УДК 519.178

# НАХОЖДЕНИЕ ОДНО-, ДВУХ- И ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

*А.А. Гришкевич, L. Pigtek, А. Бурмутаев*

На основе оригинальной процедуры нахождения всех минимальных разрезов графа предложен эффективный метод перечисления одно-, двух- и трехэлементных разрезов, т.е. метод перечисления разрезов, не являющихся минимальными.

**Ключевые слова:** *граф, минимальный разрез, квазиминимальный разрез, неразложимый разрез, дистрибутивная решетка, алгоритм*

## Введение

При моделировании структур сложных систем важная роль принадлежит таким комбинаторным конструкциям, как разрезы [1-4]. Если каждому разрезу поставить в соответствие некоторое число, например, количество содержащихся в разрезе элементов, то может быть выделено подмножество разрезов, содержащих минимальное число элементов, т.е. подмножество минимальных разрезов. Важными для практики и интересными для исследования с теоретической точки зрения являются как минимальные разрезы графов, разделяющих две выделенные вершины графа [5, 6], так и разрезы, близкие к минимальным (квазиминимальные разрезы) [7, 8], в частности, одно-, двух- и трехэлементные разрезы [9, 10].

Являясь по сути промежуточным, этап определения разрезов при моделировании структур остается одним из самых трудоемких, и поэтому предъявляет особо высокие требования к эффективности используемых алгоритмов. В **[10]** отмечается, что «вся оптимизационная часть, заключающаяся в возможном сокращении времени расчетов, сводится к сокращению количества сочетаний элементов, при исключении которых схема подвергается проверке на связность:».

Исследование теоретико-порядковых свойств минимальных разрезов позволило выявить структуру дистрибутивной решетки **[11].** Рассмотрение дистрибутивной решетки минимальных разрезов дало принципиально новый подход к задаче перечисления множества минимальных разрезов, результатом чего явилась разработка оригинального эффективного комбинаторного алгоритма поиска минимальных разрезов. Созданный алгоритм явился основой для построения алгоритмов перечисления разрезов, близких к минимальным, в частности, перечисления одно-, двух и трехэлементных разрезов.

## 1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ – ориентированный граф, где $\mathcal{V}=\{v\}$ – множество вершин графа, $\mathcal{U}=\{u=(i,j): i\in\mathcal{V}, j\in\mathcal{V}\}$ – множество ориентированных дуг графа.

В графе $\mathcal{G}$ выделим две вершины – источник $s$ и сток $t$ ($s,t\in\mathcal{V}$, $s\neq t$ ). Пусть $A,B$ ($A\cap B=\emptyset$ ) некоторые подмножества множества вершин. Обозначим

$$(A,B)=\{(i,j):(i,j)\in\mathcal{U}, i\in A, j\in B\}$$

множество ориентированных дуг, ведущих из $i \in A$ в $j \in B$. Дополнительно предположим, что, во-первых, между любыми двумя вершинами $i$, $j \in \mathcal{V}$ имеется не более одной ориентированной дуги $(i, j) \in \mathcal{U}$ и одной ориентированной дуги $(j, i) \in \mathcal{U}$ , и, во-вторых, отсутствуют петли (т.е. дуги вида $(i, i) \notin \mathcal{U}$ ).

Разрезом [3], разделяющим вершины $s, t$ графа $\mathcal{G}$, называется множество дуг $r = (R, \overline{R}) \subseteq \mathcal{U}$, где $R \cap \overline{R} = \emptyset$, $R \cup \overline{R} = \mathcal{V}$, $s \in R$, $t \in \overline{R}$. Множество всех таких разрезов обозначим посредством $\mathcal{R}$.

Каждому ребру $u \in \mathcal{U}$ графа $\mathcal{G}$ поставим в соответствие неотрицательное число $c(u) \geqslant 0$, которое назовем весом (пропускной способностью) ребра. Пропускную способность (вес) разреза $r \in \mathcal{R}$ определим при помощи

$$c(r) = c(R, \overline{R}) = \sum_{u \in (R, \overline{R})} c(u).$$

Под одно-, двух- и трехэлементными разрезами графа $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ будем понимать соответственно разрезы веса один, два и три в случае, когда $c(u) = 1$ для всех $u \in \mathcal{U}$. Такое название оправдано тем, что одноэлементные (двухэлементные, трехэлементные) разрезы состоят из одного (двух, трех) элементов (дуг графа). Множества одно-, двух- и трехэлементных разрезов обозначим $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ соответственно. Задача заключается в перечислении всех элементов указанных множеств.

## 2. Дистрибутивная решетка минимальных разрезов

В множестве разрезов $\mathcal{R}$ графа $\mathcal{G}$ относительно функции веса $c$ может быть выделено подмножество минимальных разрезов (разрезов минимального веса)

$$\mathcal{M}_{\min,c} = \{m : m = \arg\min_{r \in \mathcal{R}} c(r)\}.$$

На множестве $\mathcal{M}_{\min,c}$ определяются бинарные операции $\vee, \wedge$. Для любых $m_i = (M_i, \overline{M_i}) \in \mathcal{M}_{\min,c}$, $i = 1, 2$, положим

$$m_1 \vee m_2 = (M_1 \cup M_2, \overline{M_1 \cup M_2}), \ m_1 \wedge m_2 = (M_1 \cap M_2, \overline{M_1 \cap M_2}).$$

Множество минимальных разрезов $\mathcal{M}_{\min,c}$ с веденными на нем операциями $\vee, \wedge$ является дистрибутивной [12, 13] решеткой $<\mathcal{M}_{\min,c};\ \vee, \wedge>$ [11].

