УДК 517.9

ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОМ ОПЕРАТОРЕ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ КВАЗИОКРЕСТНОСТЯХ И МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕТВИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.Ю. Леонтьев

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x, \lambda) = 0$ с условием $F(0,0) \equiv 0$. Оператор $F_x(0,0)$ не является непрерывно обратимым. Строятся непрерывные решения $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ в открытом множестве S линейного нормированного пространства Λ. Нуль принадлежит границе множества S. Доказанные теоремы существования решений иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: *векториальная квазиокрестность, банахово пространство, нелинейное операторное уравнение, линейное нормированное пространство, двухточечная краевая задача, теорема о неявном операторе*

Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x, \lambda) = 0, \tag{1}$$

где $F : X \oplus \Lambda \to Y$, $F(0,0) \equiv 0$, оператор $F_x(0,0)$ не является непрерывно обратимым. В работе, продолжающей исследования [1], [2], доказано существование непрерывных решений уравнения $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ в секториальной квазиокрестности нуля и дан способ их построения. Результатом работы являются теоремы существования минимальных ветвей максимального порядка малости решений нелинейных уравнений и дополняют результаты [1].

Определение 1. *Секториальной квазиокрестностью точки $0 \in \Lambda$ будем называть открытое множество $S \subset \Lambda$, такое что $0 \in \partial S$.*

Далее пусть $a(\lambda)$ некоторая функция $a(\lambda) : S \to R_+$, $a(\lambda) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$. Вводится множество $\Omega = \{(x, \lambda) \in X \oplus \Lambda,\ \|x\| \le a(\lambda)r,\ \lambda \in S\}$, где $r > 0$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть в Ω выполнены условия:* 1) *оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ и имеет частную производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, непрерывную по x и λ;* 2) $F(0,0) = 0$, *оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in S$, причем $\left\|F_x^{-1}(0, \lambda)\right\| = O(\frac{1}{a(\lambda)})$;*
3) $\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \le L\|x\|$; 4) $\|F(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0, r)$ и секториальная квазиокрестность нуля $S_0 \subset S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1) имеет в шаре $\|x\| \le a(\lambda)r_0$ непрерывное решение $x(\lambda) \to 0$ при $S_0 \ni \lambda \to 0$.

Доказательство. Уравнение (1) с помощью замены $x = a(\lambda)V$ приводится к эквивалентному уравнению

$$V = \Phi(V, \lambda), \tag{2}$$

где оператор $\Phi(V,\lambda)$ имеет вид

$$\Phi(V,\lambda) \equiv V - \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0,\lambda) F(a(\lambda)V,\lambda).$$

Нетрудно видеть, что оператор $\Phi(V,\lambda)$ при $\lambda \in S$, $\|V\| \le r_0 \le r$ является сжатием. Действительно, применяя формулу конечных приращений Лагранжа и условие 3) теоремы, получим цепочку неравенств

$$\|\Phi(V_1,\lambda)-\Phi(V_2,\lambda)\| \le \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \int\limits_0^1 \|F_x(0,\lambda)-F_x(a(\lambda)(V_2+\Theta(V_1-V_2)),\lambda)\|\, d\Theta\, \|(V_1-V_2)\| \le$$

$$\le CL \int\limits_0^1 \Big\{ \|V_2\| + \Theta(\|V_1\| + \|V_2\|) \Big\} d\Theta\, \|V_1 - V_2\| \le 2CLr_0 \|V_1 - V_2\|,$$

здесь C, L – $const$. Выберем $r_0 < \frac{1}{2CL}$, тогда оператор $\Phi(V,\lambda)$ при $\lambda \in S$ и $\|V\| \le r_0$ будет сжатием.

Более того, при достаточно малых λ в силу оценки 4) оператор $\Phi(V,\lambda)$ переводит шар $\|V\| \le r_0$ в себя. Действительно,

$$\|\Phi(V,\lambda)\| \le \|\Phi(V,\lambda)-\Phi(0,\lambda)\| + \|\Phi(0,\lambda)\| \le qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0,\lambda)F(0,\lambda)\| \le qr_0 + \frac{C_1}{a^2(\lambda)} \|F(0,\lambda)\|.$$

Далее, в силу условия 4), можно выбрать множество $S_0 \subset S$ так, что при $\forall\lambda \in S_0$ будет выполнено $\frac{C_1}{a^2(\lambda)} \|F(0,\lambda)\| \le (1-q)r_0$.

Поэтому на основании принципа сжимающих отображений операторное уравнение (2) имеет единственное решение $V(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Возвращаясь к переменной x получаем, что уравнение (1) имеет малое непрерывное решение, вообще говоря, не единственное. □

Если $F_x(0,0) \ne 0$, то следующий результат позволяет в приложениях ослаблять условие 4) теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1) – 3) *теоремы 1 и пусть выполнено условие:*
5) *линейное уравнение* $F_x(0,0)x = F(0,\lambda)$, *где* $\lambda \in S$, *имеет решение* $x^*(\lambda)$, *причем выполнены оценки* $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ *и* $\|F_x(0,0) - F_x(0,\lambda)\| = O(a(\lambda))$ *при* $\lambda \in S$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0,r)$ *и секториальная квазиокрестность нуля* $S_0 \subset S$ *такие, что для каждого* $\lambda \in S_0$ *уравнение* (1) *имеет в шаре* $\|x\| \le a(\lambda)r_0$ *непрерывное решение* $x(\lambda) \to 0$ *при* $S_0 \ni \lambda \to 0$.

