УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

*С.А. **Загребина,** Н.П. **Соловьева***

Статья посвящена изучению однозначной разрешимости начально-конечной задачи для эволюционных линейных уравнений Соболевского типа на конечном связном ориентированном графе.

Ключевые слова: *эволюционные линейные уравнения Соболевского типа, начально-конечная задача, относительно p-секториальные операторы, связный ориентированный граф*

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен). Введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M [1]. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. [1] *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева. Тогда существуют проекторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P; \ker Q) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im}P; \mathrm{im}Q)$ и $M \in \mathcal{C}l(\ker P; \ker Q) \cap \mathcal{C}l(\mathrm{im}P; \mathrm{im}Q)$.*

Замечание 1. Теорема 1 верна и в случае (L,p)-секториальности оператора M, но при дополнительном требовании рефлексивности пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ (теорема Яги – Федорова).

Теорема 2. [2] *Пусть $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, причем $\sigma^L_{in}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют проекторы $P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im}P_{in}; \mathrm{im}Q_{in})$ и $M \in \mathcal{C}l(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{C}l(\mathrm{im}P_{in}; \mathrm{im}Q_{in})$.*

Проекторы P_{in} и Q_{in} имеют вид

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu, \;\; Q_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu,$$

где контур $\gamma = \partial\Omega$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теорем 1 и 2. Тогда $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$ и $Q_{in}Q = QQ_{in} = Q_{in}$.*

Положим $P_{ex} = P - P_{in}$, в силу следствия 1 $P_{ex} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор. Возьмем $T \in \mathbb{R}_+$, u_0, $u_T \in \mathfrak{U}$ и рассмотрим задачу

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0 \tag{1}$$

для линейного уравнения Соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{2}$$

Вектор-функцию $u \in C^1((0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2), назовем его *решением*; решение $u = u(t)$ уравнения (2) назовем *решением задачи* (1), (2), если $\lim\limits_{t\to 0+} P_{ex}(u(t) - u_0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to T-} P_{in}(u(t) - u_T) = 0$.

Теорема 3. [3] *Пусть оператор M (L,p)-секториален, выполнены условия $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$ и условия теоремы 2, существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$. Тогда для любых $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$ и вектор-функции $f = f(t)$, $t \in [0,T]$, такой, что $f^0 \in C^p([0,T];\mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0,T);\mathfrak{F}^0)$, $f^{in} \in C([0,T];\mathfrak{F}^{in})$, $f^{ex} \in C^1([0,T];\mathfrak{F}^{ex})$, существует единственное решение задачи (1), (2), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} G^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t) + U_{in}^{t-T} u_T - \int_t^T R_{in}^{t-s} f^{in}(s)ds + U_{ex}^t u_0 + \int_0^t R_{ex}^{t-s} f^{ex}(s)ds.$$

Здесь $R_{in}^t = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$, $R_{ex}^t = P_{ex}(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu.$

История задачи (1) начинается с одной стороны в [4], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо – в [5], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов P_{in} и P_{ex} рассматриваются спектральные проекторы оператора L, причем L вдобавок предполагается самосопряженным. Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком. Первые результаты в этом направлении изложены в [6], где рассмотрен частный случай задачи (1), причем с более жесткими, чем здесь, условиями на L-спектр оператора M. В [7] рассмотрена задача (1), но для тех же условий на L-спектр оператора M, что и в [6], однако для (L,p)-ограниченного оператора M отмечена возможность большего произвола в относительно спектральных условиях. В [8] результаты [7] распространены на случай (L,p)-радиального оператора M. Нам кажется, наиболее удобным эту задачу называть начально-конечной задачей.

Пусть теперь $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, – конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро E_i имеет длину $l_i \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линейные уравнения в частных производных

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \beta u_{jxx} - \alpha u_{jxxxx} + \gamma u_j + f_j. \tag{3}$$

Дифференциальные уравнения на графах – сравнительно новая часть математического знания. Первые публикации в этой области появились в последнее десятилетие XX века, первая монография – в 2004 г. [9]. Уравнения соболевского типа на графах впервые были рассмотрены в 2002 г. [10]; первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002 – 2005 гг. [11]. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова была рассмотрена в 2006 г. [12]. Заметим еще, что уравнения (3) относятся к эволюционным [13], так как их линейные дифференциальные операторы порождают разрешающую полугруппу, в то время как линейные операторы, рассмотреных в [11] динамических уравнений, порождают разрешающие группы.