Минимальный разрез $p \in \mathcal{M}_{\min,c}$ дистрибутивной решетки называется неприводимым ($\vee$-неприводимым) [11], если для любых $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_{\min,c}$ из соотношения $p = m_1 \vee m_2$ вытекает $p = m_1$ или $p = m_2$. Обозначим через $\mathcal{P}_c = \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\min,c}}$ множество неприводимых разрезов решетки $<\mathcal{M}_{\min,c};\ \vee, \wedge>$. Очевидно, что $\mathcal{P}_c$ является частично упорядоченным множеством как подмножество частично упорядоченного множества $\mathcal{M}_{\min,c}$.

В дистрибутивной решетке множество минимальных разрезов графа может быть аналитически описано [11],

$$\mathcal{M}_{\min,c} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_c)} \bigvee_{a \in A} a,$$

где $\mathcal{A}(\mathcal{P}_c)$ - множество антицепей $A$ частично упорядоченного множества $\mathcal{P}_c$.

Указанное представление служит основой нового декомпозиционного подхода к перечислению минимальных разрезов графа, состоящего, во-первых, из поиска только неприводимых минимальных разрезов в графе, и, во-вторых, из синтеза всего множества минимальных разрезов по частично упорядоченному подмножеству неприводимых разрезов в дистрибутивной решетке минимальных разрезов. Предлагаемый подход позволяет сократить поиск в графе (число проверок графа на связность) за счет выделения только подмножества неприводимых минимальных разрезов.

Ниже рассматривается построение алгоритма перечисления одно-, двух- и трехэлементных минимальных разрезов графа.

## 3. Алгоритм поиска $k$-элементных разрезов графа

Рассмотрим алгоритм

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; \mathcal{S}; k; \mathcal{M}_k; R_1^k, R_2^k, \dots R_k^k)$$

перечисления множества $k$-элементных ($k = 1,2,3$ ) реберных разрезов $\mathcal{M}_k$, разделяющих вершины $s$ и $t$ ($s,\ t \in \mathcal{V}$ , $s \neq t$ ) ориентированного графа $\mathcal{G}(\mathcal{V},\ \mathcal{U})$ и минимальных относительно функции веса $c_{\mathcal{S}}(u)$ ($c_{\mathcal{S}}(u) = \infty$, если $u \in \mathcal{S}$, $c_{\mathcal{S}}(u) = 1$, если $u \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{S}$ ).

*Входные данные:* $\mathcal{G}(\mathcal{V},\ \mathcal{U})$ ; $s$, $t$ ; $\mathcal{S}$ ; $k$ . Множество $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ есть подмножество дуг графа, на вхождение которых в разрезы наложен запрет; $k$ - число элементов (дуг графа) в разрезе.

*Выходные данные:* $\mathcal{M}_k$ ; $R_1^k$, $R_2^k$, $\dots$ , $R_k^k$. Множество $\mathcal{M}_k$ содержит $k$-элементные разрезы графа $\mathcal{G}(\mathcal{V},\ \mathcal{U})$ между вершинами $s$ и $t$, минимальные относительно функции веса $c_{\mathcal{S}}(u)$. Если таких разрезов не существует, то $\mathcal{M}_k = \emptyset$. $R_1^k$, $R_2^k$, $\dots$ , $R_k^k$ – вспомогательные множества.

*Промежуточные переменные:* $M$; $f(u)$, $c(f)$; $c_{\mathcal{S}}(u)$, $\delta(u)$, $u \in \mathcal{U}$; $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k$. $M$ – множество помеченных вершин в методе пометок Форда – Фалкерсона [5, 6]; $f$ – поток из $s$ в $t$ в форме узлы-дуги [6]; $c(f)$ – величина потока $f$ ; $c_{\mathcal{S}}(u)$ – вес (пропускная способность) ребра; $\delta(u)$ – текущее значение пропускной способности ребра $u$; $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{M}_k$ – представление частично упорядоченного множества неприводимых минимальных разрезов $\mathcal{P}$ в виде объединения линейно упорядоченных множеств $\mathcal{P}_i$ , $i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ k$.

**Алгоритм поиска одноэлементных минимальных реберных разрезов** $KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; \emptyset; 1; \mathcal{M}_1; R_1^1)$. Множество минимальных одноэлементных разрезов $\mathcal{M}_1$ может трактоваться как множество разрезов минимального веса (веса один), разделяющих вершины $s$ и $t$ во взвешенном графе $\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ с заданной функцией веса $c(u) = 1 = c_{\emptyset}(u)$ для всех $u \in \mathcal{U}$.

*Шаг 1.* Положить $\mathcal{M}_1 := \emptyset$, $R_1^1 := \emptyset$. Для всех $u \in \mathcal{U}$ положить $\delta(u) = c_{\mathcal{S}}(u)$, $f(u) := 0$.

*Шаг 2.* Применить метод пометок [5, 6]. Если $t \notin M$, то искомых разрезов не существует. Return. Иначе увеличить величину потока на единицу.

*Шаг 3.* Применить метод пометок [5, 6]. Если $t \in M$, то Return. Иначе получаем одноэлементный разрез $m = (M, \overline{M})$.

*Шаг 4.* Запомнить одноэлементный разрез $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1 \cup m$. Для $e = (M, \overline{M})$ положить $\delta(e) := \infty$, $R_1^1 := R_1^1 \cup e$. Перейти к шагу 3.

В данном случае $\mathcal{M}_1 = \mathcal{P}$, и свойство дистрибутивности не используется. Предложенный алгоритм выделения множества одноэлементных разрезов ориентированного графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{U})$ имеет временную сложность $O(|\mathcal{U}|)$.

