УДК 514.174.6 + 548.121

ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА НЕКОТОРЫХ ФРАКТАЛОВ ИЗ ПЯТИКОНЕЧНЫХ ЗВЕЗД

А.А. Поляков

Проведена оценка размерности Хаусдорфа фракталов из пятиконечных звезд d0w(2w), d0w(3w), d0w(4w), d0w(2w3w), d0w(3w4w), d0w(4w3w) в обозначениях автора. Размерности лежат в пределах от 1,9269 для наиболее плотного фрактала d0w(2w), до 1,1962 фрактала d0w(4w). Приведены рекуррентные формулы для вычислений. Вычисление общего количества точек предфракталов проводилось без округлений, применялась арифметика с варьируемой точностью, расчеты велись для предфракталов до 200000 порядка.

Ключевые слова: фракталы; мозаика Пенроуза; фрактальная размерность; фракталы из пятиконечных звезд.

Паркет Пенроуза является наиболее простым примером квазипериодических двумерных решеток с пентагональной симметрией, он формируется из ромбов двух типов[1]. В работах де Брюина [2], предложившего современный вид паркета Пенроуза, полученного проекцией 5-мерной кубической решетки на плоскость, отмечено, что возможно построение трехмерной поверхности из ромбов одного типа, ориентированных в трехмерном пространстве различным образом, причем проекция такой конструкции на плоскость даст паркет Пенроуза. Такая поверхность была названа кровлей Виринга (“Wieringa roof”). Вершины ромбов в кровле Виринга расположены в четырех параллельных слоях. В работах [3 – 5] проанализировано строение этих слоев, оказалось, что все точки в них являются вершинами правильных пятиконечных звезд двух ориентаций. Эти звезды можно выбрать одинакового, наименьшего размера. Они могут иметь различное взаимное расположение: звезды могут быть расположены отдельно, касаться друг друга вершинами и частично пересекаться. Были выделены кластеры звезд, наблюдаемые в паркете Пенроуза, которые можно описать следующим образом: центры звезд в кластере расположены по 10 вершинам звезд бóльшего размера. Отношение размеров таких обобщенных звезд – центров звезд к размерам исходных звезд равно золотому сечению, взятому в целой степени; также было предложено [5] рассматривать кластеры кластеров звезд. Бесконечная последовательность таких обобщенных кластеров является фракталом [6]. Различные фракталы из пятиконечных звезд, похожие на кластеры, наблюдаемые в паркете Пенроуза могут быть построены дефляционным образом – заданием инициатора и генератора (разбиение фигуры на все более мелкие элементы), а также методом инфляции, как при построении квазипериодических решеток (соединением полученных кластеров в бесконечно возрастающие фигуры). В работе [7] показано, как можно связать оба подхода к построению фрактала из пятиконечных звезд, дано строгое описание методики построения таких фракталов.

В настоящей статье рассматривается методика подсчета фрактальных размерностей некоторых фракталов из пятиконечных звезд.

Будет использоваться относительное дефляционное [7] описание фракталов: звезды могут иметь две ориентации, связанные между собой операцией инверсии относительно точки.

Изображаем исходную звезду размером $a_0 = a\tau^{-N_0}$ и одной из двух ориентаций (“w” или “b”). Обозначаем ее символами $N_0 c_0$, где c_0 = "\"w\"" " Или "b\"" . Здесь $\tau = 0.5 + 0.5 \cdot 5^{0.5} \approx 1.618$ – золотое сечение.

Обобщенные звезды первого шага ориентации c_1 и размера $a_1 = a\tau^{-(N_0+N_1)}$, располагается так, что их центры совпадают с вершинами звезд предыдущего шага. Точки предыдущего шага удаляются. Ориентацию будем обозначать “w”, если она совпадает с этой характеристикой предыдущего шага, иначе – “b”.

Обобщенные звезды i-го этапа, с размерами $a_i = a\tau^{-\sum_{k=0}^{i} N_k}$ и относительной ориентацией c_i, располагаем так, что их центры совпадают с вершинами предфрактала предыдущего этапа. При этом совпадающие вершины учитываются один раз, предыдущий предфрактал удаляется.