Доказательство. Уравнение (1) с помощью замены $x = a(\lambda)V$ приводится к эквивалентному уравнению (2).

Сжимаемость оператора $\Phi(V,\lambda)$ вытекает из условий 1)-3). (см. док-во теоремы 1). Покажем, что при достаточно малых $\lambda \in S_0 \subset S$, оператор $\Phi(V,\lambda)$ переводил шар $\|V\| \le r_0$ в себя. Действительно, в силу условия 5) имеем цепочку неравенств

$$\|\Phi(V,\lambda)\| \le qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0,\lambda)F(0,\lambda)\| =$$

$$= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \Big\| F_x^{-1}(0,\lambda) \Big\{ F_x(0,0) - F_x(0,\lambda) + F_x(0,\lambda) \Big\} x^*(\lambda) \Big\| \le qr_0 + \frac{C}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\|.$$

В силу оценки из условия 5) при достаточно малых $\lambda \in S_0 \subset S$ выполнится неравенство $\frac{C}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\| \le (1-q)r_0$, где C – $const$. Следовательно, $\|\Phi(V,\lambda)\| \le r_0$ при $\|V\| \le r_0$ и $\lambda \in S_0$. □

Пример 1. Покажем, что уравнение

$$F(x,\lambda) \equiv \int\limits_0^1 tsx(s)\,ds + \lambda x(t) - \int\limits_0^1 x^3(s)\,ds - f(t,\lambda) = 0, \tag{6}$$

где $x(t) \in C_{[0,1]}$, $f(t,\lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in C_{[0,1]}$, $n \geq 2$, S – суть проколотая окрестность нуля, имеет малое непрерывное решение $x_\lambda(t) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$. Здесь дифференциал Фреше имеет вид

$$F_x(x,\lambda)h = \int\limits_0^1 tsh(s)\,ds + \lambda h(t) - 3\int\limits_0^1 x^2(s)h(s)\,ds,$$

при этом

$$F_x^{-1}(0,\lambda)h = \frac{h(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda+1)\lambda}\int\limits_0^1 sh(s)\,ds.$$

Далее, $F_x(0,0) = 0$ и выполнена оценка

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Условия 1), 2) очевидно выполнены. В силу неравенств

$$\|F_x(x,\lambda)h - F_x(0,\lambda)h\| = \left\|3\int\limits_0^1 x^2(s)h(s)\,ds\right\| \leq 3r\|x\|\,\|h\|$$

условие 3) тоже выполнено. Если $n > 2$, то выполнено условие 4), и по теореме 1, уравнение имеет малое непрерывное решение $x_\lambda(t) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Если $n = 2$, то условие 4) не выполняется, но будет выполнено условие 5), если $m(t) = const\cdot t$. Таким образом, для того, чтобы данное уравнение при $n = 2$ имело решение $x_\lambda(t) \to 0$ при $\lambda \to 0$, достаточно, чтобы $m(t) = const \cdot t$.

Пример 2. Покажем, что двухточечная краевая задача для интегро-дифференциальной системы

$$\begin{cases} -y''(t) = x(t),\ y(0) = y(1) = 0,\ 0 < t < 1 \\ y(t) + \lambda x(t) + t\int\limits_0^1 x(s)y(s)\,ds + f(t,\lambda) = 0,\ \lambda > 0 \end{cases}$$

где $f(t,\lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in L_{2[0,1]}$, $n \geq 2$, имеет малое непрерывное решение $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \to (0,0)$ при $\lambda \to +0$.

Из первого уравнения системы имеем $y(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)x(s)\,ds$, где

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \\ (1-t)s, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Подставляя полученное выражение для $y(t)$ во второе уравнение получим нелинейное интегральное уравнение:

$$F(x,\lambda) \equiv \int\limits_0^1 G(t,s)x(s)\,ds + \lambda x(t) + t\int\limits_0^1 x(s)\int\limits_0^1 G(s,z)x(z)\,dz\,ds + f(t,\lambda) = 0.$$

Проверим выполнение условий теорем. Очевидно, $F(x,\lambda)$ и $F_x(x,\lambda)$ непрерывные операторы по x и λ. Далее, $F_x(0,0)=0$, а оператор $F_x(0,\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda>0$, причем выполнена оценка $\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Таким образом, выполнены условия 1), 2). Условие 3) справедливо ввиду оценки:

$$\|F_x(x,\lambda)h - F_x(0,\lambda)h\| = \left\|t\int_0^1\int_0^1 G(s,z)(x(s)h(z)+h(s)x(z))\,dz\,ds\right\| \le$$

$$\le \|t\|\cdot\|x\|\cdot\|h\|\cdot\int_0^1\int_0^1 2\|G(s,z)\|\,dz\,ds \le L\|x\|\cdot\|h\|.$$

Условие 4), очевидно, выполнено при $n>2$. Поэтому, по теореме 1, при $n>2$ уравнение имеет малое непрерывное решение $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \to (0,0)$ при $\lambda \to +0$. Если $n=2$, то условие 4) не выполняется, но выполнится условие 5), если $m(t)$ дважды дифференцируемая функция, причем $m(0)=m(1)=0$. Таким образом, для того, чтобы данное уравнение при $n=2$ имело решение $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \to (0,0)$ при $\lambda \to +0$ достаточно, чтобы $m(t)$ была дважды дифференцируемой функцией, причем $m(0)=m(1)=0$.