**Алгоритм поиска двухэлементных минимальных реберных разрезов** $KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; \emptyset; 2; \mathcal{M}_2; R_1^2, R_2^2)$. Множество минимальных двухэлементных разрезов $\mathcal{M}_2$ может трактоваться как множество разрезов минимального веса (веса два), разделяющих вершины $s$ и $t$ во взвешенном графе $\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ с заданной функцией веса $c(u) = 1 = c_{\emptyset}(u)$ для всех $u \in \mathcal{U}$ при отсутствии разрезов веса один (одноэлементных разрезов). Дистрибутивность решетки множества минимальных двухэлементных разрезов есть частный случай дистрибутивности решетки множества минимальных разрезов взвешенного графа, разделяющих вершины $s$ и $t$.

*Шаг 1.* Положить $\mathcal{M}_2 := \emptyset$. Для всех $u \in \mathcal{U}$ положить $\delta(u) = c_{\mathcal{S}}(u)$, $f(u) := 0$. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 := \emptyset$, $R_1^2 = R_2^2 := \emptyset$. Построить максимальный поток $f$ (получить максимальный поток в форме узлы-дуги) [6] . Если $c(f) \neq 2$, то Return.

*Шаг 2.* Произвести цепное разложение потока $f$ (получить максимальный поток в форме дуги-цепи) [5] и получить две цепи $\mathcal{C}_i = (\mathcal{A}_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2$, на каждой из которых поток равен единице ($c(\mathcal{C}_i) = 1$).

*Шаг 3.* Применить метод пометок [5, 6]. Если $t \in M$, то перейти к шагу 5. Иначе получаем двухэлементный разрез $m = (M, \overline{M})$.

*Шаг 4.* Запомнить двухэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов) $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P}_1 \cup m$. Для $e = m \cap \mathcal{E}_1$ положить $\delta(e) := \infty$, $R_1^2 := R_1^2 \cup e$. Перейти к шагу 3.

*Шаг 5.* Для всех $e \in R_1^2$ положить $\delta(e) := c_{\mathcal{S}}(e)$.

*Шаг 6.* Применить метод пометок [5, 6]. Если $t \in M$, то перейти к шагу 8. Иначе получаем двухэлементный разрез $m = (M, \overline{M})$.

*Шаг 7.* Запомнить двухэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов) $\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}_2 \cup m$. Для $e = m \cap \mathcal{E}_2$ положить $\delta(e) := \infty$, $R_2^2 := R_2^2 \cup e$. Перейти к шагу 6.

На этапе выделения множества неприводимых трехэлементных разрезов построены линейно упорядоченные множества

$$R_1^2 = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_m\} \subseteq \mathcal{E}_1, \; R_2^2 = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_n\} \subseteq \mathcal{E}_2.$$

Здесь $1, 2, \ldots, m$; $1, 2, \ldots, n$ – порядковый номер соответствующего элемента в соответствующей цепи (порядковый номер получения элемента цепи на шагах 3–4 (множество $R_1^2$ ) и 6–7 (множество $R_2^2$ ) алгоритма). Аналогично линейный порядок может быть рассмотрен и в множествах

$$\mathcal{P}_1 = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_m\}, \; \mathcal{P}_2 = \{q_1 < q_2 < \ldots < q_n\}.$$

Цепи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, в свою очередь, определяют частичный порядок в частично упорядоченном множестве $\mathcal{P}$, т.к. для множества $\mathcal{P}$ число Дилуорса $d(\mathcal{P}) = 2$. Таким образом, на шагах 3–7 алгоритма получена информация не только о составе множества $\mathcal{P}$, но и о частичном порядке в множестве $\mathcal{P}$.

Пусть $< \mathcal{M}_2; \; \vee, \wedge >$ – дистрибутивная решетка; $R_1^2 \times R_2^2 = \{(a, b) : a \in R_1^2, b \in R_2^2\}$ декартово произведение цепей $R_1, R_2$; $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq R_1^2 \times R_2^2$; для всех $r, s \in R_1^2 \times R_2^2$ бинарные операции $\vee$, $\wedge$ задаются

$$r \vee s = (r_a, r_b) \vee (s_a, s_b) = (\sup\{r_a, s_a\}, \sup\{r_b, s_b\}),$$

$$r \wedge s = (r_a, r_b) \wedge (s_a, s_b) = (\inf\{r_a, s_a\}, \inf\{r_b, s_b\});$$

а отношение порядка описывается

$$r \leq s \Leftrightarrow (r_a \leq s_a \;\&\; r_b \leq s_b), \; r < s \Leftrightarrow (r \leq s_a \;\&\; r \neq s).$$

Множество $\mathcal{P}$ есть подмножество $\vee$-неприводимых элементов решетки $\mathcal{M}_2$, причем $p_1 = q_1$ – нулевой элемент решетки $\mathcal{M}_2$. Нахождение множества $\mathcal{M}_2$ заключается в синтезе множества минимальных разрезов (подмножества $\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{P}$ ) по частично упорядоченному подмножеству неприводимых минимальных разрезов $\mathcal{P}$ в дистрибутивной решетке множества минимальных разрезов $< \mathcal{M}_2; \vee, \wedge >$. Использование такого подхода позволяет найти множество $\mathcal{M}_2$ по частично упорядоченному множеству $\mathcal{P}$ без использования графа $\mathcal{G}$.

Алгоритм синтеза двухэлементных разрезов по подмножеству неприводимых элементов.

*Шаг 8.* $\mathcal{M}_2 := \mathcal{P}$, $i := 1$.

