

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ СОСТАВНОГО ТИПА

А.И. Кожанов

Для уравнений составного типа, называемых также псевдопараболическими уравнениями, исследуется разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента, зависящего от выделенной временной переменной. В качестве дополнительного условия предлагается условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: *уравнения составного типа; неизвестный коэффициент; интегральное условие переопределения; регулярные решения; существование и единственность*

Пусть Ω есть ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой (для простоты — бесконечнодифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b(x, t)$, $K(x)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$ — определенные при $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$ заданные функции, Bu — дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Bu = b^{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + b^i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u$$

(по повторяющимся индексам здесь и далее ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Обратная задача: *найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$q(t)u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} K(x)u(x, t) dx = \mu(t), \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

В рассматриваемой обратной задаче условия (2) и (3) являются условиями обычной первой начально - краевой задачи для уравнения составного типа (1), условие же (4) есть условие переопределения интегрального вида, необходимое вследствие наличия дополнительной неизвестной (наряду с решением $u(x, t)$) функции $q(t)$. Подобные обратные задачи для уравнений составного типа (1) ранее не изучались.

Целью настоящей работы является доказательство разрешимости обратной задачи (1) - (4) в классе регулярных решений. Техника доказательства основана на переходе от исходной задачи к новой уже прямой начально - краевой задаче для нелинейного интегро - дифференциального уравнения составного типа вида (1), исследовании разрешимости новой задачи и далее построении с помощью решения новой задачи решения рассматриваемой обратной задачи. Близкая техника ранее использовалась автором в работах [1-3].

Перейдем к содержательной части работы.

Определим пространства $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$:

$$\overset{\circ}{V}_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega)),$$

$$v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega)), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))\},$$

$$\overset{\circ}{V}_2 = \{v(x, t) : v(x, t) \in \overset{\circ}{V}_1, \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))\};$$

нормы в этих пространствах определим равенствами

$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}_1} = \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(0, T; \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))},$$

$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}_2} = \|v\|_{\overset{\circ}{V}_1} + \|v_{tt}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega))}.$$

Для функций $v(x, t)$ из пространств $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ для почти всех t из отрезка $[0, T]$ выполняются неравенства

$$\|v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_0 \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_1 \|\delta v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (5)$$

$$\|v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2T \int_0^t \|v_\tau(x, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau + 2\|v(x, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (6)$$

— см. [4]. Далее, определим дифференциальный оператор B_1 :

$$B_1 v = b_t^{ij}(x, t)v_{x_i x_j} + b_t^i(x, t)v_{x_i} + b_t(x, t)v.$$

Предполагая, что коэффициенты операторов B и B_1 ограничены, нетрудно показать, что для функций $v(x, t)$ из пространств $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ для почти всех t из отрезка $[0, T]$ выполняются неравенства

$$\|Bv(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_0 \|\Delta v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (7)$$

$$\|B_1 v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq b_1 \|\Delta v(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (8)$$

с некоторыми постоянными, определяющимися лишь функциями $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$ и $b(x, t)$, областью Ω и числом T .

Неравенства (5) – (8), а также собственно числа c_0 , c_1 , b_0 и b_1 нам понадобятся ниже.

Определим другие величины, которые понадобятся ниже. Пусть γ_0 и γ_1 есть заданные положительные постоянные (роль γ_0 и γ_1 будет прояснена ниже). Положим далее

$$F(t) = \int_{\Omega} K(x) f(x, t) dx,$$

$$\beta_1 = \max \left(\frac{3}{2} + \frac{b_0}{2} + b_1 T^2 + 2b_0 T, \frac{\mu_0}{2\gamma_0} \right),$$

$$\beta_2 = \left| \frac{1}{2} \int_Q f_t^2 dx dt + 2 \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \left[\int_{\Omega} f^2(x, t) dx \right] + (b_1 T + 2b_0) \int_{\Omega} (\Delta u_0)^2 dx + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx + \int_{\Omega} B u_0 \Delta u_1 dx - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1 dx \right|, \\
 & N_1 = 4\beta_2 \exp(4\beta_1 T), \\
 & N_2 = \beta_1 T N_1 + \beta_2, \\
 & N_3 = 2T^2 N_1 + 2 \int_{\Omega} (\Delta u_0)^2 dx, \\
 & N_4 = \left(\int_{\Omega} K^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left[N_1^{\frac{1}{2}} + (b_0 N_3)^{\frac{1}{2}} \right].
 \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$b^{ij}(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad b^i(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad b(x, t) \in C(\bar{Q}),$$

