УДК 519.833

О РАВНОВЕСИИ БЕРЖА-ПАРЕТО

К.Н. Кудрявцев

Приводятся достаточные условия существования равновесия по Бержу, максимального по Парето по отношению ко всем остальным таким равновесиям. Предлагается алгоритм построения такого равновесия, основанный на использовании специального вида свертки Гермейера.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, равновесие по Бержу, максимум по Парето.

Прямая противоположность равновесию по Нэшу – концепция равновесия в бескоалиционной игре *N* лиц, основанная на «альтруистическом подходе», была предложена Клодом Бержем в 1957 г. в монографии [1]. Однако эта книга вызвала резкую рецензию Мартина Шубика [2], где акцентировалось, что в [1] «никакого внимания не уделено приложению к экономике. ... книга мало интересна для экономистов». Такая рецензия, признанного научного авторитета «отпугнула» от [1] западных специалистов по теории игр и экономике. Строгая математическая формализация идей Бержа была предложена только в 1994 г. В.И. Жуковским и К.С. Вайсманом [3–5]. В последнее время эта концепция все шире распространяется и за рубежом (см., например, обзор [6]). Стоит отметить, что устоявшимися терминами в западной литературе стали *равновесие Бержа-Жуковского* (названное в [3] равновесием по Бержу) и равновесие *Бержа-Вайсмана* (равновесие по Бержу, для которого выполнено условие индивидуальной рациональности).

Итак, рассмотрим бескоалиционную игру *N* лиц:

$$\left\langle \mathrm{N}, \left\{ \mathrm{X}_i \right\}_{i\in\mathrm{N}}, \left\{ f_i\left(x\right) \right\}_{i\in\mathrm{N}} \right\rangle. \qquad (1)$$

Здесь $\mathrm{N}=\left\{1,2,...,N\right\}$ – множество порядковых номеров игроков, каждый из игроков, не согласовывая своих действий с остальными игроками, выбирает свою *стратегию* x_i из множества стратегий $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{R}^{n_i}$, в результате такого выбора складывается *ситуация* $x=\left(x_1,x_2,...,x_N\right)\in \mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times \mathrm{X}_2\times ...\times \mathrm{X}_N$ игры (1), на множестве всех таких ситуаций определена скалярная функция выигрыша *i*-го игрока $f_i\left(x\right)$ $\left(i=1,2,...,N\right)$, значение которой на реализовавшейся ситуации называется выигрышем *i*-го игрока. Далее будем применять обозначения $\left(x\|z_i\right)=\left(x_1,...,x_{i-1},z_i,x_{i-1},...x_N\right)$ и $f=\left(f_1,...,f_N\right)$.

Определение 1. Пара $\left(x^B, f^B\right)=\left(\left(x_1^B,...,x_N^B\right),\left(f_1\left(x^B\right),...,f_N\left(x^B\right)\right)\right)\in \mathrm{X}\times \mathrm{R}^N$ называется [3] *равновесием по Бержу* в игре (1), если:

$$\max_{x\in X} f_i\left(x\|x_i^B\right)=f_i\left(x^B\right)\quad\left(i\in\mathbf{N}\right);\tag{2}$$

далее x^B называется *ситуацией равновесия по Бержу* в игре (1), а через X^B обозначим все множество таких ситуаций x^B в (1).

Одним из негативных свойств ситуации равновесия по Бержу является внутренняя неустойчивость множества всех таких ситуаций. А именно, в игре (1) может существовать две ситуации равновесия по Бержу $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ таких, что при каждом $i\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство:

$$f_i\left(x^{(1)}\right)>f_i\left(x^{(2)}\right).$$

Отсюда следует, что игрокам в игре (1) нужно использовать не любую ситуацию равновесия по Бержу, а лишь ту, которая одновременно максимальна по Парето по отношению к остальным равновесным по Бержу ситуациям.

Определение 2. Ситуацию $x^*\in X$ назовем *равновесной по Бержу–Парето* в игре (1), если:

– во-первых, x^* равновесна по Бержу в игре (1), то есть удовлетворяет требованиям (2);

– во-вторых, x^* максимальна по Парето в N-критериальной задаче:

$$\left\langle X^B,\left\{f_i(x)\right\}_{i\in\mathbf{N}}\right\rangle,$$

то есть, при любых ситуациях $x\in X^B$ несовместна система неравенств:

$$f_i(x)\geq f_i\left(x^*\right)\quad\left(i\in\mathbf{N}\right),$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Для выявления достаточных условий существования равновесной по Бержу-Парето ситуации в игре (1) будем использовать метод, предложенный в [7] при построении Парето–равновесной ситуации, а именно рассмотрим N+1 скалярную функцию:

$$\varphi_i(x,z)=f_i\left(x\|z_i\right)-f_i(z)\quad\left(i\in\mathbf{N}\right),$$

и

$$\varphi_{N+1}(x,z)=\sum_{i\in\mathbf{N}}\left[f_i(x)-f_i(z)\right],$$

определенные на декартовом произведении $X\times Z$; здесь и далее ситуации $x=\left(x_1,...,x_N\right)\in X$, $z=\left(z_1,...,z_N\right)\in Z=X$, а $\left(x\|z_i\right)=\left(x_1,...,x_{i-1},z_i,x_{i+1},...,x_N\right)$.