*Шаг 9.* Выберем $p_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathcal{P}_1$.

*Шаг 10.* Для $\beta_i$ найдем порядковый номер $j$ элемента $q_j = (\alpha_j, \beta_j) \in \mathcal{P}_2$ такого, что $\beta_j = \beta_i$.

*Шаг 11.* Если $\alpha_i \leqslant \alpha_j$, то идти к шагу 15.

*Шаг 12.* Получить новый элемент решетки $s = p_i \vee q_j = (\alpha_i, \beta_j) = (s_a, s_b)$. Запомнить полученный элемент $\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}_2 \cup s$.

*Шаг 13.* $j := j + 1$.

*Шаг 14.* Если $j \leqslant n$, то идти к шагу 11.

*Шаг 15.* $i := i + 1$.

*Шаг 16.* Если $i \leqslant m$, то идти к шагу 9.

*Шаг 17.* Return.

Предложенный алгоритм выделения множества неприводимых двухэлементных разрезов ориентированного графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$ имеет временную сложность $O(|\mathcal{U}|)$. При синтезе множества трехэлементных разрезов сложность алгоритма $O(|\mathcal{M}_2|)$. Таким образом, получена линейная оценка сложности $O(\max\{|\mathcal{U}|, |\mathcal{M}_2|\})$ для алгоритма определения множества минимальных двухэлементных разрезов $\mathcal{M}_2$ графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$.

**Алгоритм поиска трехэлементных минимальных реберных разрезов** $KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \emptyset; 3; \mathcal{M}_3; R_1^3, R_2^3, R_3^3)$. Множество минимальных трехэлементных разрезов $\mathcal{M}_3$ может трактоваться как множество разрезов минимального веса (веса три), разделяющих вершины $s$ и $t$ во взвешенном графе $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ с заданной функцией веса $c(u) = 1 = c_\emptyset(u)$ для всех $u \in \mathcal{U}$ при отсутствии разрезов веса один и два (одно- и двухэлементных разрезов). Дистрибутивность решетки множества минимальных трехэлементных разрезов есть частный случай дистрибутивности решетки множества минимальных разрезов взвешенного графа, разделяющих вершины $s$ и $t$.

*Шаг 1.* Положить $\mathcal{M}_3 := \emptyset$. Для всех $u \in \mathcal{U}$ положить $\delta(u) = c_{\mathcal{S}}(u)$, $f(u) := 0$. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 := \emptyset$, $R_1^3 = R_2^3 = R_3^3 := \emptyset$. Построить максимальный поток $f$ (получить максимальный поток в форме узлы-дуги) [6] . Если $c(f) \neq 3$, то Return.

*Шаг 2.* Произвести цепное разложение потока $f$ (получить максимальный поток в форме дуги-цепи) [5] и получить три цепи $\mathcal{C}_i = (\mathcal{A}_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, на каждой из которых поток равен единице ($c(\mathcal{C}_i) = 1$ ).

*Шаг 3.* Применить метод пометок [5, 6]. Если $t \in M$, то перейти к шагу 5. Иначе получаем трехэлементный разрез $m = (M, \overline{M})$.

*Шаг 4.* Запомнить трехэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов) $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P}_1 \cup m$. Для $e = m \cap \mathcal{E}_1$ положить $\delta(e) := \infty$, $R_1^3 := R_1^3 \cup e$. Перейти к шагу 3.

*Шаг 5.* Для всех $e \in R_1^3$ положить $\delta(e) := c_{\mathcal{S}}(e)$.

*Шаг 6.* Применить метод пометок [5, 6]. Если $t \in M$, то перейти к шагу 8. Иначе получаем трехэлементный разрез $m = (M, \overline{M})$.

*Шаг 7.* Запомнить трехэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов) $\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}_2 \cup m$. Для $e = m \cap \mathcal{E}_2$ положить $\delta(e) := \infty$, $R_2^3 := R_2^3 \cup e$. Перейти к шагу 6.

*Шаг 8.* Для всех $e \in R_2^3$ положить $\delta(e) := c_{\mathcal{S}}(e)$.

*Шаг 9.* Применить метод пометок [5, 6]. Если $t \in M$, то перейти к шагу 11. Иначе получаем трехэлементный разрез $m = (M, \overline{M})$.

*Шаг 10.* Запомнить трехэлементный разрез (включая порядок, т.е. последовательность получения разрезов) $\mathcal{P}_3 := \mathcal{P}_3 \cup m$. Для $e = m \cap \mathcal{E}_3$ положить $\delta(e) := \infty$, $R_3^3 := R_3^3 \cup e$. Перейти к шагу 9.

На этапе выделения множества неприводимых трехэлементных разрезов построены линейно упорядоченные множества

$$R_1^3 = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_m\} \subseteq \mathcal{E}_1,\ R_2^3 = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_n\} \subseteq \mathcal{E}_2,$$

$$R_3^3 = \{c_1 < c_2 < \ldots < c_k\} \subseteq \mathcal{E}_3.$$

Здесь $1, 2, \ldots, m$; $1, 2, \ldots, n$; $1, 2, \ldots, k$ – порядковый номер соответствующего элемента в соответствующей цепи (порядковый номер получения элемента цепи на шагах 3–4 (множество $R_1^3$ ), 6–7 (множество $R_2^3$ ) и 9–10 (множество $R_3^3$ ) алгоритма). Аналогично линейный порядок может быть рассмотрен и в множествах

$$\mathcal{P}_1 = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_m\},\ \mathcal{P}_2 = \{q_1 < q_2 < \ldots < q_n\},$$

$$\mathcal{P}_3 = \{r_1 < r_2 < \ldots < r_k\}.$$

Цепи $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_3$, в свою очередь, определяют частичный порядок в частично упорядоченном множестве $\mathcal{P}$, т.к. для множества $\mathcal{P}$ число Дилуорса $d(\mathcal{P}) = 3$. Таким образом, на шагах 3–10 алгоритма получена информация не только о составе множества $\mathcal{P}$, но и о частичном порядке в множестве $\mathcal{P}$.