$$K(x) \in C^1(\bar{\Omega}); \tag{9}$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega),$$

$$u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \quad \mu(t) \in C^2([0, T]); \tag{10}$$

$$\mu''(t) \geq \mu_0 > 0, \quad F(t) \geq \gamma_0 + \gamma_1, \quad \gamma_0 > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad t \in [0, T]; \tag{11}$$

$$\int_{\Omega} K(x) u_0(x) dx = \mu(0), \quad \int_{\Omega} K(x) u_1(x) dx = \mu'(0); \tag{12}$$

$$N_4 < \gamma_1. \tag{13}$$

Тогда обратная задача (1) – (4) имеет решение $\{u(x, t), q(t)\}$ такое, что $u(x, t) \in \overset{\circ}{V}_1$, $q(t) \in L_2([0, T])$.

Доказательство. Воспользуемся комбинацией метода срезов, метода неподвижной точки и метода регуляризации.

Пусть N есть заданное положительное число. Определим функцию $G_N(\xi)$ (срезку):

$$G_N(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq N, \\ N, & \text{если } \xi > N, \\ -N, & \text{если } \xi < -N. \end{cases}$$

Далее, для заданной функции $v(x, t)$ определим функции $\psi(t, v)$ и $\tilde{q}(t, v)$:

$$\begin{aligned}
 \psi(t, v) = & \int_{\Omega} K_{x_i}(x) v_{x_i}(x) v_{x_i t}(x, t) dx + \int_{\Gamma} K(x) v_{x_i t}(x, t) \nu_i ds - \\
 & - \int_{\Omega} [K(x) b^i(x, t) - (K(x) b^{ij}(x, t))_{x_j}] v_{x_i}(x, t) dx - \int_{\Omega} K(x) b(x, t) v(x, t) dx + \\
 & + \int_{\Gamma} K(x) b^{ij}(x, t) v_{x_i}(x, t) \nu_j ds
 \end{aligned}$$

($\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ),

$$\tilde{q}(t, \nu) = \frac{F(t) - G_{\gamma_1}(\psi(t, \nu))}{\mu''(t)}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\tilde{q}(t, u)u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \quad (1')$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). В данной краевой задаче уравнение (1') представляет собой нелинейное «нагруженное» [5, 6] уравнение составного типа. Разрешимость поставленной задачи докажем с помощью метода регуляризации и метода неподвижной точки.

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\tilde{q}(t, u)u_{tt} - \varepsilon \Delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \quad (1'_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). Наконец, пусть $v(x, t)$ есть заданная функция из пространства $\overset{\circ}{V}_2$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\tilde{q}(t, v)u_{tt} - \varepsilon \delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \quad (1'_{\varepsilon, v})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3).

Пусть выполняются условия (9) – (12) за исключением условия $f_t(x, t) \in L_2(Q)$. Тогда, как следует из [7], краевая задача (1'_{\varepsilon, v}), (2), (3) будет разрешима в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$. Следовательно, при выполнении указанных выше условий данная краевая задача порождает оператор Φ , переводящий пространство $\overset{\circ}{V}_2$ в себя: $\Phi(v) = u$. Докажем, что этот оператор имеет в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ неподвижные точки.

Рассмотрим равенство

$$- \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{q}(\tau, v)u_{\tau\tau} - \varepsilon \Delta u_{\tau\tau} - \Delta u_{\tau} - Bu + u_{\tau}] \Delta u_{\tau\tau} dx d\tau.$$

Интегрируя по частям и используя условия (2) и (3), нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{q} \sum_{i=1}^n u_{x_i\tau\tau}^2 + \varepsilon (\Delta u_{\tau\tau})^2] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ [\Delta u_t(x, t)]^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2(x, t) \right\} dx = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} f \Delta u_{\tau\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} Bu \Delta u_{\tau\tau} dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i\tau} u_{x_i\tau\tau} dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Положительность функции $\tilde{q}(\tau, v)$, неравенство Юнга, неравенство (7) и лемма Гронуолла позволяют вывести из этого равенства априорную оценку

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau\tau})^2 dx d\tau + \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq C_0$$

с постоянной C_0 , определяющейся лишь нормами функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$, функцией $u_0(x)$ и $u_1(x)$ в пространстве $W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, числами T и ε . Из этой оценки, из неравенств (5) и (6) вытекает оценка

$$\|u\|_{\dot{V}_2} \leq C_1 \tag{15}$$

с постоянной C_1 , определяющейся теми же величинами, что и постоянная C_0 .

