УДК 517.956.32 + 517.95

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МАНЖЕРОНА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В.В. Карачик

Рассматривается задача Гурса для уравнения Манжерона высокого порядка с постоянными коэффициентами. Доказана теорема о разрешимости поставленной задачи и о представлении решения.

Ключевые слова: задача Гурса, уравнение Манжерона.

Многие задачи математической физики, связанные с явлениями вибрации, приводятся к уравнениям Манжерона [1]. Рассмотрим линейное уравнение Манжерона с постоянными коэффициентами

$$M(D_n)u(x) \equiv \left(D_n^m + a_1 D_n^{m-1} + \cdots + a_m\right)u(x) = f(x), \quad x \in R_+^n, \tag{1}$$

в котором $D_n = \partial^n / \partial x_1 \cdots \partial x_n$, $a_i \in C$, а функция $f(x)$ определена в R_+^n.

Исследуем для уравнения (1) задачу Гурса с условиями:

$$D_n^k u_{|x_i=0} = \varphi_{k,i}(x_{(i)}), \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{0,m-1}, \tag{2}$$

где обозначено $x_{(i)} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Решение $u(x)$ будем искать из класса $u \in C^{m\varepsilon}(R_+^n)$, $D_n^k u \in C(\overline{R}_+^n)$, $k = \overline{0,m-1}$, а гладкость функций $f(x)$ и $\varphi_{k,i}(x_{(i)})$ будет конкретизирована ниже. Здесь $\varepsilon = (1, \ldots, 1)$.

Частный случай задачи (1)-(2) при $\varphi_{k,i} = C_k$ исследовался в [2], а при $C_0 = 1$, $C_k = 0$ в [1]. Задачи Коши и Гурса для уравнения третьего порядка с оператором Манжерона D_3 исследовались в [3], а при $n = 1$ в [4]. Задача (1)–(2) вкладывается в класс задач B из [5, с. 128] и сводится к решению простейшей задачи:

$$D_n u(x) = F(x), x \in R_+^n; \quad u_{|x_i=0} = \psi_i(x_{(i)}), \ i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Пусть D – некоторая открытая область из R_+^n, удовлетворяющая условию звездности $\forall x \in \mathrm{D}$, $\forall t \in (0,1]$, $tx \in \mathrm{D}$. Введем функцию:

$$S_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_1^{k,!} \cdots x_n^{k,!},$$

а также класс функций:

$$C_0(\mathrm{D}) = \left\{u \in C(\mathrm{D}) : \int_0^x |u(\tau)|\, d\tau < \infty, x \in \mathrm{D}\right\},$$

где обозначено $\int_0^x u(\tau)\, d\tau = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} u(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, d\tau_n \cdots d\tau_1$.

Лемма 1. Всякое решение уравнения:

$$(D_n - \lambda)u(x) = f(x), \quad x \in \mathrm{D}. \tag{4}$$

из класса $u \in C^{\varepsilon}(\mathrm{D}) \cap C_0(\mathrm{D})$, при $f \in C_0(\mathrm{D})$ и $\lambda \in C$, может быть записано в виде:

$$u(x) = v_{\lambda}(x) + \int_0^x S_{\lambda}(x-\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где $v_{\lambda} \in C_0(\mathrm{D})$ – решение однородного уравнения (4), а интеграл понимается как несобственный.

Следствие 1. Всякое классическое решение однородного уравнения (4) из класса $C_0(\mathrm{D})$ может быть записано в виде:

$$v_{\lambda}(x) = v_0(x) + \lambda \int_0^x S_{\lambda}(x-\tau) v_0(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

где $v_0 \in C_0(\mathrm{D})$.

Приступим к построению решения задачи (1)–(2). Определим множества $\Gamma = \overline{R}^n_+ \setminus R^n_+$, $\Gamma_i = \Gamma \cap \{x \in R^n : x_i = 0\}$. Очевидно, что $\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma_i$. Введем на Γ функции φ_k, задав их по формуле $\varphi_k(x) = \varphi_{k,i}(x_{(i)})$, когда $x \in \Gamma_i$ и $x = x_{(i)}$. Аналогично определим функцию $\psi(x)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – корни полинома $M(\lambda)$ и

$$P_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) = \sum_{|\alpha|=k} \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_s^{\alpha_s}, \quad Q_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) = \sum_{||\alpha|=k, \alpha_i = 0,1} \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_s^{\alpha_s},$$

причем, $Q_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ при $s = 0$ будем считать единицей.

