УДК 517.9

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

П.О. Пивоварова

Исследована устойчивость и разрешимость задачи Коши для уравнений $\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxxx} + \gamma u_j$, заданных на конечном связном и ориентированном графе с условиями непрерывности и баланса потока в его вершинах.

Ключевые слова: *уравнение Соболевского типа, граф, фазовое пространство, дихотомии решений*

Введение

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, $\mathbf{G}$ – конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро E_i имеет длину $l_i \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линейные уравнения в частных производных

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxxx} + \gamma u_j. \tag{0.1}$$

Эти уравнения описывают эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости (см. [1] и библиографию там). Они относятся к обширному классу уравнений Соболевского типа, которые в последнее время активно изучаются в различных аспектах. Изучение дифференциальных уравнений на графах началось в конце прошлого века (см. [2] и библиографию там). Первая работа по уравнениям Соболевского типа на графах [3] вышла в 2002 г., первая диссертация по данной проблематике [4] защищена в 2005 г. Однако прежде во всех работах по уравнениям Соболевского типа на графах изучались только динамические уравнения (см. классификацию по Г.А. Свиридюку [5]). Данная статья содержит исследование эволюционных уравнений Соболевского типа на графе.

Нас интересуют решения уравнений (0.1), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \tag{0.2}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i)(E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине $V_i)$; а также

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{0.3}$$

Условия (0.2) требуют непрерывности решений в вершинах графа, причем в этих условиях термин «отсутствовать»не значит "быть равным нулю". Скажем, если в вершину V_i все ребра «входят», то первые два равенства в (0.2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Если, к примеру, граф состоит из одного ребра и двух вершин, то условия (0.2) отсутствуют, а условия (0.3) превращаются в условия Неймана. Если же вершина у графа одна и ребро тоже одно, то условия (0.2), (0.3) превращаются в условия согласования.

Наш подход заключается в редукции задачи Коши

$$u_j(x;0) = u_{0j}(x), x \in (0, l_j) \tag{0.4}$$

для уравнений (0.1) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.5}$$

для абстрактного линейного эволюционного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu \tag{0.6}$$

и применении затем методов теории относительно p-секториальных операторов (см. [6], гл. 5). Кроме того, нас интересует устойчивость решений уравнений (0.1), которую мы будем изучать в терминах дихотомий решений ([6], гл. 6). Поэтому статья кроме вводной части и списка литературы содержит две части. В первой проводится редукция задачи (0.1) – (0.4) к задаче (0.6), (0.5), а во второй содержится основной результат статьи.

1. Постановка задачи

Чтобы редуцировать задачу (0.1) – (0.4) к задаче (0.5), (0.6), введем в рассмотрение следующие пространства: $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, ..., v_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ и $\mathfrak{V} = \{v = (v_1, v_2, ..., v_j, ...) : v_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено (0.2)$\}$. Пространство $\mathfrak{F}$ – гильбертово со скалярным умножением

$$< g, h >= \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

а пространство $\mathfrak{V}$ – банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (v_{jx}^2 + v_j^2) dx.$$

Заметим, что в силу теорем вложения Соболева функции из $W_2^1(0, l_j)$ абсолютно непрерывны, поэтому пространство $\mathfrak{V}$ определено корректно.

Обозначим через $\mathfrak{V}^*$ сопряженное к $\mathfrak{V}$ относительно двойственности $< \cdot, \cdot >$ пространство и формулой

$$< Av, w >= \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx} w_{jx} dx, u, v \in \mathfrak{V},$$

зададим оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}^*)$. В [7] показано, что его спектр $\sigma(A)$ неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Занумеруем собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора A по неубыванию с учетом их кратности. Тогда ортонормированное (в смысле $\mathfrak{F}$) семейство соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$ оператора A образует базис пространства $\mathfrak{V}$ в силу плотного и непрерывного вложения $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{F}$.