С помощью оценки (15) нетрудно установить, что оператор Φ , определенный выше, будет переводить некоторое замкнутое выпуклое ограниченное множество пространства \dot{V}_2 в себя, и будет вполне непрерывным на пространстве \dot{V}_2 — подробности рассуждений см. [1 – 3]. Согласно теореме Шаудера, оператор Φ имеет в пространстве \dot{V}_2 , по крайней мере, одну неподвижную точку $u(x, t)$. Эта неподвижная точка даст решение краевой задачи (1'ε), (2), (3), принадлежащее пространству \dot{V}_2 .

Итак, краевая задача (1'ε), (2), (3) при фиксированном ε имеет решение, принадлежащее пространству \dot{V}_2 ; обозначим это решение $u^\varepsilon(x, t)$. Покажем, что при выполнении всех условий теоремы 1 из семейства функций $\{u^\varepsilon(x, t)\}$ можно извлечь последовательность, сходящуюся к решению краевой задачи (1'), (2), (3).

В равенстве (14), соответствующем уравнению (1'ε), выполним интегрирование по частям в первом и во втором слагаемом правой части. Получим равенство (индекс «ε» у решения временно опустим)

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{q} \sum_{i=1}^n u_{x_i \tau\tau}^2 + \varepsilon(\Delta u_{\tau\tau}^2)] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{[\Delta u_t(x, t)]^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2(x, t)\} dx = \\ & = - \int_0^t \int_{\Omega} f_{\tau} \Delta u_{\tau} dx d\tau + \int_{\Omega} f(x, t) \Delta u_t(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} B u_{\tau} \Delta u_{\tau} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} B_1 u \Delta u_{\tau} dx d\tau - \int_{\Omega} B u(x, t) \Delta u_t(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau} u_{x_i \tau\tau} dx d\tau - \\ & - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1(x) dx + \int_{\Omega} B u_0 \Delta u_1 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx. \end{aligned}$$

Неравенство Юнга и положительность функции $\tilde{q}(\tau, u)$ позволяют перейти от данного равенства к неравенству

$$\frac{\gamma_0}{\mu_0} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau\tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^t \int_{\Omega} f_{\tau}^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{\delta_2^2}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_{\Omega} f^2(x, t) dx + \frac{\delta_3^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_0^t \int_{\Omega} (Bu_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{\delta_4^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_4^2} \int_0^t \int_{\Omega} (B_1 u)^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{\delta_5^2}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2\delta_5^2} \int_{\Omega} [Bu(x, t)]^2 dx + \frac{\delta_6^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\delta_6^2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx + \\
 & + \int_{\Omega} Bu_0 \Delta u_1 dx - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1 dx.
 \end{aligned}$$

Используя далее неравенства (6) – (8), приходим к следующему неравенству

$$\begin{aligned}
 & \frac{\gamma_0}{\mu_0} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau \tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}(x, t) dx \leq \\
 & \leq \left(\frac{\delta_1^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2}{2} + \frac{b_0}{2\delta_3^2} + \frac{b_1 T^2}{\delta_4^2} + \frac{b_0 T}{\delta_5^2} \right) \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{\delta_2^2 + \delta_5^2}{2} \int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_0^t \int_{\Omega} f_{\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_{\Omega} f^2(x, t) dx + \\
 & + \left(\frac{b_1 T}{\delta_4^2} + \frac{b_0}{\delta_5^2} \right) \int_{\Omega} (\Delta u_0)^2 dx + \frac{\delta_0^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\delta_6^2} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2 dx + \int_{\Omega} Bu_0 \Delta u_1 dx - \int_{\Omega} f(x, 0) \Delta u_1 dx.
 \end{aligned}$$

Положим $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 1$, $\delta_2 = \delta_5 = \frac{1}{2}$, $\delta_6 = \sqrt{\gamma_0 \mu_0^{-1}}$. Учитывая введенные выше обозначения, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_0}{2\mu_0} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} u_{x_i \tau \tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau \tau})^2 dx d\tau + \frac{1}{4} \int_{\Omega} [\delta u_t(x, t)]^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq \beta_1 \int_0^t \int_{\Omega} [(\Delta u_{\tau})^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i \tau}^2] dx d\tau + \beta_2. \end{aligned}$$

Используя лемму Гронуолла, приходим к первой равномерной по ε априорной оценке решений краевой задачи (1'), (2), (3):

$$\int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx \leq N_1. \quad (17)$$

Из этой оценки очевидным образом выводятся следующие оценки

$$\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau \tau})^2 dx d\tau \leq N_2, \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx \leq N_3. \quad (19)$$

Кроме того, в целом из оценки (16) следует оценка

$$\|u\|_{V_1} \leq N_0 \quad (20)$$

с постоянной N_0 , определяющейся лишь коэффициентами оператора B , функциями $f(x, t)$, $K(x)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, областью Ω и числом T .

