

УДК 519.63+532.529.5

## О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОВЗВЕСЕЙ

*Ю.М. Ковалев, Е.Е. Пигасов*

В работе приводятся новая модификации метода крупных частиц в приложении к исследованиям течений газовзвесей. Показано, что предложенная модификация позволяют проводить расчеты поведения ударных волн в газовзвесах без введения в явном виде искусственной вязкости, что позволяет избежать искажения физической картины течения газовзвеси, связанной с наличием осцилляций.

Ключевые слова: численный метод, математическая модель, газовзвесь, законы сохранения, ударные волны, число Куранта.

### Введение

Появление новых математических моделей механики сплошных сред, с одной стороны, связано с отсутствием в природе чистых веществ, что требует активного развития математических моделей многокомпонентных сред. С другой стороны, развитие вычислительной техники позволяет получать численные решения для новых все более сложных математических моделей многокомпонентных сред. Несмотря на наличие большого числа вычислительных пакетов и увеличение быстродействия вычислительной техники, разработка эффективных численных методов для решения задач в рамках новых математических моделей механики сплошных сред в настоящее время является актуальной задачей. Успешное решение многочисленных задач газовой динамики и аэродинамики методом крупными частиц [1] и его модификациями [2] позволяет надеяться на то, что идеология метода может быть применена и для решения задач распространения ударных волн в газовзвесах. Поэтому целью данной работы является разработка модификации метода крупных частиц, которая позволит эффективно решать проблемы, связанные с распространением ударных волн в газовзвесах.

### 1. Математическая модель газовзвеси

Рассмотрим одномерный плоский случай математической модели течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений сохранения [3].

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - n f, \quad \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + n f, \quad (1.2)$$

$$\rho_1 \frac{d_1 e_1}{dt} = \frac{p \alpha_1}{(\rho_1^\circ)} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + n f (v_1 - v_2) - n q, \quad (1.3)$$

$$\rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = \frac{p \alpha_2}{(\rho_2^\circ)} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + n q \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} p &= p_1(\rho_1^\circ, T_1) = p_2(\rho_2^\circ, T_2), \quad e_1 = e_1(\rho_1^\circ, T_1), \quad e_2 = e_2(\rho_2^\circ, T_2) \\ \rho_1 &= \rho_1^\circ \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^\circ \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ E_i &= e_i + \frac{v_i^2}{2} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$f = \frac{\pi d^2 \rho_1^\circ c_d (v_1 - v_2) |v_1 - v_2|}{8}, \quad q = \pi d \lambda_1 Nu (T_1 - T_2). \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.1)–(1.6) замыкается уравнениями состояния газовой фазы и частиц:

$$e_1 = c_{v1}(T_1 - T_0) + C_0, \quad e_1 = \frac{p}{(k-1)\rho_1^\circ}, \quad e_2 = c_2(T_2 - T_0). \quad (1.7)$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам;  $\rho_i^\circ, \alpha_i (i = 1, 2)$  – истинные плотности и объемные содержания фаз;  $\rho_i, v_i, T_i, e_i, E_i$  – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия  $i$ -ой фазы;  $p$  – давление,  $n$  – число частиц в единице объема смеси;  $c_{v1}$  и  $c_2$  – теплоемкости фаз;  $C_0$  – постоянная для нормирования внутренней энергии газовой фазы;  $\lambda_1$  – теплопроводность газовой фазы;  $R_1$  – универсальная газовая постоянная;  $C_d$  и  $Nu$  – коэффициент трения и число Нуссельта, определяемые числами Рейнольдса ( $Re$ ) и Прандтля ( $Pr$ ) относительного движения фаз соответственно;  $k$  – показатель адиабаты Пуассона;  $d$  – диаметр частиц.

Уравнения (1.1) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (1.2) – уравнения импульса газа и частиц; (1.3) и (1.4) – уравнения сохранения внутренней энергии газа и частиц соответственно. (1.6) – уравнения, определяющие члены теплового ( $q$ ) и силового ( $f$ ) взаимодействия между фазами; (1.7) – уравнения состояния фаз. В данной работе не рассматриваются более сложные уравнения состояния [4].

Для того чтобы воспользоваться идеологией метода крупных частиц, необходимо получить уравнения кинетической энергии фаз.