Среди возможных вариантов можно выделить такие фракталы из пятиконечных звезд, у которых в относительном дефляционном описании бесконечно повторяется последовательность операций, например:

$$^{d}0w\, N_1 c_1 N_1 c_1 N_1 c_1 \dots = {}^{d}0w\,(N_1 c_1).$$

Скобки здесь символизируют повторение, как в бесконечной дроби. В общем случае:

$$^{d}N_0\, c_0 N_1 c_1 N_2 c_2 \dots N_k c_k (N_{k+1} c_{k+1} \dots N_m c_m).$$

В таких фракталах наиболее ярко выражено самоподобие (повторение характеристик в меньших масштабах). В данной работе будут рассчитаны размерности фракталов $^{d}0w(2w)$, $^{d}0w(3w)$, $^{d}0w(4w)$, $^{d}0w(2w3w)$, $^{d}0w(3w4w)$.

Оценка фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича [6] дается соотношением:

$$d_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

где ε – диаметр (радиус) дисков, покрывающих множество точек фрактала, N(ε) – число таких дисков, необходимых для покрытия. У фрактала $^{d}0w(2w)$, (который в [4, 5] назывался «Бутон из Бутонов») лепестки некоторых звезд взаимно пересекаются, что усложняет расчет размерности. В связи с этим проводился подсчет его фрактальной размерности покрытием дисками лепестков звезд и покрытием ядер звезд (рис. 1). Оказалось, что оценки размерности при увеличении порядка фрактала сходятся, например, при порядке предфрактала 30000 разница составляет 0,0025 % и уменьшается с ростом порядка. В данной работе оценка фрактальной размерности проводится покрытием дисками ядер звезд.

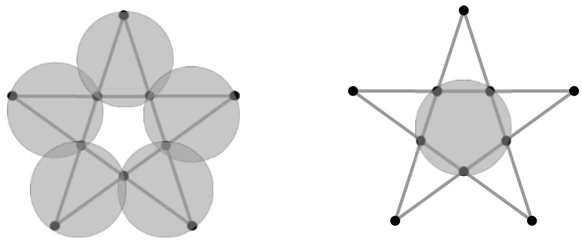

Рис. 1. Сравнение покрытия дисками лепестков и ядра звезды

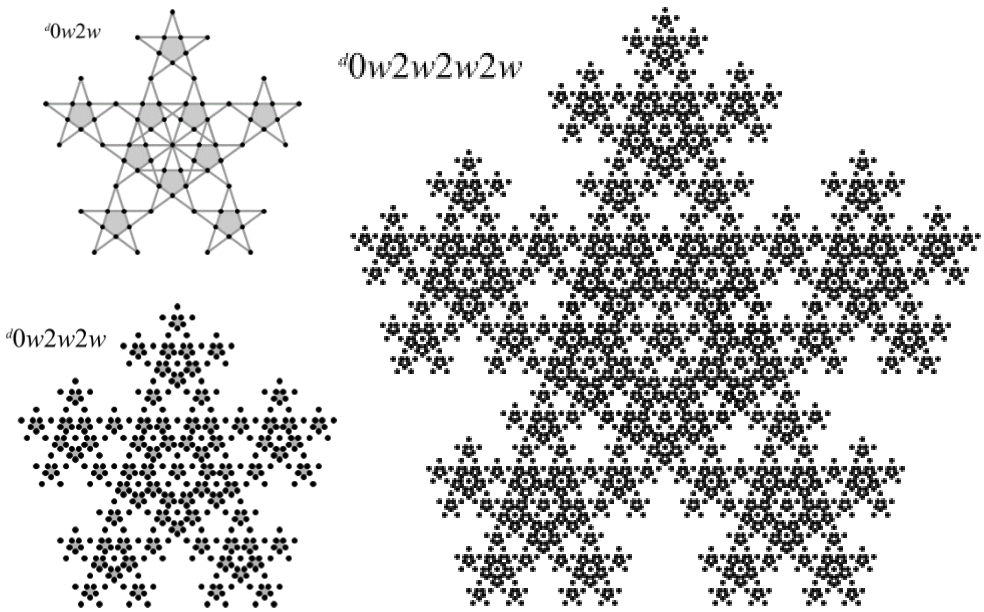

Рис. 2. Фрактал d0w(2w). Показаны предфракталы d0w2w, d0w2w2w, d0w2w2w2w.