Введем в рассмотрение еще одно банахово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^2(0, l_j)$, и выполняются (0.2), (0.4)$\}$ с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

В силу уже упомянутых теорем вложения Соболева первые производные функций из $W_2^2(0,l_j)$ абсолютно непрерывны, поэтому корректность определения пространства $\mathfrak{U}$ обеспечена. Нетрудно заметить, что $\{\varphi_k\} \subset \mathfrak{U}$, а в силу плотности вложения $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$ семейство $\{\varphi_k\}$ образует базис в $\mathfrak{U}$. Формулой $B : u \to (-u_{1xx}, -u_{2xx}, ..., -u_{jxx}, ...)$ зададим оператор $B : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$. Очевидно $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ и $Bu = Au$ при всех $u \in \mathfrak{U}$, поэтому $\sigma(B) = \sigma(A)$. Возьмем $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим оператор $L = \lambda + B$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а его спектр $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$.

Наконец, введем в рассмотрение последнее в данной статье банахово пространство $domM = \{u \in \mathfrak{U} : u_j \in W_2^4(0,l_j)$ и

$$u_{jxx}(0,t) = u_{kxx}(0,t) = u_{mxx}(l_m,t) = u_{nxx}(l_n,t), \tag{2.1}$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$;

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jxxx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kxxx}(l_k,t) = 0\} \tag{2.2}$$

с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jxxxx}^2 + u_{jxxx}^2 + u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2)dx.$$

Сделаем по условиям (2.1), (2.2) те же замечания, что и по условиям (0.2), (0.3) и, аналогично сказанному выше про пространство $\mathfrak{U}$, установим корректность определения пространства $domM$. Заметим еще, что поскольку $\{\varphi_k\} \subset domM$, а вложение $domM \subset \mathfrak{U}$ плотно и непрерывно, то семейство $\{\varphi_k\}$ является базисом в $domM$. Далее, формулой $C : u \to (u_{1xxxx}, u_{2xxxx}, ..., u_{jxxxx}, ...)$ зададим оператор $C : \mathrm{dom}M \to \mathfrak{F}$, причем $C \in \mathcal{L}(domM; \mathfrak{F})$ и $\sigma(C) = \{\lambda_k^2\}$. Возьмем $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и построим оператор $M = -\beta B - \alpha C + \gamma$. По построению оператор $M \in \mathfrak{L}(domM; \mathfrak{F})$, а значит $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Итак, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, а операторы $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}), M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Редукция задачи (0.1) – (0.4) к задаче (0.6), (0.5) закончена.

2. Корректность задачи

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, а $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ и $M \in Cl(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ - операторы, построенные в п.1. Нашей целью является доказательство существования единственного решения задачи (0.6), (0.5), а также исследование устойчивости решений уравнения (0.6). Начнем с установления сильной $(L,0)$-*секториальности оператора* M.

Лемма 1. *При любых* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *и* $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ *таких, что либо* $-\lambda \notin \sigma(A)$, *либо* $-\lambda \in \sigma(A)$ *и* $-\lambda$ *не является корнем уравнения* $\alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$, *оператор* M *сильно* $(L,0)$-*секториален.*

Действительно, из формулы

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{< \cdot, \varphi_k > \varphi_k}{\mu(\lambda + \lambda_k) + \alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k - \gamma}$$

вытекает, что L- спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{-\alpha\lambda_k^2 - \beta\lambda_k + \gamma}{\lambda + \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \backslash \{l : \lambda + \lambda_l = 0\} \right\}$$

вещественен, дискретен и сгущается только к $= \infty$. Далее из формул

$$R_\mu^L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{< \cdot, \varphi_k > \varphi_k}{\mu - \mu_k},$$

$$(\mu L - M)^{-1} L (\nu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{< \cdot, \varphi_k > \varphi_k}{(\mu - \mu_k)(\nu - \mu_k)(\lambda + \lambda_k)}$$

аналогично ([6], гл.5), нетрудно установить сильную $(L, 0)$-секториальность оператора M.

Перейдем к рассмотрению вопроса о разрешимости задачи (0.6), (0.5). Вектор-функцию $u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_+; u)$, удовлетворяющую уравнению (0.6), назовем *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t), t \in \mathbb{R}_+$, уравнения (0.6) называется *ослабленным решением* (в смысле С.Г. Крейна) задачи Коши (0.5) для уравнения (0.6), если $\lim\limits_{t \to 0+} u(t) = u_0$.

Определение 1. *Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством уравнения (0.6), если*

(i) любое решение $u = u(t)$ лежит в $\mathfrak{B}$ как траектория, т.е. $u(t) \in \mathfrak{B}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное ослабленное решение задачи (0.6), (0.5).