Лемма 2. Решение задачи (1)-(2) существует и записывается в виде:

$$u(x) = v_{\lambda_1}(x) + \int_0^x S_{\lambda_1}(x-\tau) v_{\lambda_2}(\tau)\, d\tau + \int_0^x S_{\lambda_1}(x-\tau) \cdots \int_0^s S_{\lambda_m}(s-t) f(t)\, dt..d\tau, \tag{7}$$

где:

$$v_{\lambda_i}(x) = v_0^{(i)}(0) + \lambda_i \int_0^x S_{\lambda_i}(x-\tau) v_0^{(i)}(\tau)\, d\tau, \tag{8}$$

если $f \in C_0(R^n_+)$, а $v_0^{(i)}(x)$ является решением задачи (3) при $F(x) = 0$,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k Q_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}) \varphi_{i-k-1}(x) \tag{9}$$

и $v_0^{(i)} \in C^{(m-i+1)\varepsilon}(R^n_+) \cap C(\overline{R}^n_+)$.

Исследуем разрешимость задачи (3) при $k \geq 1$ в классе функций $u \in C^{k\varepsilon}(R^n_+) \cap C(\overline{R}^n_+)$. Решение задачи (3) при F и ψ – аналитических в R^n_+ получено в [5, с. 128].

Лемма 3. Если $F \in C^{(k-1)\varepsilon}(R_+^n) \cap C_0(R_+^n)$ и $\psi_{i|x_{i_1}=\cdots=x_{i_j}=0} \in C^{k\varepsilon}(R_+^{n-j+1})$ для различных $i, i_1, \ldots, i_j$, принимающих значения от 1 до n, $\psi_i \in C(\overline{R}_+^{n-1})$, $\psi_{i|x_j=0} = \psi_{j|x_i=0}$, то решение задачи (3) из класса $C^{k\varepsilon}(R_+^n) \cap C(\overline{R}_+^n)$ существует, единственно и записывается в виде:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} \psi_{i_j|x_{i_1}=\cdots=x_{i_{j-1}}=0} + \int_0^x F(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Подытожим проведенные исследования. Обозначим $U_1(x) = S_{\lambda_1}(x)$:

$$U_k(x) = \int_0^x S_{\lambda_1}(x-\tau) \cdots \int_0^s S_{\lambda_{k-1}}(s-t) S_{\lambda_k}(t)\, dt \cdots d\tau,\ k = \overline{2,m}.$$

Теорема 1. Решение задачи (1)–(2) существует, если $f \in C_0(R_+^n)$, для различных $i, i_1, \ldots, i_j$, принимающих значения от 1 до n, выполнены условия $\varphi_{k,i|x_{i_1}=\cdots=x_{i_j}=0} \in C^{m-k+1}(R_+^{n-j+1})$ и кроме того $\varphi_{k,i} \in C(\overline{R}_+^{n-1})$ и $\varphi_{k,i|x_j=0} = \varphi_{k,j|x_i=0}$ для $k = \overline{0, m-1}$. Решение задачи единственно и может быть записано в виде:

$$u(x) = v_{\lambda_1}(x) + \int_0^x U_1(x-\tau) v_{\lambda_2}(\tau)\, d\tau + \cdots + \int_0^x U_m(x-\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

где функции $v_{\lambda_i}(x)$ должны находиться из (8), а $v_0^{(i)}(x)$ из (10) при $u(x) = v_0^{(i)}(x)$, $F(x) = 0$ и $\psi(x)$, взятой из (9).

Доказательство. С помощью леммы 2 сведем решение задачи (1)–(2) к решению задачи (3). Справедлива формула (7). Функции $v_0^{(i)}(x)$ должны находиться из (10) при $F(x) = 0$ и $\psi(x)$ взятой из (9). Используя равенство:

$$\int_0^x S_{\lambda_1}(x-\tau) \cdots \int_0^s S_{\lambda_k}(s-t) \psi(t)\, dt \cdots d\tau = \int_0^x U_k(x-\tau) \psi(\tau)\, d\tau,$$

справедливое для $\psi \in C_0(R_+^n)$, приведем (7) к виду (11). Необходимая гладкость решения $u(x)$, в силу лемм 2 и 3, обеспечивается требуемой гладкостью функций f и $\varphi_{k,i}$. Единственность $u(x)$ следует из того, что всякое решение уравнения (1), имеющее требуемую в условии гладкость, имеет вид (7), а решение задачи (3), в силу леммы 3, единственно.