Сверткой Гермейера функций $\varphi_j(x,z)$ $\left(j=1,...,N,N+1\right)$ называется [8] функция:

$$\varphi(x,z)=\max_{j=1,...,N+1}\varphi_j(x,z).$$

Лемма [8]. Если N+1 скалярные функции $\varphi_j(x,z)$ $(j=1,\dots,N,N+1)$ непрерывны на $\mathrm{X}\times\mathrm{Z}$, а множества $\mathrm{X},\mathrm{Z}\in\mathrm{comp}\,\mathrm{R}^n$, то их свертка Гермейера $\varphi(x,z)$ также непрерывна на $\mathrm{X}\times\mathrm{Z}$.

Далее, по функциям выигрыша $f_i(x)$ игры (1) построим гермейеровскую свертку:

$$\varphi(x,z)=\max\left\{\left[f_i(x\|z_i)-f_i(z)\quad(i\in\mathbf{N})\right],\left(\sum_{j\in\mathbf{N}}f_j(x)-\sum_{j\in\mathbf{N}}f_j(z)\right)\right\},\qquad(3)$$

заданную на $\mathrm{X}\times(\mathrm{Z}{=}\mathrm{X})$.

Игре (1) сопоставим вспомогательную антагонистическую игру:

$$\left\langle\mathrm{X},\mathrm{Z}{=}\mathrm{X},\varphi(x,z)\right\rangle.\qquad(4)$$

Седловая точка $(x^0,z^B)\in\mathrm{X}\times\mathrm{Z}$ в игре (4) определяется цепочкой неравенств:

$$\varphi(x,z^B)\le\varphi(x^0,z^B)\le\varphi(x^0,z)\qquad\forall x,z\in\mathrm{X}.$$

Теорема 1. Если в антагонистической игре (4) существует седловая точка (x^0,z^B), то минимаксная стратегия (x^0,z^B) является равновесной по Бержу–Парето ситуацией в бескоалиционной игре (1).

Доказательство теоремы 1 приведено в [9].

Отметим, что теорема 1 диктует следующий *алгоритм* построения равновесной по Бержу–Парето ситуации в бескоалиционной игре (1):

– *во-первых*, построить по формулам (3) функцию $\varphi(x,z)$;

– *во-вторых*, найти седловую точку (x^0,z^B) функции $\varphi(x,z)$.

Тогда найденная ситуация $z^B\in\mathrm{X}$ как раз и будет равновесной по Бержу-Парето.

Достаточные условия существования равновесия Бержа–Парето в смешанном расширении игры (1) формулируются следующей теоремой [9]

Теорема 2. Если в игре (1) множества $\mathrm{X}_i\in comp\mathrm{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot)\in C(\mathrm{X})$ $(i\in\mathbf{N})$, то в этой игре существует ситуация равновесия по Бержу–Парето в смешанных стратегиях.

В заключении отметим, что концепцию равновесия по Бержу можно распространить и на бескоалиционные игры при неопределенности. В этом случае можно использовать два подхода: «аналог седловой точки» [10] и «аналог максимина» из [11].

Библиографический список

1. Berge, C. Theorie generale des jeux .a n personnes games / C. Berge. – Paris: Gauthier Villars, 1957. – 114 p.

2. Shubik, M. Review of C. Berge «General theory of n-person games» / M. Shubik // Econometrica. 1961. V. 29. № 4. P. 821.

3. Жуковский, В.И. Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – Киев.: Наукова Думка, 1994. – 320 с.

4. Vaisman, K.S. The Berge equilibrium for linear–quadratic differential game / K.S. Vaisman // Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts. The 3-d Intern. Workshop. Orekhovo-Zuevo, Russia. 1994. P. 96.

5. Vaisman, K.S. The Berge equilibrium under uncertainty / K.S. Vaisman, V.I.Zhukovskiy // Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts. The 3-d Intern. Workshop. Orekhovo-Zuevo, Russia. 1994. Pp. 97–98.

6. Colman, A.M. Mutual support in games: Some properties of Berge equilibria / A.M. Colman, T.W. Korner, O. Musy and T. Tazdait // Journal of Mathematical Psychology. 2011. V. 55. № 2. Pp. 166–175.

7. Жуковский, В.И. Парето-равновесная ситуация: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 74–91.

8. Гермейер, Ю.Б. Введение в теорию исследования операций / Ю.Б. Гермейер. – М: Наука, 1971. – 384 с.

9. Жуковский, В.И. Математические основы золотого правила. I. Статический вариант / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения (в печати).

10. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 27–44.

11. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 3–45.