Умножая уравнение сохранения импульса газовой фазы на  $v_1$ , а уравнение сохранения импульса конденсированной фазы на  $v_2$ , получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц, соответственно:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \frac{v_1^2}{2} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} \frac{v_1^2}{2} = -\alpha_1 v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - n f v_1, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} = -\alpha_2 v_2 \frac{\partial p}{\partial x} + n f v_2. \quad (1.9)$$

С учетом равенств (1.1) уравнения сохранения внутренней энергии газа (1.3) и частиц (1.4) в дивергентном виде запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = \frac{p \alpha_1}{(\rho_1^\circ)} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + n f (v_1 - v_2) - n q, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = \frac{p \alpha_2}{(\rho_2^\circ)} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + n q. \quad (1.11)$$

Из уравнений неразрывности газовой и конденсированной фаз (1.1) легко получить следующие равенства:

$$\alpha_1 \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} = -\rho_1^\circ \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} \right),$$

$$\alpha_2 \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} = -\rho_2^\circ \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} \right).$$

Подставляя данные выражения в уравнения (1.10) и (1.11) соответственно, получим:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = -p \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} \right) + n f (v_1 - v_2) - n q, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = -p \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} \right) + n q, \quad (1.13)$$

В случае несжимаемости конденсированной фазы уравнения сохранения внутренней энергии газовой (1.3) и конденсированной (1.4) фаз легко преобразуются к виду:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = -p \left( \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} \right) + n f (v_1 - v_2) - n q, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = n q, \quad (1.15)$$

Для получения уравнение сохранения полной энергии смеси просуммируем левые и правые части уравнений (1.8), (1.9), (1.14), (1.15). В результате получим уравнение сохранения полной энергии смеси в виде:

$$\frac{\partial (\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_1 v_1 E_1 + \rho_2 v_2 E_2 + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) p] = 0. \quad (1.16)$$

Система уравнений (1.1), (1.2), (1.5) – (1.7), (1.14) – (1.16) представляет собой замкнутую систему уравнений для описания течений газовзвесей, инвариантную относительно преобразования Галилея.

## 2. Некоторые модификации метода крупных частиц для расчета течений газозвеси

В соответствии с идеологией метода крупных частиц [1] систему законов сохранения газозвеси (1.1), (1.2), (1.5)–(1.7), (1.14)–(1.16) на эйлеровом этапе можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nf, \quad \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + nf, \quad (2.2)$$

$$\rho_1 \frac{\partial e_1}{\partial t} = -p \left( \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} \right) + nf(v_1 - v_2) - nq, \quad (2.3)$$

$$\rho_2 \frac{\partial e_2}{\partial t} = nq, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)p] = 0. \quad (2.5)$$

Учитывая несжимаемость конденсированной фазы ( $\rho_2^\circ = const$ ), запишем уравнения (2.1), (2.3), (2.5) в более удобном для представления на эйлеровом этапе виде:

$$\alpha_1 \frac{\partial \rho_1^\circ}{\partial t} = 0, \quad \rho_2^\circ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad \rho_1^\circ \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho_1 \frac{\partial e_1}{\partial t} = -p \left( \alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + nf(v_1 - v_2) - nq, \quad (2.7)$$

$$\rho_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial E_2}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial(v_1 p)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial(v_2 p)}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

Подставляя уравнение состояния газовой фазы (1.7) в уравнение (2.7) получим следующее базовое соотношение для определения давления на эйлеровом этапе:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{(k-1)}{\alpha_1} p \left( \alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{(k-1)}{\alpha_1} (nf(v_1 - v_2) - nq). \quad (2.9)$$

Используя явные разностные представления для равенства (2.9), легко получить выражения для определения предварительных значений давления на новом  $m+1$  временном слое на границах  $i-1/2$  и  $i+1/2$  для ячеек  $i-1$ ,  $i$  и  $i+1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i+1/2}^{m+1} &= \frac{p_{i+1}^m + p_i^m}{2} \left( 1 - \frac{(k-1)}{\alpha_{1,i+1/2}^m} (\alpha_{1,i+1/2}^m (v_{1,i+1}^m - v_{1,i}^m) + \right. \\ &+ \alpha_{2,i+1/2}^m (v_{2,i+1}^m - v_{2,i}^m)) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left. - \frac{(k-1)}{\alpha_{1,i+1/2}^m} (n_{i+1/2}^m q_{i+1/2}^m) \Delta t + \right. \\ &+ \left. \frac{(k-1)}{\alpha_{1,i+1/2}^n} (n_{i+1/2}^m f_{i+1/2}^m (v_{1,i+1/2}^m - v_{2,i+1/2}^m) \Delta t) \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $\Delta t$  – шаг по времени,  $\Delta x$  – шаг по пространству. Полученные значения давления используются для определения промежуточных величин скоростей на эйлеровом этапе:

$$\tilde{v}_{1,i}^{m+1} = v_{1,i}^m - \frac{1}{\rho_{1,i}^m} \left( \tilde{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - \tilde{p}_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{n_i^m}{\rho_{1,i}^m} f_i^m \Delta t, \quad (2.11)$$

$$\tilde{v}_{2,i}^{m+1} = v_{2,i}^m - \frac{1}{\rho_{2,i}^m} \left( \tilde{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - \tilde{p}_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{n_i^m}{\rho_{2,i}^m} f_i^m \Delta t. \quad (2.12)$$