При проверке условий теорем 1, 2 в ряде приложений можно использовать следующий результат Н.А. Сидорова об обратимости оператор функций в окрестности фредгольмовых точек.

Рассматривается оператор-функция $B-\lambda A$, где B, A — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховых пространствах, с плотными областями определения, $\mathcal{D}(B)\subseteq\mathcal{D}(A)$. Фредгольмов оператор B имеет канонический полный A-жорданов набор (см. [3, гл. 9], [4]). Пусть $\left\{\varphi_i^{(1)}\right\}$, $\left\{\psi_i^{(1)}\right\}$, $i=\overline{1,n}$ — базисы в $\mathcal{N}(B)$ и $\mathcal{N}(B^*)$ соответственно, проекторы

$$\mathcal{Q}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle z_i^{(j)},\quad \mathcal{P}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\gamma_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(j)},$$

где $B\varphi_i^{(j)}=A\varphi_i^{(j-1)}$, $B^*\psi_i^{(j)}=A^*\psi_i^{(j-1)}$, $\gamma_i^{(j)}=A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, $z_i^{(j)}=A^*\psi_i^{(p_i+1-j)}$ и ограниченный оператор

$$\Gamma=\left(B+\sum_{i=1}^{n}\left\langle\cdot,\gamma_i^{(j)}\right\rangle z_i^{(j)}\right)^{-1}$$

соответствуют этому жорданову набору. Известно, что канонические полные наборы существуют и проекторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ могут быть построены, если $\lambda=0$ — изолированная особая фредгольмова точка, т.е. оператор $B-\lambda A$ непрерывно обратим в окрестности $0<|\lambda|<\rho$ (или, эквивалентно, $\mu B-A$, в окрестности $R<|\mu|<+\infty$).

Теорема 3. *Оператор $B-\lambda A$ непрерывно обратим в окрестности $0<|\lambda|<\rho$ тогда и только тогда, когда B имеет канонический полный A-жорданов набор. Причем при $\lambda<\frac{1}{\|A\Gamma\|}$*

$$(B-\lambda A)^{-1}=\Gamma\,(I-\lambda A\Gamma)^{-1}\,(I-\mathcal{Q})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\sum_{s=1}^{j}\lambda^{-s}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j+1-s)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}. \qquad (11)$$

Теорема дополняет один известный результат о жордановых наборах (см. [3, гл. 9], [4]), так как здесь приводится компактное явное представление обратного оператора $(B - \lambda A)^{-1}$. Доказательство тождества (11) использует $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$-сплетаемость операторов B, A, Γ и представление единственного решения уравнения $(B - \lambda A)\, x = f$ в виде $x = \Gamma y + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} c_{ij} \varphi_i^{(j)}$, где $y = (I - \lambda A \Gamma)^{-1} (I - \mathcal{Q})\, f$. Вектор C из пространства $R^{p_1 + \dots + p_n}$ определяется из системы линейных алгебраических уравнений с обратимой блочно-диагональной матрицей.

Следствие 1. *Оценка* $\left\|(B - \lambda A)^{-1}\right\| \sim \frac{C}{|\lambda|^p}$ *при* $\lambda \to 0$ *(соответственно, оценка* $\left\|(\mu B - A)^{-1}\right\| \sim C\,|\mu|^{p-1}$ *при* $\mu \to +\infty$*) выполнена тогда и только тогда, когда* $p = \max(p_1, \dots, p_n)$.

Замечание 1. $p = 1$ тогда и только тогда, когда $\det \left[\left\langle A\varphi_i^{(1)}, \psi_k^{(1)} \right\rangle\right]_{i,k=1}^{n} \neq 0$.

Автор благодарен профессору Н.А. Сидорову за постановку задачи и ценные замечания.

Литература

1. Сидоров, Н.А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н.А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. - 2004. - Вып. 14. - С. 161 - 164.
2. Леонтьев, Р.Ю. Теорема о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции <Ляпуновские чтения». - Иркутск, 2007. - С. 20.
3. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногий. - М: Наука, 1969.
4. Логинов, Б.В. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления / Б.В. Логинов, Ю.В. Русаков // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и приложения. - Ташкент, 1978. - С. 133 - 148.
5. Треногий, В.А. Функциональный анализ /В.А. Треногий. - М: Физматлит, 2002.

Кафедра математического анализа,
Иркутский государственный университет
lev_roma@bk.ru

Поступила в редакцию 28 февраля 2008 г.