Пусть $< \mathcal{M}_3;\ \vee,\ \wedge >$ – дистрибутивная решетка;

$$R_1^3 \times R_2^3 \times R_3^3 = \{(a, b, c) : a \in R_1^3, b \in R_2^3, c \in R_3^3\}$$

декартово произведение цепей $R_1^3,\ R_2^3,\ R_3^3$;

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \subseteq \mathcal{M}_3 \subseteq R_1^3 \times R_2^3 \times R_3^3;$$

для всех $r,\ s \in R_1^3 \times R_2^3 \times R_3^3$ бинарные операции $\vee,\ \wedge$ задаются

$$r \vee s = (r_a, r_b, r_c) \vee (s_a, s_b, s_c) = (\sup\{r_a, s_a\}, \sup\{r_b, s_b\}, \sup\{r_c, s_c\}),$$

$$r \wedge s = (r_a, r_b, r_c) \wedge (s_a, s_b, s_c) = (\inf\{r_a, s_a\}, \inf\{r_b, s_b\}, \inf\{r_c, s_c\});$$

а отношение порядка описывается

$$r \leq s \Leftrightarrow (r_a \leq s_a \ \&\ r_b \leq s_b \ \&\ r_c \leq s_c),\ r < s \Leftrightarrow (r \leq s \ \&\ r \neq s).$$

Множество $\mathcal{P}$ есть подмножество $\vee$-неприводимых элементов решетки $\mathcal{M}_3$ , причем $p_1 = q_1 = r_1$ – нулевой элемент решетки $\mathcal{M}_3$ . Нахождение множества $\mathcal{M}_3$ заключается в синтезе множества минимальных разрезов (подмножества $\mathcal{M}_3 \backslash \mathcal{P}$ ) по частично упорядоченному подмножеству неприводимых минимальных разрезов $\mathcal{P}$ в дистрибутивной решетке множества минимальных разрезов $< \mathcal{M}_3;\ \vee,\ \wedge >$ . Использование такого подхода позволяет найти множество $\mathcal{M}_3$ по частично упорядоченному множеству $\mathcal{P}$ без использования графа $\mathcal{G}$.

Алгоритм синтеза трехэлементных разрезов по подмножеству неприводимых элементов.

*Шаг 11.* $\mathcal{M}_3 := \mathcal{P}$, $i := 1$.

*Шаг 12.* Выберем $p_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathcal{P}_1$.

*Шаг 13.* Для $\beta_i$ найдем порядковый номер $j$ элемента $q_j = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \in \mathcal{P}_2$ такого, что $\beta_j = \beta_i$.

*Шаг 14.* Если $\alpha_i < \alpha_j$, то идти к шагу 23.

*Шаг 15.* Получить новый элемент решетки $s = p_i \vee q_j = (\alpha_i, \beta_j, s_c) = (s_a, s_b, s_c)$.

*Шаг 16.* Для $s_c$ найдем порядковый номер $l$ элемента $r_l = (\alpha_l, \beta_l, \gamma_l) \in \mathcal{P}_3$ такого, что $\gamma_l = s_c$.

*Шаг 17.* Если $s_a < \alpha_l$ или $s_b < \beta_l$, то идти к шагу 21.

*Шаг 18.* Получить новый элемент решетки $t = p_i \vee q_j \vee r_l = (s_a, s_b, \gamma_l)$. Запомнить полученный элемент $\mathcal{M}_3 := \mathcal{M}_3 \cup t$.

*Шаг 19.* $l := l + 1$.

*Шаг 20.* Если $l \leqslant k$, то идти к шагу 17.

*Шаг 21.* $j := j + 1$.

*Шаг 22.* Если $j \leqslant n$, то идти к шагу 14.

*Шаг 23.* $i := i + 1$.

*Шаг 24.* Если $i \leqslant m$, то идти к шагу 12.

*Шаг 25.* Return.

Предложенный алгоритм выделения множества неприводимых трехэлементных разрезов ориентированного графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$ имеет временную сложность $O(|\mathcal{U}|)$. При синтезе множества трехэлементных разрезов сложность алгоритма $O(\{|\mathcal{M}_3|\})$. Таким образом, получена линейная оценка сложности $O(\max\{|\mathcal{U}|, |\mathcal{M}_3|\})$ для алгоритма определения множества минимальных трехэлементных разрезов $\mathcal{M}_3$ графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U})$ [14].

## 4. Дистрибутивные решетки подмножеств квазиминимальных разрезов

Пусть $\mathcal{S} = \{u : u \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U}$, причем для любого $m \in \mathcal{M}_{\min,c} \Rightarrow m \bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Рассмотрим функцию $c_\mathcal{S} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^+$, которую определим следующим образом:

$$c_\mathcal{S} = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad u \in \mathcal{S}, \\ c(u), & \text{если} \quad u \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{S}. \end{cases}$$

Построенная функция веса запрещает все минимальные разрезы относительно функции веса $c$, т.к. по меньшей мере одно ребро указанного разреза имеет вес $\infty$. Для заданных $\mathcal{S}$, $c_\mathcal{S}$ множество минимальных разрезов графа $\mathcal{G}$, обозначим $\mathcal{M}_{\min,c_\mathcal{S}}$.