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и*

(i) $-\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$. Тогда фазовым пространством уравнения (0.6) служит все пространство $\mathfrak{U}$.

(ii) $-\lambda \in \sigma(A)$. и $-\lambda$ не является корнем уравнения $\alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$. Тогда фазовым пространством уравнения (0.6) является пространство $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, -\lambda = \lambda_k\}$.

Итак, вопрос о существовании единственного решения задачи (0.6), (0.5) решен. Заметим, что одновременно решен вопрос и о несуществовании решения задачи (0.6), (0.5), ибо если $u_0 \notin \mathfrak{U}^1$ в случае (ii) теоремы 2.1, то решения задачи (0.6), (0.5) не существует. Перейдем к вопросу об устойчивости решений уравнения (0.6).

Пусть $\mathfrak{P}$ - фазовое пространство уравнения (0.6). Множество $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{B}$ называется *инвариантным пространством* уравнения (1.1), если для любого $u_0 \in \mathfrak{I}$ решение $u = u(t, u_0)$ задачи (0.6), (0.5) лежит в $\mathfrak{I}$ как траектория (т.е. $u = u(t, u_0) \in \mathfrak{I}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$).

Определение 2. *Говорят, что существует экспоненциальная дихотомия решений уравнения (1.1), если существуют такие инвариантные пространства $\mathfrak{I}^s, \mathfrak{I}^u \subset \mathfrak{B}$, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}^s \oplus \mathfrak{I}^u$; и если существуют такие $\kappa, C_s, C_u \in \mathbb{R}_+$, что для любых $v_0 \in \mathfrak{I}^s$ и $w_0 \in \mathfrak{I}^u$ имеют место неравенства $\|u(t, v_0)\| \le e^{-\alpha t} C_s \|v_0\|, t \in \mathbb{R}_+$ и $\|u(t, w_0)\| \le e^{\alpha t} C_u \|w_0\|, t \in \mathbb{R}_-$. Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}^s$ ($\mathfrak{B} = \mathfrak{I}^u$), то говорят, что решения уравнения (0.6) экпоненциально устойчивы (экспоненциально неустойчивы).*

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $4\alpha\gamma < -\beta^2$. Тогда*

(i) если $\lambda \ge -\lambda_1$, то решения уравнения (0.6) экспоненциально устойчивы.

(ii) если $\lambda < -\lambda_1$, то существует экспоненциальная дихотомия уравнения (0.6).

Доказательство. По теореме 2.1 фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (0.6) выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{P} = \begin{cases} \mathfrak{U}, \text{ если выполнено условие (i) теоремы 2.1,} \\ \mathfrak{U}^1, \text{ если выполнено условие (ii) теоремы 2.2.} \end{cases}$$

Если $4\alpha\gamma < -\beta^2$, то уравнение $\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k - \gamma > 0$ при всех λ_k, и потому если $\lambda \ge -\lambda_1$, то все $\mu_k < 0$, и значит, $\mathfrak{I}^s = \mathfrak{P}$.

Если же $\lambda < -\lambda_1$, то существует подпространство $\mathfrak{I}^u = span\{\varphi_k : \lambda < -\lambda_k\}$, а подпространство $\mathfrak{I}^u = \{u \in \mathfrak{P} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda < -\lambda_k\}$. □

Заметим, что в силу условия $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ситуация, когда решения уравнения (0.6) экспоненциально неустойчивы, возникнуть не может.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А Свиридюк, М.В. Суханова // Дифференц. уравнения. - 1992. - Т. 28, №3. - С. 508 - 515.
2. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. - М.: Физматлит, 2004.
3. Свиридюк, Г.А. Уравнения Соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. - Новосибирск, 2002. - С. 221 - 225.
4. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений Соболевского типа на графах: дис... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шеметова. - Магнитогорск: МаГУ, 2005.
5. Свиридюк, Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. - 1989. - Т. 304, № 2. - С. 301 - 304.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equtions and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk., V.E. Fedorov - VSP: Utrecth-Koln-Tokyo, 2003.
7. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк., В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. - 2006. - Т. 42, № 1. - С. 126 - 131.

Кафедра математического анализа,
Магнитогорский государственный университет
analysis@masu .ru

Поступила в редакцию 7 марта 2008 г.