Delta_1^2(\alpha) = \sup\left\{ \int_\alpha^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \ : \hat{u} \in \hat{M}_r \right\}$, то из (53) следует, что

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \le \Delta_1(\alpha) + \|\hat{T}_2^\alpha\| \cdot \delta. \tag{54}$$

Из (30), (50) и (51) следует, что

$$\frac{1}{16} e^{(x_1 - x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \le \|\hat{T}_2^\alpha\| \le 16 e^{(x_1 - x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}; \qquad \alpha > \tau_2^2. \tag{55}$$

Перейдем к оценке величины $\Delta_1(\alpha)$.Из (43) следует, что, если $\hat{u}(\lambda) \in \hat{M}_r$, то

$$\int_\alpha^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \tag{56}$$

и

$$\int_\alpha^\infty |e^{-1}(x_1, \lambda) e(1, \lambda)|^2 |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \le r^2. \tag{57}$$

Так как $\lambda \geq \alpha$, то из (30) и (57) следует, что

$$\int_{\alpha}^{\infty} |e^{-1}(x_1,\lambda)e(1,\lambda)|^2 |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \geq \left(\frac{1}{16}\right)^2 e^{2(1-x_1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \int_{\alpha}^{\infty} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \tag{58}$$

Из (56 – 58) следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\| \leq 16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}$$

и, соответственно,

$$\Delta_1(\alpha) \leq 16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{59}$$

Если, используя схему М.М. Лаврентьева [4], параметр α выбрать из условия

$$16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = 16\delta e^{(x_1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}, \tag{60}$$

то из (54 – 60) будет следовать оценке погрешности

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^{\alpha(\delta)} - \hat{u}_{2,0}\| \leq 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}}, \tag{61}$$

где $\alpha(\delta)$ решение уравнения (60).

Если положить

$$\hat{u}_\delta(\lambda) = \begin{cases} \hat{u}_{1,\delta}(\lambda), & \text{при} \quad 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2, \\ \hat{u}_{2,\delta}^{\alpha(\delta)}(\lambda), & \text{при} \quad \lambda > \tau_2^2, \end{cases}$$

то из (49) и (61) следует, что

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq c_1\delta + 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}}, \tag{62}$$

где $\hat{u}_0(\lambda) = \hat{T}\hat{\varphi}_0(\lambda)$, а $\hat{\varphi}_0(\lambda) = F[\varphi_0(t)]$.

Пусть $u_\delta(t) = |F^{-1}[\hat{u}_\delta(\lambda)]|$, тогда из (62) и леммы 1 следует, что

$$\|u_\delta(t) - u_0(t)\| \leq c_1\delta + 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}},$$

где $u_0(t) = T\varphi_0(t)$.

Работа проводилась при финансовой поддержке гранта р-урал-а е 07-01-96001.

Литература

1. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, СВ. Румянцев. - М.: Наука, 1988.
2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. - 2006. - Т. 407, № 3. - С. 316 - 318.
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, СВ. Фомин. - М.: Наука, 1972.
4. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. - Новосибирск: Наука, 1962.

Кафедра вычислительной математики,
Южно-Уральский государственный университет
7413604@mail.ru

Поступила в редакцию 29 февраля 2008 г.