Рассмотрим подробнее подсчет элементов фрактала ${}^{d}0w(2w)$ на каждом шаге роста. Каждая вершина предфрактала на следующем шаге становится звездой, поэтому количество ядер звезд равно количеству вершин предфрактала предыдущего порядка. На первом шаге () предфрактал – звезда – имеет 10 вершин ($N_1 = 10$). На втором шаге (рис. 2. – предфрактал ${}^{d}0w2w$) $N_2 = 10N_1 - 24 = 76$ вершин, здесь совпадают 10 вершин звезд лепестков и ядра предфрактала, 10 вершин звезд внутри ядра оказываются общими и в центре совпадают вершины 5 звезд. На третьем шаге (${}^{d}0w2w2w$) $N_3 = 10N_2 - 24N_1 + 5 = 525$ вершин. Добавляются 5 вершин, так как звезды, которые совпадают внутри ядра предфрактала и поэтому вычитаются, касаются друг друга вершинами, то есть точки удаляются два раза. Заметим, что такая логика подсчета соответствует, инфляционному [7], а не дефляционному подходу к описанию фрактала. Рекуррентная формула для подсчета вершин предфрактала порядка k:

$$N_k = 10N_{k-1} - 24N_{k-2} + 5 + 5\sum_{i=1}^{k-3} N_i .$$

Размер дисков, покрывающих ядра звезд на каждом шаге будет равен:

$$\varepsilon_k = \tau^{-2(k-1)} .$$

Тогда оценка фрактальной размерности k-го предфрактала ${}^{d}0w(2w)_k$:

$$d_H(k) = \frac{\ln N_{k-1}}{2(k-1)\ln\tau} .$$

Здесь число элементов – ядер звезд равно числу вершин звезд на предыдущем шаге: N_{k-1} .

У фрактала ${}^{d}0w(4w)$ лепестки звезд не пересекаются и не касаются друг друга, поэтому $N_k = 10^k$ и $\varepsilon_k = \tau^{-4(k-1)}$.

$$d_H = \frac{(k-1)\ln 10}{4(k-1)\ln\tau} = \frac{\ln 10}{4\ln\tau} \approx 1.196 .$$

В ядре предфрактала ${}^{d}0w3w$ (рис. 3) звезды касаются лепестками, поэтому число точек уменьшается на 5 единиц. Общая рекуррентная формула:

$$N_k = 10N_{k-1} - 5N_{k-2} .$$

Фрактальная размерность:

$$d_H(k) = \frac{\ln N_{k-1}}{3(k-1)\ln\tau} .$$

Фрактал ${}^{d}0w(3w4w)$: $N_1 = 10, N_2 = 10N_1 - 5, N_3 = 10N_2$. Рекуррентные формулы отличаются для четных и нечетных шагов. При четном k:

$$N_k = 10N_{k-1} - 5N_{k-2} .$$

При нечетном k:

$$N_k = 10N_{k-1}.$$

Оценка фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича для нечетного k:

$$d_H(k) = \frac{\ln N_{k-1}}{3.5(k-1)\ln\tau}.$$

Фрактал $^{d}0w(2w3w)$: если принять $N_{-2} = N_{-1} = 0, N_0 = 1, N_1 = 10$, то визуальный анализ полученных предфракталов позволяет записать для четного k:

$$N_k = 10N_{k-1} - 24N_{k-2} - 5N_{k-3} - 5N_{k-4}.$$

Число точек предфрактала при нечетном k:

$$N_k = 10N_{k-1} - 5N_{k-2} - 5N_{k-3}.$$

Оценка фрактальной размерности для нечетного шага k:

$$d_H(k) = \frac{\ln N_{k-1}}{2.5(k-1)\ln\tau}.$$

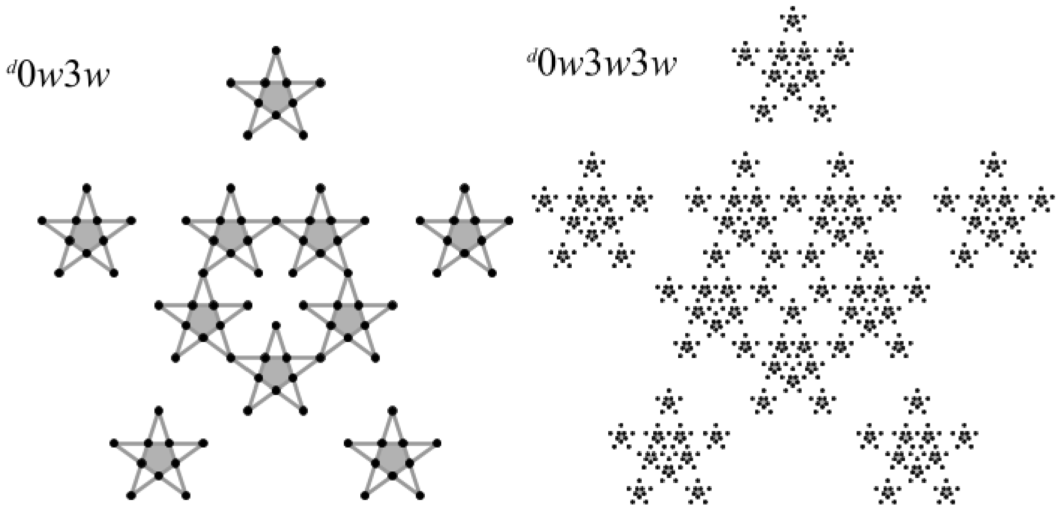

Рис. 3. Фрактал d0w(3w). Показаны предфракталы d0w3w, d0w3w3w

Начальные шаги построения фрактала $^{d}0w(2w3w)$ показаны на рис. 4.

Проведены расчеты вплоть до 200000 шага. Для расчета использовалась арифметика с увеличивающимся количеством значащих цифр (variable-precision arithmetic программного пакета MATLAB), чтобы не накапливались ошибки при итерациях. Число значащих цифр выбиралось равным числу шагов. Результаты расчетов приведены в таблице.