Оценки (18) и (20), теоремы о компактности вложений $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \subset L_2(\Gamma)$ [8, 9], о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [9] и о слабой компактности ограниченного в L_2 множества [10] дают существование функции $u(x, t)$, а также последовательностей $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x, t)\}$ таких, что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_m \rightarrow 0, \\ & u_m(x, t) \rightarrow u(x, t), u_{mx_i}(x, t) \rightarrow u_{x_i}(x, t), u_{mt}(x, t) \rightarrow u_t(x, t), \\ & u_{mx_{it}}(x, t) \rightarrow u_{x_{it}}(x, t) \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ и почти всюду в } Q, \\ & u_{mx_i}(x, t) \rightarrow u_{x_i}(x, t), u_{mx_{it}}(x, t) \rightarrow u_{x_{it}} \text{ сильно в} \\ & L_2(\Gamma \times (0, T)) \text{ и почти всюду на } \Gamma \times (0, T), \\ & u_{mx_{ix_j}}(x, t) \rightarrow u_{x_{ix_j}}(x, t), u_{mx_{ix_j}t}(x, t) \rightarrow u_{x_{ix_j}t}, \\ & u_{mtt}(x, t) \rightarrow u_{tt}(x, t) \text{ слабо в } L_2(Q), \varepsilon_m \Delta u_{mtt}(x, t) \rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Из данных сходимостей следует, что предельная функция $u(x, t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}_1$, является решением краевой задачи (1'), (2), (3), и что для нее сохраняются оценки (17), (19) и (20). Оценки (17) и (19) означают, в частности, что выполняется неравенство ;

$$|\psi(t, u)| \leq N_4.$$

Из этого неравенства и из условия (13) вытекает, что для решения $u(x, t)$ краевой задачи (1'), (2), (3) имеет место равенство

$$G_{\gamma_1}(\psi(t, u)) = \psi(t, u).$$

Положим,

$$q(t) = \frac{F(t) - \psi(t, u)}{\mu''(t)}.$$

Очевидно, что функции $u(x, t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1). Умножим уравнение (1) с указанной выше функцией $q(t)$ на функцию $K(x)\mu''(t)$ и проинтегрируем по области Ω . Полученное равенство и равенство (21) дают систему

$$q(t) \int_{\Omega} K(x)u_{tt}(x, t) + \psi(t, u) = F(t), \quad q(t)\mu''(t) + \psi(t, u) = F(t).$$

Из этой системы и вследствие положительности функции $q(t)$ и условий согласования (12) вытекает, что выполняется равенство

$$\int_{\Omega} K(x)u(x, t) dx = \mu(t).$$

Следовательно, для функции $u(x, t)$, являющейся решением краевой задачи (1'), (2), (3), выполняется условие переопределения (4).

Итак, построенные функции $u(x, t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1), для функции $u(x, t)$ выполняются условия (2) – (4), функция $u(x, t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}_1$, функция $q(t)$ — пространству $L_{\infty}([0, T])$. Другими словами, построено требуемое решение рассматриваемой обратной задачи. □

Пусть $\bar{\gamma}$ есть заданное положительное число. Определим множество W_1 :

$$W_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in \overset{\circ}{V}_1, \quad |\psi(t, v)| \leq \bar{\gamma} \quad \forall t \in [0, T]\}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условие (9), а также условия

$$\mu''(t) \geq \mu_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \tag{22}$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad F(t) \geq \gamma > \bar{\gamma} \quad \text{при } t \in [0, T]; \tag{23}$$

$$K(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma. \tag{24}$$

Тогда обратная задача (1) – (4) не может иметь в множестве W_1 более одного решения.