Рассмотрим совокупность всевозможных множеств $\mathbb{S} = \{\mathcal{S}\}$ для $\mathcal{M}_{\min,c_\mathcal{S}}$.

Множество квазиминимальных (следующих за минимальными, ближайших к минимальным) разрезов есть

$$\mathcal{M}_{\min+1,c} = \{ \underset{r \in \bigcup\limits_{\mathcal{S} \in \mathbb{S}} \mathcal{M}_{\min,c_\mathcal{S}}}{\arg\min} c(r)\}.$$

Представленное соотношение позволяет рассмотреть множество квазиминимальных разрезов как совокупность дистрибутивных решеток, поскольку для некоторого $\mathbb{S}^* \subseteq \mathbb{S}$

$$\mathcal{M}_{\min+1,c} = \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathbb{S}^*} \mathcal{M}_{\min,c_\mathcal{S}}.$$

Иными словами, множество квазиминимальных разрезов (не обладающее свойством дистрибутивной решетки) может быть представлено в виде объединения подмножеств, каждое из которых обладает структурой дистрибутивной решетки.

Соответственно, множество квазиминимальных разрезов допускает представление

$$\mathcal{M}_{\min+1,c} = \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathbb{S}^*} \bigcup_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{c_\mathcal{S}})} \bigvee_{a \in A} a,$$

где $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{c_\mathcal{S}})$ есть множество антицепей подмножества неприводимых разрезов $\mathcal{P}_{c_\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{M}_{\min,c_\mathcal{S}}$ дистрибутивной решетки $<\mathcal{M}_{\min,c_\mathcal{S}};\ \vee, \wedge>$.

Полученное соотношение сводит поиск квазиминимальных разрезов к целенаправленному и эффективному поиску минимальных разрезов последовательности графов $\mathcal{G}$ с модифицированной функцией веса $c_{\mathcal{S}}$ для совокупности множеств $\{\mathcal{S}\} = \mathbb{S}^*$ [15].

Ниже рассматриваются вопросы построения множества $\mathbb{S}^*$ при перечислении квазиминимальных трехэлементных разрезов.

## 5. Алгоритм поиска одно-, двух- и трехэлементных разрезов графа

Перечисление указанных разрезов может быть сведено к последовательности задач перечисления минимальных одно-, двух- и трехэлементных разрезов.

**Перечисление двухэлементных (трехэлементных) разрезов при существовании одноэлементных разрезов (и отсутствии двухэлементных разрезов).** Двухэлементные (трехэлементные) разрезы в данном случае минимальными не являются. Множество дуг графа $\mathcal{G}$, образующих одноэлементные разрезы, есть $R_1^1$. Очевидно, что любое такое ребро не может входить в двухэлементный (трехэлементный) разрез. Придавая указанным ребрам разрезов достаточно большие веса (запрещая вхождение соответствующих ребер графа в минимальные разрезы), можно добиться того, что двухэлементные (трехэлементные) разрезы будут минимальными. Т.е.

$$\mathbb{S}^* = \{R_1^1\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{\min+1,c} = \mathcal{M}_{1+1,c} = \mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}}},$$

$$(\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{\min+1,c} = \mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}}}).$$

И нахождение двухэлементных (трехэлементных) разрезов может быть осуществлено на основе

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; R_1^1; 2; \mathcal{M}_2^1; R_1^2, R_2^2)$$

$$(KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; R_1^1; 3; \mathcal{M}_3^1; R_1^3, R_2^3, R_3^3)).$$

**Перечисление трехэлементных разрезов при существовании двухэлементных и отсутствии одноэлементных разрезов.** Трехэлементные разрезы в данном случае минимальными не являются. Трехэлементный разрез может: 1) не содержать дуг двухэлементных разрезов, 2) содержать одну дугу двухэлементного разреза, 3) содержать по одной дуге двух различных двухэлементных разрезов.

Случай 1. Множество дуг графа $\mathcal{G}$, образующих двухэлементные разрезы, есть $R_1^2 \cup R_2^2$. Очевидно, что любое такое ребро не может входить в требуемый трехэлементный разрез. И нахождение трехэлементных разрезов может быть осуществлено на основе

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; R_1^2 \cup R_2^2; 3; \mathcal{M}_3^2; R_1^3, R_2^3, R_3^3).$$

Случай 2. При получении двухэлементных разрезов были выделены две цепи $\mathcal{C}_1 = (\mathcal{A}_1, \mathcal{E}_1)$, $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{A}_2, \mathcal{E}_2)$ и совокупности дуг $R_1^2 \subseteq \mathcal{E}_1$ ($R_2^2 \subseteq \mathcal{E}_2$ ) первой (второй) цепи. Для любого двухэлементного разреза $m \in \mathcal{M}_2$ справедливо $m \cap R_1^2 \neq \emptyset$ , $m \cap R_2^2 \neq \emptyset$ , причем $R_1^2 \cap R_2^2 = \emptyset$. Соответственно, множество трехэлементных разрезов $\mathcal{M}_3^3$ ($\mathcal{M}_3^4$), которые содержат дугу двухэлементного разреза из множества $R_2^2$ ($R_1^2$ ), может быть найдено при помощи

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; R_1^2; 3; \mathcal{M}_3^3; R_1^3, R_2^3, R_3^3)$$

$$(KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s,t; R_2^2; 3; \mathcal{M}_3^4; R_1^3, R_2^3, R_3^3)).$$

Действительно, придание бесконечных весов дугам $R_1^2$ ($R_2^2$) запрещает все двухэлементные разрезы, поскольку для любого $m \in \mathcal{M}_2$ справедливо $m \cap R_1^2 \neq \emptyset$ ($m \cap R_2^2 \neq \emptyset$ ), однако использование дуг $R_2^2$ ($R_1^2$) при конструировании трехэлементных разрезов возможно.