Нас интересуют решения задачи (1), (2), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \tag{4}$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i)(E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине V_i);

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0; \tag{5}$$

$$u_{jxx}(0,t) = u_{kxx}(0,t) = u_{mxx}(l_m,t) = u_{nxx}(l_n,t), \tag{6}$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$;

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jxxx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kxxx}(l_k,t) = 0\} \tag{7}$$

с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \varepsilon} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxxxx}^2 + u_{jxxx}^2 + u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2)dx.$$

Все пояснения по физическому смыслу этих условий можно посмотреть в статье П.О. Пивоваровой в данном Вестнике.

Введем в рассмотрение банаховы пространства $\mathfrak{F} = \{g = (g_1, g_2, ..., v_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$, $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^2(0, l_j)$ и выполняются (4), (5)$\}$ с нормой

$$\|u\|_u^2 = \sum_{E_j \in \varepsilon} d_j \int_0^{l_j} (u_{jxx}^2 + u_{jx}^2 + u_j^2)dx$$

и зададим оператор $A : u \to (-u_{1xx}, -u_{2xx}, ..., -u_{jxx}, ...)$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Возьмем $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим оператор $L = \lambda + A$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а его спектр $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$, где $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора A, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности.

Наконец, введем в рассмотрение еще одно банахово пространство $\mathrm{dom}M = \{u \in \mathfrak{U} : u_j \in W_2^4(0, l_j)$ и выполняются условия (4) – (7)$\}$. Формулой $B : u \to (u_{1xxxx}, u_{2xxxx}, ..., u_{jxxxx}, ...)$ зададим оператор $B \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}M; \mathfrak{F})$ и $\sigma(B) = \{\lambda_k^2\}$. Возьмем $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и построим оператор $M = -\beta A - \alpha B + \gamma$. По построению оператор $M \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}M; \mathfrak{F})$, а значит $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Лемма 1. *При любых $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ таких, что либо $-\lambda \notin \sigma(A)$, либо $-\lambda \in \sigma(A)$ и $-\lambda$ не является корнем уравнения $\alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$, оператор M сильно $(L, 0)$-секториален.*

Тогда L-спектр оператора M

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{-\alpha\lambda_k^2 - \beta\lambda_k + \gamma}{\lambda + \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \backslash \{l : \lambda + \lambda_l = 0\} \right\}$$

вещественен, дискретен и сгущается только к $+\infty$. Это значит, что выполняются условия теоремы 2, причем для любого замкнутого контура $\gamma \in \mathbb{C}$, ограничивающего область, содержащую конечное множество точек из $\sigma^L(M)$, и непересекающегося с $\sigma^L(M)$. Итак, все условия теоремы 3 выполнены, и поэтому справедлива

Теорема 4. *При любых $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}$, любой вектор-функции $f \in C^1([0,T], \mathfrak{F})$ и любых начальных, конечных значениях u_0, $u_T \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение задачи (1) для уравнения (3) с условиями (4) – (7).*

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

2. Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер - Челябинск, 1997.
3. Загребина, С.А. Задача Шоуолтера - Сидорова - Веригина для линейных уравнений Соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения;», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа. - Новосибирск, 2007. - С. 150 - 157.
4. Панков, А.А. Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной / А.А. Панков, Т.Е. Панкова // Докл. Акад. наук Украины. - 1993. - № 9. - С. 18 - 20.
5. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. - Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.
6. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений Соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. - 2002. - Т.38, № 12. - С. 1646 - 1652.
7. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера - Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. - 2007. - № 3. - С. 22 - 28.
8. Загребина, С.А. Обобщенная задача Шоуолтера - Сидорова для уравнений Соболевского типа с сильно (£,p)-радиальным оператором / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева // Вестн. МаГУ. Сер. «Математика:». - 2006. - Вып. 9. - С. 17 - 27.
9. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В.Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. - М.: Физматлит, 2004.
10. Свиридюк, Г.А. Уравнения Соболевского типа на графах/ Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. - Новосибирск, 2002. - С. 221 - 225.
11. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений Соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.В. Шеметова - Магнитогорск, 2005.
12. Загребина, С.А. Задача Шоуолтера - Сидорова для уравнения Соболевского типа на графе / С.А. Загребина // Оптимизация, управление, интеллект. - 2006. - 1 (12). - С. 42 - 40.
13. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. - 1989. - Т. 304, № 2. - С. 301 - 304.

Кафедра «Уравнения математической физики:»,
Южно-Уральский государственный университет
zsophiya@mail.ru

Поступила в редакцию 1 марта 2008 г.