УДК 519.642.6:577.3 + 517.968:577.3

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ БИОФИЗИКИ

***А.Н. Пермина***

В работе исследуется система двух нелинейных интегральных уравнений. Рассмотрены некоторые ограничения на параметры для линеаризованной системы, обеспечивающие однозначную разрешимость последней.

Ключевые слова: система интегральных уравнений Вольтерра первого рода, однозначная разрешимость системы интегральных уравнений.

## Введение

Анализ результатов прижизненного измерения содержания $^{90}Sr$ в эмали передних зубов позволяет ретроспективно восстанавливать динамику поступления радионуклидов в организм человека в результате внутреннего облучения [1, 2].

Восстановление динамики поступления $^{90}Sr$ в организм человека на основе измерения зубным детектором $Y(T)$-поверхностной $\beta$-активности эмали передних постоянных зубов, использует известную связь между показаниями счетчика $\beta$-частиц и характеристиками процесса обмена $^{90}Sr$ [1]:

$$Y(T)=\beta\int_{t_0}^{t_u}\alpha(t-U+10,t)x(t)k(t-T)R(t-T,t_u-t)dt, \quad T_{\min}\le T\le T_{\max}, \qquad (1)$$

здесь $\beta$ – масштабный коэффициент (количество отсчетов, приходящееся на единицу активности в зубах); $\alpha(t-T,t)$ – отношение поступления $^{90}Sr$ детям к поступлению взрослым, функция получена в результате экспертного оценивания определенных биофизических процедур; $x(t)$ – скорость поступления $^{90}Sr$ в момент времени $t$; $k(t-T)$ – коэффициент перехода $^{90}Sr$ из желудочно-кишечного тракта в эмаль передних зубов, $R(t-T,t_u-t)$ – функция удержания, т.е. доля $^{90}Sr$ в эмали передних постоянных зубов по истечении некоторого времени после однократного поступления; $t_u$ – момент измерения активности эмали зубов; $t_0$ – момент начала поступления $^{90}Sr$ в организм.

Определению подлежат функции $x(t)$ и $k(t)$, описывающие динамику поступления $^{90}Sr$ в организм человека.

**Постановка задачи**

Рассмотрим уравнение (1). После некоторых несложных преобразований ([2]), уравнение (1) может быть сведено к системе уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(U)=\int_0^U \alpha(t-U+10,t)k(t-U+10)z(t)dt, \quad 0\le U\le 10 \\ \phi(U)=\int_0^V \alpha(t,t-V+10)k(t)z(t-V+10)dt, \quad 0\le V\le 10 \\ k(0)=1 \end{cases}, \qquad (2)$$

исследование которой и есть основная задача настоящей работы.

**Линеаризация системы**

Полученную систему (2) запишем в операторном виде:

$$Af=\Phi, \qquad (3)$$

где $A = \begin{bmatrix} A_1(f) \\ A_2(f) \end{bmatrix}$ – нелинейный интегральный оператор, задаваемый первыми двумя равенствами из соотношения (2); $f = \begin{bmatrix} k(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ – векторная функция неизвестных; $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(U) \\ \phi(U) \end{bmatrix}$ – вектор правых частей системы.

Для исследования задачи (3) применим итерационный метод Ньютона-Канторовича [4], позволяющий линеаризовать рассматриваемую задачу в окрестности некоторого начального приближения $f_0 = \begin{bmatrix} k_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$.

Подробнее, полагая $f = f_0 + \Delta f$, перейдем от нелинейного уравнения (3) относительно $f$ к линейному уравнению относительно поправки $\Delta f$ :

$$A'(f_0)\Delta f = -A(f_0) + \Phi.$$

Здесь $A'(f_0)$ – линейный оператор (производная оператора по Фреше [5]).

Следовательно, уравнение (3) представляет собой систему двух линейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода относительно компонент $(\Delta k, \Delta z)$ векторной поправки $\Delta f$ :

$$\begin{cases} \int\limits_0^U \alpha(t-U+10,t)\Delta k(t-U+10)z_0(t)dt + \int\limits_0^U \alpha(t-U+10,t)k_0(t-U+10)\Delta z(t)dt = \\ = \varphi(U) - \int\limits_0^U \alpha(t-U+10,t)k_0(t-U+10)z_0(t)dt, \\ \int\limits_0^V \alpha(t,t-V+10)\Delta k(t)z_0(t-V+10)dt + \int\limits_0^V \alpha(t,t-V+10)k_0(t)\Delta z(t-V+10)dt = \\ = \phi(V) - \int\limits_0^V \alpha(t,t-V+10)k_0(t)z_0(t-V+10)dt, \\ \Delta k(0) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Процедура решения представляет из себя итерационный процесс, начинающийся в некоторой начальной точке $f_0$ и реализуемый в соответствии с правилом $f_{N+1} = f_N + \Delta f$ . На каждом шаге итерации мы получаем систему линейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода – (4). Поправка $\Delta f$ определяется на каждом шаге процедуры как решение линейной системы (4). Проблему решения данной системы рассмотрим подробнее.

**Существование и единственность решения линейной системы интегральных уравнений**

После некоторых несложных переобозначений сведем систему (4) к следующей системе линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода:

$$\begin{cases} \varphi_1(s) = \int\limits_a^s [K_{11}(s,t)x_1(t) + K_{12}(s,t)x_2(t)]dt \\ \varphi_2(s) = \int\limits_a^s [K_{21}(s,t)x_1(t) + K_{22}(s,t)x_2(t)]dt \\ x_1(0) = 0, \quad a \le t \le s \le b, \end{cases} \tag{5}$$

для которой доказана следующая теорема.

