УДК 517.53/.55 + 517.5

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.М. Адуков, А.С. Фадеева

В докладе изучается устойчивость задачи факторизации Винера – Хопфа для треугольной матрицы-функции второго порядка при малых возмущениях, сохраняющих треугольную структуру матрицы. Получен эффективно проверяемый критерий устойчивости частных индексов. Результаты могут быть использованы для разработки устойчивых алгоритмов приближенного решения задачи факторизации.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, задача факторизации Винера – Хопфа, матричная краевая задача Римана, частные индексы.

В теории краевой задачи Римана для вектора классическим результатом является теорема Гохберга – Крейна – Боярского [1] об устойчивости частных индексов: правые частные индексы $\rho_1 \le \ldots \le \rho_n$ матрицы-функции $A(t)$ порядка n устойчивы тогда и только тогда, когда $\rho_n - \rho_1 \le 1$.

Поскольку до настоящего времени в общем случае нет способов вычисления частных индексов, эта теорема не может быть использована для эффективной проверки устойчивости. Кроме того, для приложений важно иметь критерий устойчивости не только для произвольных малых возмущений матрицы-функции, но и для тех из них, которые сохраняют структуру данной матрицы-функции. В докладе получен такой эффективный критерий для класса треугольных матриц-функций второго порядка.

Пусть $A(t)$ – треугольная обратимая матрица-функция вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix},$$

с элементами из алгебры Винера W. Построим факторизацию Винера – Хопфа ее диагональных элементов:

$$a_{11}(t) = a_{11}^{-}(t) t^{\nu_1} a_{11}^{+}(t),\ a_{22}(t) = a_{22}^{-}(t) t^{\nu_2} a_{22}^{+}(t);$$

функцию $\dfrac{t^{-\nu_1} a_{21}(t)}{a_{22}^{-}(t) a_{11}^{+}(t)}$ разложим в ряд Фурье на $|t| = 1$:

$$\frac{t^{-\nu_1} a_{21}(t)}{a_{22}^{-}(t) a_{11}^{+}(t)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j t^j .$$

Теорема. *Если достаточно малое возмущение* $A(t)$ *сохраняет ее треугольную структуру, то при* $\nu = \nu_2 - \nu_1 \le 1$ *матрица-функция* $A(t)$ *имеет устойчивые индексы* $\rho_1 = \nu_1,\ \rho_2 = \nu_2$.

При $\nu \ge 2$ *индексы* $A(t)$ *устойчивы тогда и только тогда, когда теплицева матрица*

$$T = \begin{pmatrix} b_l & b_{l-1} & \cdots & b_1 \\ b_{l+1} & b_l & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \cdots & b_{\nu-l} \end{pmatrix},$$

имеет полный ранг l. *Здесь* $l = \left[\frac{\nu}{2}\right] - 1$ *и* $\left[\frac{\nu}{2}\right]$ *– целая часть числа* $\frac{\nu}{2}$. *При выполнении этого условия* $\rho_1 = \nu_1 + l,\ \rho_2 = \nu_2 - l$.

Доказательство теоремы основано на явных формулах для частных индексов, полученных в [2]. Отметим, что критерий устойчивости остается в силе для любых достаточно малых возмущений $A(t)$.

Библиографический список

1. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

2. Адуков, В.М. О классах матриц-функций, допускающих явное решение задачи факторизации Винера – Хопфа / В.М. Адуков // Известия Челябинского научного центра. – 2008. – Вып. 3(41). – С. 12–17.

К содержанию