УДК 517.929.2

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.А. Комиссарова

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости линейного разностного уравнения. Ранее были известны более ограничительные признаки устойчивости.

Ключевые слова: устойчивость, разностное уравнение, область устойчивости.

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка k:

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}\,, \tag{1}$$

где $a_i \in R \;\; (1 \le i \le k)$, $x_n : N \mapsto R$.

Под асимптотической устойчивостью уравнения (1) будем понимать асимптотическую устойчивость его нулевого решения.

Доказана следующая теорема [1,2].

Теорема 1. Если $a_i \ge 0 \;\; (1 \le i \le k)$ и

$$0 < \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2\sin\dfrac{\pi}{2(2i-1)}} < 1, \tag{2}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 не означает, что условие (2) является необходимым для устойчивости уравнения (1). Теорема 1 определяет симплекс, являющийся подмножеством области устойчивости уравнения (1). Вообще говоря, границы области устойчивости уравнения (1) не выпуклы.

Доказана невозможность увеличения хотя бы одного из знаменателей в неравенстве (2) с сохранением устойчивости уравнения (1).

Поскольку:

$$2\sin\frac{\pi}{2(2i-1)} > \frac{\pi}{2i}\,, \quad i \in N\,,$$

из теоремы 1 получаем следующий, более простой признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема 2. Если $a_i \ge 0 \;\; (1 \le i \le k)$ и

$$0 < \sum_{i=1}^{k} i a_i \le \frac{\pi}{2}\,, \tag{3}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 2 является аналогом результата, полученного Вагиной и Кипнисом [3] относительно дифференциальных уравнений.

Следующая теорема является следствием теорем 1 и 2.

Теорема 3. Если $a_i \geq 0$ для всех $i \in N$ и

$$0 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2\sin\dfrac{\pi}{2(2i-1)}} < 1$$

или

$$0 < \sum_{i=1}^{\infty} i a_i \leq \frac{\pi}{2},$$

то разностное уравнение Вольтера:

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{n-i}$$

асимптотически устойчиво.

Константа $\pi/2$ в правой части неравенства (3) неулучшаема. Однако если допустить, чтобы правая часть в неравенстве (3) зависела от порядка уравнения, то получим следующий признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема 4. Если $a_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq k)$ и

$$0 < \sum_{i=1}^{k} i a_i < 2k \sin\frac{\pi}{2(2k-1)}, \tag{4}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Правая часть неравенства (4) также неулучшаема.

Библиографический список

1. Kipnis, M.M. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations / M.M. Kipnis, D.A. Komissarova // J. Difference Equ. Appl. 2007. V. 13, № 5. Pp. 457–461.

2. Комиссарова, Д.А. Простое условие асимптотической устойчивости для разностного уравнения x(n)=x(n-1)-ax(n-m)-bx(n-k) / Д.А. Комиссарова, М.М. Кипнис // Изв. Челябинского науч. центра. – 2007. – Вып. 1(35). – С. 1–4.

3. Вагина, М.Ю. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями / М.Ю. Вагина, М.М. Кипнис // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74. – Вып. 5. – С. 786–789.

К содержанию