***Теорема.*** Пусть выполнены следующие условия:

*1. Все рассматриваемые функции непрерывны на* $[a,b]$*, причем функции* $\varphi_1(s),\varphi_2(s),K_{11}(s,t),K_{12}(s,t),K_{21}(s,t),K_{22}(s,t)$ *имеют некоторое число* $p$ *непрерывных производных;*

*2.* $\varphi_1(a)=0, \varphi_2(a)=0;$

*3.* $\min\limits_{s\in[a,b]}\left\{\|K_{11}(s,s)\|_{L_2},\|K_{12}(s,s)\|_{L_2},\|K_{21}(s,s)\|_{L_2},\|K_{22}(s,s)\|_{L_2}\right\} = k \ne 0;$

*4.* $\|\varphi_1(s)\|_{L_2} \le k_1, \|\varphi_2(s)\|_{L_2} \le k_2;$

*5.* $c'_{11} \le \|K_{11}\|_{L_2} \le c_{11}, \|K_{12}\|_{L_2} \le c_{12}, c'_{22} \le \|K_{22}\|_{L_2} \le c_{22}, \|K_{21}\|_{L_2} \le c_{21}$*, причем:* $c_{12}, c_{21} < c'_{11}, c'_{22} \le c_{11}, c_{22};$

*Тогда система (3) разрешима единственным образом.*

*Доказательство*

Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[a,b]$: $h = \dfrac{b-a}{n}$, полагая $t_0 = a, t_i = t_{i-1} + h, i = 1,2,...,n-1; t_n = b$ – узлы дискретизации. Система (5) преобразуется в выражение:

$$\begin{cases} \varphi_1(s_j) = \int\limits_a^{s_i} \left[K_{11}(s_j,t)x_1(t) + K_{12}(s_j,t)x_2(t)\right]dt, \\ \varphi_2(s_j) = \int\limits_a^{s_i} \left[K_{21}(s_j,t)x_1(t) + K_{22}(s_j,t)x_2(t)\right]dt, \end{cases} \quad j = 1,...,n. \tag{6}$$

Применим к системе (6) квадратуру средних прямоугольников, или средней точки. Система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(s_j) = h\sum\limits_{i=1}^n \left[K_{11}(s_j,\xi_i)x_1(\xi_i) + K_{12}(s_j,\xi_i)x_2(\xi_i)\right], \\ \varphi_2(s_j) = h\sum\limits_{i=1}^n \left[K_{21}(s_j,\xi_i)x_1(\xi_i) + K_{22}(s_j,\xi_i)x_2(\xi_i)\right], \end{cases} \quad j = 1,...,n.$$

Здесь $\xi_i = \dfrac{1}{2}(t_{i-1} + t_i) = t_{i-1} + \dfrac{h}{2} = t_i - \dfrac{h}{2}$.

Введем обозначения: $K_{11}(s_j,\xi_i) = K_{11}^{ji}$, $K_{12}(s_j,\xi_i) = K_{12}^{ji}$, $K_{21}(s_j,\xi_i) = K_{21}^{ji}$, $K_{22}(s_j,\xi_i) = K_{22}^{ji}$, $x_1(\xi_i) = x_1^i$, $x_2(\xi_i) = x_2^i$, $\varphi_1(s_j) = \varphi_1^j$, $\varphi_2(s_j) = \varphi_2^j$.

Получим систему:

$$\begin{cases} \varphi_1^j = h\sum_{i=1}^{n}\left[K_{11}^{ji}x_1^i + K_{12}^{ji}x_2^i\right], \\ \varphi_2^j = h\sum_{i=1}^{n}\left[K_{21}^{ji}x_1^i + K_{22}^{ji}x_2^i\right], \end{cases} \quad j = 1,\ldots,n. \tag{7}$$

Решив эту систему, найдем $x_1^i$ и $x_2^i$ – значения неизвестных функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в узлах дискретизации.

Матрица $A$ системы имеет блочно-нижне-треугольный вид, система (7) имеет решение и оно единственно, если $\det A \neq 0$ . Рассмотрим промежуточную лемму.

***Лемма.*** *Пусть матрица* $K$ *– блочно-нижне-треугольная, размера* $2n \times 2n$, *размер блоков –* $n \times n$. *Тогда:*

$$\det K = h\prod_{i=1}^{n}(K_{i,i}K_{i+n,i+n} - K_{i,i+n}K_{i+n,i}),$$

*где* $K_{i,j}$ *– элементы матрицы* $K$ (без доказательства).

Применим утверждение леммы к матрице $A$ системы (7):

$$\det A = h\prod_{i=1}^{n}(K_{11}^{ji}K_{22}^{ji} - K_{12}^{ji}K_{21}^{ji}).$$

Из условий теоремы (пункт 5) следует, что $K_{11}^{ji}K_{22}^{ji} \neq K_{12}^{ji}K_{21}^{ji}$, следовательно, $\det A \neq 0$ и система (7) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Решение системы (7) задает значения неизвестных функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ в узлах разбиения отрезка $[a,b]$.

Оценка погрешности при решении линеаризованной системы может быть произведена стандартными методами (например [3]).

Библиографический список

1. Degteva M., Kozheurov V., Tolstykh E. et all. The Techa river dozimetry system // Health Phys. 2000. V. 79, № 1. Pp. 24–35.

2. V.I. Zalyapin, V.A. Krivoschapov, M.O. Degteva. Numerical solution of an applied biophysics inverse problem // Inverse problem in Science&Engineering. 2004. V. 12. № 4. Pp. 379–392.

3. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев, 1986. – С. 19–137.

4. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

5. Вайнберг, М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг. – М.: Наука, 1972. – 28 с.