УДК 532.525

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Н.Л. Клиначева

Проведен сравнительный анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели «замороженной» газовзвеси и модели двухскоростной гетерогенной среды. Показано, что в случае «замороженной» газовзвеси неинвариантность уравнений этой модели проявляется в росте энтропии, что ведет к нарушению второго закона термодинамики. В случае двухскоростной среды неинвариантность проявляется достаточно слабо и практически не влияет на результаты расчетов.

Ключевые слова: математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь.

Широкое использование взрывных процессов в современной технике тесно связано с решением вопросов обеспечения защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим возникает необходимость изучения локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ посредством математического моделирования данных физических процессов.

При анализе математических моделей важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была инвариантна относительно преобразований Галилея.

В работах [1, 2] проведен анализ математической модели «замороженной» газовзвеси [3], которая активно используется при анализе затухания УВ в гетерогенных средах. В работе [4] предложена модификация изложенной в [3] математической модели «замороженной» газовзвеси, которая является инвариантной к преобразованиям Галилея.

Рассмотрим плоское одномерное движение УВ со спадающим профилем давления через слой взвеси твердых частиц, расположенной перед жесткой стенкой.

Математическое описание процесса распространения УВ в газовзвесях осуществляется в рамках обычных в механике многофазных сред предположений [5]. Система дифференциальных уравнений [6], без учета химических реакций, описывающая плоское одномерное нестационарное движение двухскоростной смеси идеального калорически совершенного газа и монодисперсных несжимаемых частиц, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - f \ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + f, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = q, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_1 v_1 E_1 + \rho_2 v_2 E_2 + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)p] = 0. \tag{5}$$

$$p = p_1(\overset{\circ}{\rho}_1, T_1) = p_2(\overset{\circ}{\rho}_2, T_2), \quad e_1 = e_1(\overset{\circ}{\rho}_1, T_1), \quad e_2 = e_2(\overset{\circ}{\rho}_2, T_2)\ ,$$

$$\rho_1 = \overset{\circ}{\rho}_1 \alpha_1, \qquad \rho_2 = \overset{\circ}{\rho}_2 \alpha_2\ , \ \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_i = e_i + \frac{v_i^2}{2} (i \ = \ 1,\ 2).$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; $\overset{\circ}{\rho}_i, \alpha_i$ (i = 1, 2) – истинные плотности и объемные содержания фаз; $\rho_i, v_i, T_i, e_i, E_i$ – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i-ой фазы; p – давление. Данная модель является инвариантной к преобразованиям Галилея [7].

В работе [8] представлена модель плоского одномерного движения монодисперсной аэровзвеси, для которой уравнение движение записано в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} = -\frac{3}{2}\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + f. \tag{6}$$

Исследование этой модели на инвариантность показало, что при переходе в новую систему координат в уравнении энергии появляется дополнительное слагаемое.

Численное исследование рассматриваемых моделей проводилось методом крупных частиц [9].

Начальные данные задачи формулируются следующим образом: при t=0 смесь воздух-железо находится в области $x_1 \leq x \leq x_2$ в нормальных условиях P_0=0,1 Мпа, ρ_0=1,21 кг/м^3, ρ_g=7800 кг/м^3, u_g=0, T=300^{o}K.

Граница x=x_1 является контактной границей между чистым газом и смесью с α>0. В момент t=0 на эту контактную границу вышла УВ, на фронте которой давление P_+=2 МПа. Все остальные величины на фронте находятся из условий Гюгонио ρ_+=5,631 кг/м^3, e_+=0,88794 МДж/кг, u_+=1,110333 км/с, E_+=0,70516 МДж/кг. Таким образом, на поверхности x=x_1 образовался произвольный разрыв (слева – газ, справа – смесь). При t > 0 он распадается с образованием УВ, прошедшей в смесь и отражённой ударной волны.

В области $0 \leq x \leq x_2$ в момент t = 0 задана волна разрежения с линейным профилем скорости:

$$u = u_+ \left(\frac{x}{x_1} \right).$$

Остальные величины определяются уравнениями:

$$C = C_+ - \frac{\gamma - 1}{2} u_+ \left(1 - \frac{x}{x_1} \right),$$

$$\rho = \rho_+ \left(\frac{C}{C_+} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \qquad e = e_+ \left(\frac{C}{C_+} \right)^2, \qquad P = (\gamma - 1)\rho e.$$

При $t \geq 0$ на правой границе $x = x_2$ задано условие непротекания для газа и условие свободного протекания для частиц, на левой границе при $x = 0$ условие свободного протекания для газа и для частиц.

Воздействие УВ на преграду можно охарактеризовать максимальным давлением отражения на преграде и импульсом избыточного давления на стенке преграды:

$$I = \int_0^t (p - p_0) d\tau.$$

В таблице приведены результаты расчетов исследуемых моделей для двух значений объемной доли частиц. Видно, что результаты практически совпадают. Таким образом, неинвариантность к преобразованиям Галилея второй модели практически не влияет на параметры течения, в отличие от модели «замороженной» газовзвеси [4].

Таблица 1

Результаты расчетов исследуемых моделей
для двух значений объемной доли частиц

α_2	Dмкм	$P_{max} \cdot 10^5$Па		I_{max} Па·с	
		Модель 1	Модель 2	Модель 1	Модель 2
0,001	100	8,023	8,024	1360,28	1360,42
	300	17,361	17,362	2631,45	2631,55
	600	22,569	22,569	3290,36	3290,30
0,01	100	1,088	1,088	29,493	29,526
	300	2,814	2,815	606,369	606,569
	600	4,952	4,953	949,005	949,155

Библиографический список

1. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6, № 11(270). – С. 4–7.

2. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27. – С. 69–73.

3. Кругликов, Б.С. Ослабление воздушных ударных волн экранирующими решётками / Б.С.Кругликов, А.Г. Кутушев // ФГВ. – 1988. – № 1. – С. 115–117.

4. Клиначева, Н.Л. Модифицированная математическая модель «замороженной» газовзвеси / Н.Л. Клиначева, Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 6. – С. 1398–1403.

5. Ивандаев, А.И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях / А.И. Ивандаев, А.Г. Кутушев, Р.И. Нигматулин // Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа». – 1981. – Т. 16. – С. 209–287.

6. Нигматулин, Р.И. Основы мехники гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978.

7. Ковалев, Ю.М. Математическая модель газовзвеси с химическими превращениями в приближении парных взаимодействий / Ю.М. Ковалев, Е.Е. Пигасов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 40–49.

8. Вайнштейн, П.Б. Нестационарные задачи горения аэровзвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматуллин // Известия АН СССР. Серия «Механика, жидкости и газа». – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

9. Белоцерковский, О.М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука, 1982.