Доказательство. Предположим, что в множестве W_1 имеется два решения $\{u_1(x, t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x, t), q_2(t)\}$ обратной задачи (1) – (4). Условие (22) позволяет дать представление функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$ через функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$:

$$q_1(t) = \frac{F(t) - \psi(t, u_1)}{\mu''(t)}, \quad q_2(t) = \frac{F(t) - \psi(t, u_2)}{\mu''(t)}.$$

Положим $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Имеют место равенство

$$q_1(t)w_{tt} - \Delta w_t - Bw = [q_2(t) - q_1(t)]u_{2tt}, \quad (x, t) \in Q;$$

$$w(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0, \quad w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad u \in \Omega.$$

Следствием этих равенств является равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} q_1(\tau) w_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx = \int_0^t \int_{\Omega} b^{ij} w_{x_i \tau} w_{x_j \tau} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (b^i - b_{x_j}^{ij}) w_{x_i} w_{\tau\tau} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} b_{\tau}^{ij} w_{x_i} w_{x_j \tau} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} b w w_{\tau\tau} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\psi(\tau, u_1) - \psi(\tau, u_2)}{\mu''(\tau)} u_{2\tau\tau} w_{\tau\tau} dx d\tau. \end{aligned}$$

Используя условия (22) - (24) и применяя неравенство Юнга, а также первое неравенство (5) и неравенство (6), нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i t}^2(x, t) dx \leq \\ & \leq M_1 \int_0^t \left[1 + \int_{\Omega} u_{2\tau\tau}^2 dy \right] \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i \tau}^2 dx \right) d\tau, \end{aligned}$$

постоянная M_1 в котором определяется лишь функциями $f(x, t)$, $k(x)$, $\mu(t)$, коэффициентами оператора B и областью Ω . Из этого неравенства и из леммы Гронуолла вытекает, что функции $w_{x_i t}(x, t)$, $i = 1, \dots, n$, $w_{tt}(x, t)$ являются тождественно нулевыми в цилиндре Q функциями. Но тогда и функция $w(x, t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. Другими словами, функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ будут совпадать почти всюду в цилиндре Q . Из совпадения функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ вытекает совпадение функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$. \square

Определим множество W_2 :

$$W_2 = \{v(x, t) : v(x, t) \in \overset{\circ}{V}_1, \Delta v_{tt}(x, t) \in L_2(Q), |\psi(t, v)| \leq \bar{\gamma} \forall t \in [0, T]\}.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (9), (22) и (23). Тогда обратная задача (1) - (4) не может иметь в множестве W_2 более одного решения.

Для доказательства этой теоремы достаточно уравнение для функции $w(x, t)$ умножить на Δw_{tt} и проинтегрировать. Лемма Гронуолла вновь даст тождество $w(x, t) = 0$. Из этого тождества и следует требуемое.

Сделаем несколько замечаний.

Аналогичные результаты о разрешимости обратной задачи нахождения решения $u(x, t)$ и коэффициента $q(t)$ при второй производной по времени, о единственности решений можно получить при замене условия (2) на условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \times (0, T)} = 0.$$

Далее, изложенными выше методами можно исследовать разрешимость обратных задач нахождения решения $u(x, t)$ и коэффициента при второй производной по времени с заданием на боковой границе цилиндра Q граничных условий первой или второй краевых задач в

более общей ситуации — при замене оператора Лапласа произвольным линейным эллиптическим оператором, в случае функции K , зависящей не только от переменных x_1, \dots, x_n , но и от переменной t .

Разрешимость вспомогательной линейной краевой задачи $(1'_{\varepsilon, \nu})$, (2), (3) нетрудно установить непосредственно — например, с помощью метода Галеркина с выбором специального базиса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта N 06-01-00439, и Сибирского отделения РАН, интеграционный проект N 48.

Литература

1. Кожанов, А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2004. - Т. 44, №4. - С. 722 - 744.
2. Кожанов, А.И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче / А.И. Кожанов // Мат. заметки. - 2004. - Т. 76, Вып. 6. - С. 840 - 853.
3. Кожанов, А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2005. - Т. 45, №12. - С. 2168 - 2184.
4. Нахушев, А.М. Уравнение математической биологии / А.М. Нахушев. - М.: Высш. школа, 1995.
5. Дженалиев, М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев. - Алматы: Ин-т теор. и прикладной математики, 1995.
6. Якубов С.Я. Линейные дифференциально - операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. - Баку: Элм, 1985.
7. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. - М.: Наука, 1988.
8. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. - М.: Наука, 1967.
9. Треногий, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногий. - М.: Наука, 1980.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
kozhanov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 21 марта 2008 г.