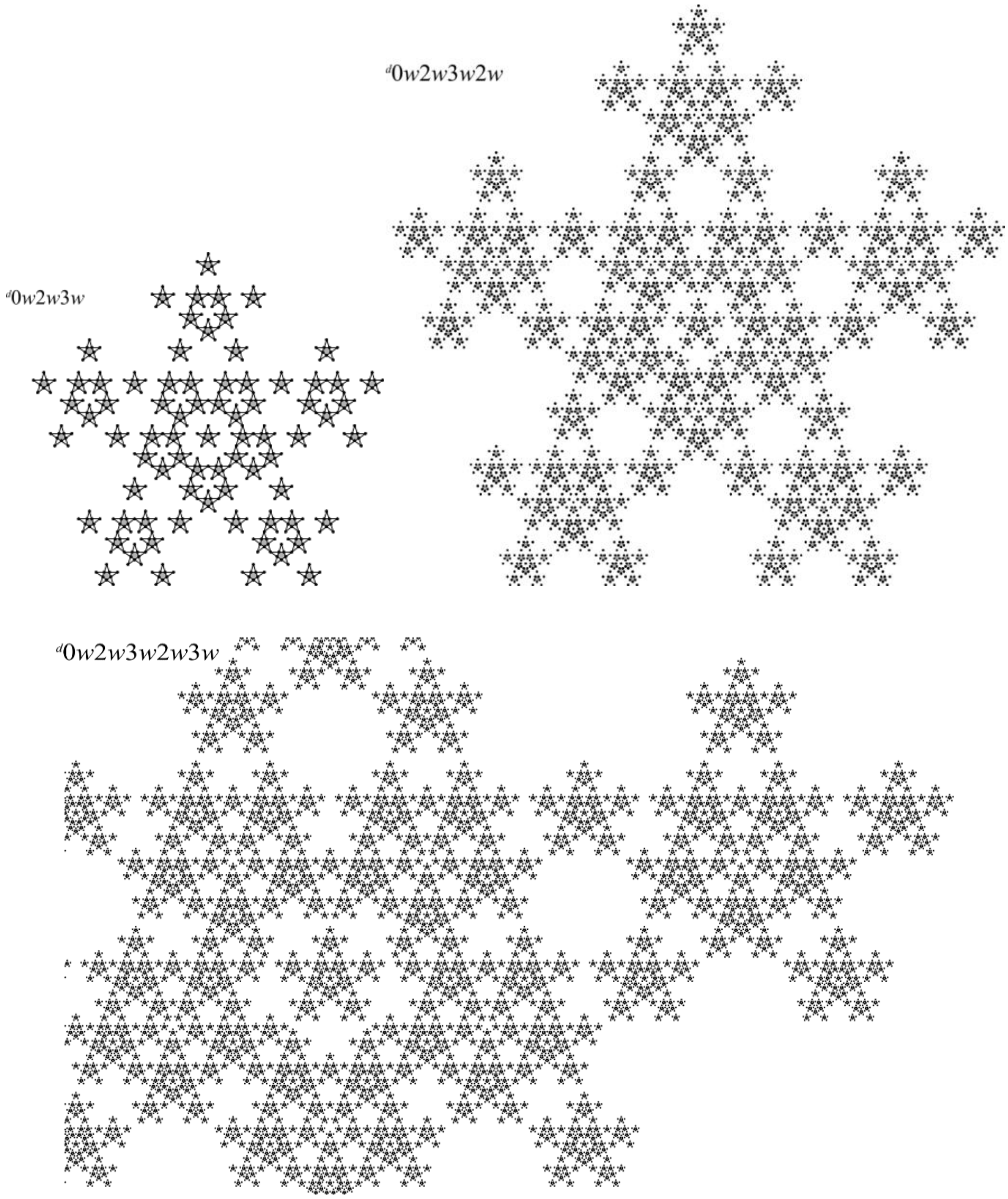

Рис. 4. Фрактал d0w(2w3w). Показаны предфракталы d0w2w3w,
d0w2w3w2w, часть предфрактала d0w2w3w2w3w

Таблица

Оценка размерности Хаусдорфа-Безиковича фракталов из пятиконечных звезд d0w(2w), d0w(3w), d0w(4w), d0w(2w3w), d0w(3w4w), d0w(4w3w)

Тип фрактала	Размерность	Комментарии
d0w(2w)	1.92691	200 000 итераций
d0w(3w)	1.55743	200 000 итераций
d0w(4w)	1.19624	точное значение $\frac{\ln 10}{4} \ln \tau$
d0w(2w3w)	1.75172	200 000 итераций
d0w(3w4w)	1.35191	200 000 итераций
d0w(4w3w)	1.35191	методика совпадает с предыдущей

При больших значениях шага итерации, все оценки (кроме d0w(4w)) характеризуются убывающими последовательностями. С большой вероятностью приведенные значения с точностью до 4 знака после десятичной точки характеризуют размерность приведенных фракталов.

Высокое значение размерности Хаусдорфа фрактала $d_{0w(2w)}$ говорит о плотном заполнении плоскости вершинами звезд, что характерно для самопересекающихся фракталов. В то же время не самопересекающиеся фракталы d0w(4w) имеют размерность, приближающуюся к размерности линии.

Библиографический список

1. Penrose, R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane / R. Penrose // Eureka. 1978. 39. Pp. 16–22.

2. de Bruijn, N.G. Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane, I, II / N.G. de Bruijn // Indagationes mathematicae.– 1981.– V. 43 (1), P. 39 – 66.

3. Polyakov, A.A. Presentation of Penrose tiling as set of overlapping pentagonal stars / A.A. Polyakov // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 98. 2008, 012025.

4. Поляков, А.А. Описание паркета Пенроуза посредством взаимоперекрывающихся пятиугольных звезд / А.А. Поляков // Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов: труды XII Российской конф. – Екатеринбург: Уральский центр академического обслуживания. – 2008. – Т. 1. – С. 242–245.

5. Polyakov, A.A. Fractal structures of regular pentagonal stars in Penrose tiling / A.A. Polyakov // Russian Metallurgy (Metally). 2012. I. 8, Pp. 719–722.

6. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт // М.: Институт компьютерных исследований. – 2002. – 656 с.

7. Поляков, А.А. Инфляционный и дефляционный подходы к описанию фрактала из пятиконечных звезд / А.А. Поляков // Наука ЮУрГУ. Секции естественных наук: материалы 66-й науч. конф. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С. 247–253.

К содержанию