В качестве примера применения теоремы 1 рассмотрим случай задачи (1)–(2), когда $\varphi_{k,i} = C_k$ [2]. Пусть $f \in C_0(R_+^n)$. Условия теоремы 1, налагаемые на функции $\varphi_{k,i}$, очевидно, выполнены. Найдем функцию $v_\lambda(x)$, если $v_{\lambda|\Gamma} = C$. Так как при $j = \overline{1,s}$ верно равенство:

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le s} 1 = \binom{s}{j},$$

то из (10) при $\psi(x)=C,\ F(x)=0,\ u(x)=v_0(x)$, будем иметь:

$$v_0(x) = C\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j} = C,$$

а значит, согласно (6), будет $v_\lambda(x)=S_\lambda(x)$. Введем числа:

$$A_{k+1} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i Q_i(\lambda_1,\dots,\lambda_k)C_{k-i},$$

для $k=\overline{1,m-1}$ и $A_1=C_0$. Применим теорему 1. Из нее следует, что решение задачи (1)–(2) при $f\in C_0(R_+^n),\ \varphi_{k,i}=C_k$ существует и записывается в виде:

$$u(x) = U(x) + \int_0^x U_m(x-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где функция $U(x)=\sum_{k=1}^{m} A_k U_k(x)$ является решением задачи (1)–(2) при $f(x)=0$. Полученная формула легко выводится из (11), если заметить, что:

$$U_{k+1}(x) = \int_0^x U_k(x-\tau)S_{\lambda_{k+1}}(\tau)\,d\tau.$$

Функция $U(x)$ может быть записана и в ином виде. Пусть полином $M(\lambda)$ имеет l различных корней, а $k_1,\dots,k_l$ – их кратности. Рассмотрим $u(t)$ – решение задачи (1)–(2) при $n=1,\ f(t)=0$, записанное в виде:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k_i-1} B_i^{(j)} t^{j,!}\exp(\lambda_i t).$$

Очевидно, что при $n=1$ задача (1)–(2) превращается в задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (1) [4]. Если обозначить:

$$S_\lambda^{(k)}(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}S_\lambda(x),$$

то будем иметь:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k_i-1} B_i^{(j)} S_{\lambda_i}^{(j)}(x).$$

Это утверждение легко получить, используя единственность решения задачи (1)–(2) при $f(x)\equiv 0$, равенств:

$$(D_n-\lambda)S_\lambda^{(0)}(x)=0,\ (D_n-\mu)S_\lambda^{(j)}(x) = S_\lambda^{(j-1)}(x)+(\lambda-\mu)S_\lambda^{(j)}(x), \quad j\ge 1$$

и свойства $S^{(0)}_{\lambda|\Gamma}=1$, $S^{(j)}_{\lambda|\Gamma}=0$ при $j>1$.

В заключение хочется отметить, что для вычислений более удобна форма представления функции $U(x)$, найденная в [5, с. 128] и [7, п. 2.1]. Основное ее преимущество в том, что для ее задания не требуется нахождение корней полинома $M(\lambda)$. Похожая формула была получена также в работах [4] и [8] для нахождения решения задачи Коши для линейных обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами и нахождения полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения. В работах [9, 10, 11] с помощью нормированных систем функций строились решения задач Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения в шаре.

Библиографический список

1. Oguztoreli, M.N. Goursat problem for a high order Mangeron equation / M.N. Oguztoreli, S.A. Easwaran // Rend. Acad. Naz. Lincei, 1971. V. L. Pp. 322–325.
2. Бондаренко, Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных / Б.А. Бондаренко. – Ташкент: Фан, 1987. – 147 с.
3. Карачик, В.В. Задачи Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка / В.В. Карачик // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7. № 2. – С. 31–43.
4. Карачик, В.В. Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В.В. Карачик // ЖВМиМФ. – 2012. – Т. 52, № 2. – С. 237–252.
5. Карачик, В.В. Метод нормированных систем функций / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.
6. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications /V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V. 287. No. 2. Pp. 577–592.
7. Карачик, В.В. Разработка теории нормированных систем функций и их применения к решению начально-краевых задач для уравнений в частных производных: дис. … д-ра физ.-мат. Наук В.В. Карачик. – Ташкент, 2001. – 213 с.
8. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – № 10 (227). – С. 4–17.
9. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 250–254.
10. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1149–1170.
11. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1455–1461.