К содержанию

УДК 515.128

О СВОЙСТВАХ h-ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С.В. Медведев

В заметке обсуждаются и сравниваются свойства однородных и h-однородных метрических пространств.

Ключевые слова: однородное пространство, h-однородное пространство, пространство первой категории.

Все рассматриваемые пространства предполагаются метризуемыми и нульмерными (в смысле dim).

Пространство X называется *однородным*, если для любых двух точек x и y из этого пространства существует такой гомеоморфизм f: $X \to X$, что $f(x) = y$. Таким образом, в однородном пространстве нет особенностей и окрестности любых точек устроены одинаково. Пространство X называется *h-однородным* (термин предложен А.В. Островским), если любое непустое открыто-замкнутое подмножество из X гомеоморфно всему пространству X. Из определения следует, что в таком пространстве любые два непустых открыто-замкнутых подмножества будут гомеоморфны между собой. Несложно доказать, что каждое h-однородное пространство является однородным пространством. Обратное утверждение неверно, т.е. существуют однородные пространства, которые не являются h-однородными. Задача о нахождении условий, при выполнении которых однородное пространство становится h-однородным, не решена до сих пор.

Обозначим через ω счётное множество чисел $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Говорят, что *X – пространство первой категории*, если пространство X можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных подмножеств этого пространства.

Теорема 1. [1] *Для любого нульмерного метризуемого пространства X счётная степень X^{ω} является однородным пространством.*

Если пространство X обладает некоторыми дополнительными свойствами, то теорему 1 можно усилить до следующего утверждения.

Теорема 2. [2] *Пусть дано нульмерное метризуемое пространство X. Если счётная степень X^{ω} является пространством первой категории или* *содержит всюду плотное полное метризуемое подпространство, то* X^{ω} *–* *h-однородное пространство.*

В настоящее время остаётся открытым такой вопрос: будет ли *h*-однородным пространством степень X^{ω} для произвольного нульмерного метризуемого пространства *X*.

В свою очередь теорему 2 можно обобщить на случай последовательности пространств $\{X_n : n \in \omega\}$, причём связь между отдельными пространствами из этой последовательности может быть очень слабой.

Теорема 3. *Пусть дана такая последовательность нульмерных метризуемых пространств* X_n, $n \in \omega$, *что для любого номера* n *найдется такой номер* j, *что* j > n *и пространство* X_n *гомеоморфно замкнутому подмножеству из* X_j. *Если произведение* $X = \prod\{X_n : n \in \omega\}$ *является пространством первой категории или содержит всюду плотное полное метризуемое подпространство, то X – h-однородное пространство.*

Установим некоторые связи между однородными и *h*-однородными пространствами. Следующая теорема усиливает результат из статьи [3].

Теорема 4. *Пусть дано нульмерное метризуемое пространство X, для которого* cf(*w*(X)) > ω. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X – h-однородное пространство*;

2) *X – однородное, однородное по весу пространство.*

Теорема 5. *Пусть даны два нульмерных метризуемых пространства X и Y, причём X – h-однородное пространство, Y – однородное пространство и w(Y) ≤ w(X). Тогда произведение* $X \times Y$ *– h-однородное пространство.*

В следующей теореме описывается любопытный признак гомеоморфности двух *h*-однородных пространств.

Теорема 6. *Пусть даны два h-однородных пространства X и Y первой категории, каждое из которых гомеоморфно* F_{σ}*-множеству другого пространства. Тогда X и Y – гомеоморфные пространства*.

Приведённые выше результаты показывают, что класс *h*-однородных пространств представляет собой интересный объект для исследования.

Библиографический список

1. Dow A. Homogeneity in powers of zero-dimensional first-countable spaces / A. Dow, E. Pearl // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 125, №. 8. Pp. 2503–2510.

2. Medvedev, S.V. On properties of h-homogeneous spaces with the Baire property / S.V. Medvedev // Topology Applic. 2012. Vol. 159. Pp. 679–694.

3. Медведев С.В. Признаки h-однородности пространства / С.В. Медведев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Физика. Механика». – 2012. – Вып. 7. – № 34(293). – С. 31–32.

К содержанию