Случай 3. Будем последовательно перебирать все дуги $u \in R_1^2$. Для конструирования трехэлементных разрезов, которые содержат дугу $u \in R_1^2$ и какую-то из дуг $R_2^2$ нужно: 1) запретить вхождение дуг $R_1^2 \backslash u$ (они не могут входить в трехэлементный разрез одновременно с дугой $u$); 2) запретить двухэлементные разрезы, одной из дуг которых является дуга $u$, при этом разрешив вхождение дуги $u$, что достигается путем выделения множества дуг

$$R_2^{2u} = \{y : y \in R_2^2, (u, y) \in \mathcal{M}_2\}.$$

Таким образом, запрещение множества

$$\mathcal{S}_u = (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u}$$

позволяет найти все требуемые трехэлементные разрезы с дугой $u$. Т.е.

$$\mathbb{S}^* = \{\mathcal{S}_u = (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u} : u \in R_1^2\},$$

$$\mathcal{M}_3^5 = \bigcup_{\mathcal{S}_u \in \mathbb{S}^*} \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}_u}},$$

где $\mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}_u}}$ находится на основе

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \mathcal{S}_u; 3; \mathcal{M}_{\min, c_{\mathcal{S}_u}}; R_1^3, R_2^3, R_3^3).$$

Следовательно,

$$\mathbb{S}^* = \{R_1^2 \cup R_2^2, R_1^2, R_2^2\} \bigcup_{u \in R_1^2} (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u}.$$

В действительности, чтобы получать неповторяющиеся сечения, достаточно выбрать

$$\mathbb{S}^* = \{R_1^2\} \bigcup_{u \in R_1^2} (\mathcal{E}_1 \setminus u) \cup R_2^{2u}.$$

**Перечисление трехэлементных разрезов при существовании одно- и двухэлементных разрезов. В** этом случае для любого множества, используемого при определении трехэлементных разрезов при существовании двухэлементных, требуется додать множество $R_1^1$.

**Перечисление одно-, двух- и трехэлементных разрезов в общем случае.** Объединив вышеприведенные рассуждения, имеем:

*Шаг 1.* Найти множество одноэлементных разрезов $\mathcal{M}_1$ графа

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; \emptyset; 1; \mathcal{M}_1; R_1^1).$$

*Шаг 2.* Найти множество двухэлементных разрезов $\mathcal{M}_2$ графа

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^1; 2; \mathcal{M}_2; R_1^2, R_2^2).$$

*Шаг 3.* Найти множество разрезов $\mathcal{M}_3^3$

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U}); s, t; R_1^1 \cup R_1^2; 3; \mathcal{M}_3^3; R_1^3, R_2^3, R_3^3),$$

$$\mathcal{M}_3 := \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_3^3.$$

*Шаг 4.* Для всех $u \in R_1^2$ выполнить

{

$$R_2^{2u} = \{y : y \in R_2^2, (u, y) \in \mathcal{M}_2\},$$

$$KCUT(\mathcal{G}(\mathcal{V},\mathcal{U}); s, t; R_1^1 \cup (\mathcal{E}_1 \setminus u) \cup R_2^{2u}; 3; \mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_u}}; R_1^3, R_2^3, R_3^3),$$

$$\mathcal{M}_3 := \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_u}}.$$

}

*Шаг 5.* Построить множество одно-, двух- и трехэлементных разрезов

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3.$$

Таким образом, предложен способ формального построения множества $\mathbb{S}^*$ при перечислении трехэлементных квазиминимальных разрезов графа. При этом

$$| \mathbb{S}^* | -1 \leqslant min\{| R_1^2 |, | R_2^2 |\} \leqslant| \mathcal{P}_{\mathcal{M}_2} |\leqslant| \mathcal{M}_2 | \,.$$

Получено представление множества квазиминимальных трехэлементных разрезов в виде объединения дистрибутивных решеток.

## 6. Пример

На основе представленного алгоритма разработана компьютерная программа. Программа написана на языке C++, содержит 1700 строк кода и после компиляции занимает 380 KB оперативной памяти. В программе дополнительно реализованы возможности: 1) нахождения разрезов в графах, содержащих ориентированные/неориентированные дуги; 2) нахождения разрезов из дуг/вершин графа. Исходный граф при работе программы задается в виде множества {$s$=номер_начальной_вершины_(источник), $t$=номер_конечной_вершины_(сток); ориентированные дуги: начальная_вершина_дуги конечная_вершина_дуги номер_дуги; неориентированные дуги: вершина_дуги вершина_дуги номер_дуги; …}.

Для иллюстрации работы алгоритма выбран граф {$s$=0, $t$ =30; ориентированные дуги: 0 13 1, 0 18 8; неориентированные дуги: 13 14 3, 18 19 9, 13 18 2, 14 15 4, 15 20 6, 20 19 10, 14 16 5, 19 21 11, 16 21 7; ориентированные дуги: 16 30 33, 21 30 34}.

При работе алгоритма получены следующие промежуточные множества. $\mathcal{M}_1 = \emptyset$.

$\mathcal{C}_1$={0, 1, 13, 3, 14, 5, 16, 33, 30}, $\mathcal{C}_2$={0, 8, 18, 9, 19, 11, 21, 34}.

$R_1^2$={1, 13, 3, 14, 5, 16, 33}, $R_2^2$={8, 18, 9, 19, 11, 21}.

$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_2}$={1 8, 1 18, 13 8, 13 9, 13 19, 3 18, 14 18, 14 11, 14 21, 5 19, 16 19, 16 34, 33 21}.

$\mathcal{M}_2$= $\mathcal{P}_{\mathcal{M}_2} \bigcup$ {13 18, 3 9, 14 9, 3 19, 14 19, 5 11, 5 21, 16 11, 16 21, 33 34}. $\mathcal{M}_3^3 = \emptyset$.

$\mathcal{S}_1$ ={13, 3, 14, 5, 16, 33; 8, 18}, $\mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_1}}$={1 9 2, 1 19 2}.

$\mathcal{S}_{13}$={1, 3, 14, 5, 16, 33; 8, 18, 9 19}, $\mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_{13}}}$ ={13 11 10, 13 11 20, 13 11 6, 13 11 15, 13 11 4, 13 21 10, 13 21 20, 13 21 6, 13 21 15, 13 21 4}.

$\mathcal{S}_3$={1, 13, 14, 5, 16, 33; 18, 9, 19}, $\mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_3}}$={3 8 2, 3 11 10, 3 11 20, 3 11 6, 3 11 15, 3 11 4, 3 21 10, 3 21 20, 3 21 6, 3 21 15, 3 21 4}.

$\mathcal{S}_{14}$={1, 13, 3, 5, 16, 33; 18, 9, 19, 11, 21}, $\mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_{14}}}$={14 8 2, 14 34 7}.

$\mathcal{S}_5$={1, 13, 3, 14, 16, 33; 19, 11, 21}, $\mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_5}}$={5 18 4, 5 18 15, 5 18 6, 5 18 20, 5 18 10, 5 9 4, 5 9 15, 5 9 6, 5 9 20, 5 9 10, 5 34 7}.

$\mathcal{S}_{16}$={1, 13, 3, 14, 5, 33; 19, 11, 21, 34}, $\mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_{16}}}$={16 18 4, 16 18 15, 16 18 6, 16 18 20, 16 18 10, 16 9 4, 16 9 15, 16 9 6, 16 9 20, 16 9 10}.

$\mathcal{S}_{33}$={1, 13, 3, 14, 5, 16; 34}, $\mathcal{M}_{\min,c_{\mathcal{S}_{33}}}$={33 19 7, 33 11 7}.

Окончательно, программой найдено следующее множество одно-, двух- и трехэлементных разрезов

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_{\min,cs_1} \cup \mathcal{M}_{\min,cs_{13}} \cup \mathcal{M}_{\min,cs_3} \cup \mathcal{M}_{\min,cs_{14}} \cup \mathcal{M}_{\min,cs_5} \cup \mathcal{M}_{\min,cs_{16}} \cup \mathcal{M}_{\min,cs_{33}}.$$

## Литература


1. Дэвис, Д. Сети связи для вычислительных машин / Д. Дэвис, Д. Барбер. – М.: Мир, 1976.
2. Фрэнк, Г. Сети, связь и потоки / Г. Фрэнк, И. Фриш. – М.: Связь, 1978.
3. Герасимов, В.Г. Электротехнический справочник. В 4 т. Т.3: Производство, передача и распределение электрической энергии / В.Г. Герасимов и др. – М.: Изд-во МЭИ, 2002.
4. Picard, J.C. Selected applications of minimum cuts in networks / J.C. Picard, M. Queyranne // INFOR. Can. J. Oper. Res. And Inf. Process. – 1982. – Т. 20, № 4. – С. 394 – 422.
5. Форд, Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966.
6. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – М.: Мир, 1974.
7. Hamacher, H.W. On finding the K best cuts in a network / H.W. Hamacher, J.C. Picard, M. Queyranne // Operations Research Letters. – 1984. – Т. 2, № 6. – С. 303 – 304.
8. Vazirani, V.V. Suboptimal cuts – their enumeration, weight and number / V.V. Vazirani, M. Yannakakis // Lect. Nites Comput. – 1992. – Т. 623. – С. 366 – 377.
9. Allan, R.N. An efficient algorithm for deducing the minimal cuts and reliability indices of a general network configuration / R.N. Allan, R. Billinton, M.F. De Oliveira // IEEE Trans. – 1976. – Т. R–25, № 4. – С. 226 – 233.
10. Методы оценки структурной надежности сложных схем электроэнергетических систем при меняющихся коммутационных состояниях / Ю.А Фокин, Р.С. Алиев, А.Н. Туманин, О.В. Файницкий // Изв. АН. Энергетика. – 1997. – № 4. – С. 111 – 118.
11. Гришкевич, А.А. Комбинаторные методы исследования экстремальных структур математических моделей электрических цепей и систем / А.А. Гришкевич. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004.
12. Айгнер, М. Комбинаторная теория / М. Айгнер. – М.: Мир, 1982.
13. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М.: Мир, 1982.
14. Grishkevich, A.A. Algorrithm for finding minimal 3-elements cuts in graph / A.A. Grishkevich, Ł. Piątek // Polish J. of Environmental Studies. – 2007. – Т. 16, № 4a. – С. 218 – 222.
15. Grishkevich, A.A. Перечисление квазиминимальных разрезов графа / A.A. Grishkevich, Ł. Piątek // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2007. – Т. 14, № 3. – С. 530.



Zakład metod numerycznych
Czenstochowa Uniwersity of Technology
a.grischkevich@el.pcz.czest.pl


*Поступила в редакцию 5 марта 2008 г.*