Для получения промежуточных значений скоростей газовой и конденсированной фаз можно использовать еще одну модификацию эйлерова этапа метода крупных частиц, связанную с частично неявной аппроксимацией силы межфазного взаимодействия. Если ввести обозначения:

$$\Delta p_{1,i}^{m+1} = \frac{1}{\rho_{1,i}^m} \left( \tilde{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - \tilde{p}_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x};$$

$$\Delta p_{2,i}^{m+1} = \frac{1}{\rho_{2,i}^m} \left( \tilde{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - \tilde{p}_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x};$$

$$\Delta f_{1,i}^m = -\frac{n_i^m}{\rho_{1,i}^m} \left( \frac{\pi d^2 \rho_1^0 C_d |v_1 - v_2|}{8} \right)_i^m;$$

$$\Delta f_{2,i}^m = -\frac{n_i^m}{\rho_{2,i}^m} \left( \frac{\pi d^2 \rho_1^0 C_d |v_1 - v_2|}{8} \right)_i^m,$$

то уравнения (2.11) и (2.12) можно будет записать следующим образом

$$\tilde{v}_{1,i}^{m+1} = v_{1,i}^m - \Delta p_{1,i}^{m+1} + \Delta f_{1,i}^m (\tilde{v}_{1,i}^{m+1} - v_{2,i}^m),$$

$$\tilde{v}_{2,i}^{m+1} = v_{2,i}^m - \Delta p_{2,i}^{m+1} - \Delta f_{2,i}^m (v_{1,i}^m - \tilde{v}_{2,i}^{m+1}).$$

Из полученных уравнений промежуточные значения скоростей легко определяются в явном виде:

$$\tilde{v}_{1,i}^{m+1} = (v_{1,i}^m - \Delta p_{1,i}^{m+1} - \Delta f_{1,i}^m v_{2,i}^m) / (1 - \Delta f_{1,i}^m), \quad (2.13)$$

$$\tilde{v}_{2,i}^{m+1} = \frac{(v_{2,i}^m - \Delta p_{2,i}^{m+1} - \Delta f_{2,i}^m v_{1,i}^m)}{(1 - \Delta f_{2,i}^m)}. \quad (2.14)$$

Более сложная модификация метода крупных частиц в приложении к течению газозвесей может быть реализована в случае неявной аппроксимации разности скоростей газа и конденсированной фазы в выражении для силы межфазного взаимодействия. Подставляя в равенства (2.11) и (2.12) выражение для силы межфазного взаимодействия, получим:

$$\tilde{v}_{1,i}^{m+1} = v_{1,i}^m - \Delta p_{1,i}^{m+1} + \Delta f_{1,i}^m (\tilde{v}_{1,i}^{m+1} - \tilde{v}_{2,i}^{m+1}), \quad (2.15)$$

$$\tilde{v}_{2,i}^{m+1} = v_{2,i}^m - \Delta p_{2,i}^{m+1} - \Delta f_{2,i}^m (\tilde{v}_{1,i}^{m+1} - \tilde{v}_{2,i}^{m+1}). \quad (2.16)$$

Вычитая левые и правые части равенства (2.16) из левых и правых частей равенства (2.15) соответственно, получим уравнение для определения промежуточных значений разности скоростей газовой и конденсированной фаз:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{1,i}^{m+1} - \tilde{v}_{2,i}^{m+1} = & v_{1,i}^m - v_{2,i}^m - (\Delta p_{1,i}^{m+1} - \Delta p_{2,i}^{m+1}) + \\ & + (\Delta f_{1,i}^m - \Delta f_{2,i}^m) (\tilde{v}_{1,i}^{m+1} - \tilde{v}_{2,i}^{m+1}). \end{aligned}$$

Окончательное выражение для определения разности промежуточных значений скоростей имеет следующий вид:

$$\tilde{v}_{1,i}^{m+1} - \tilde{v}_{2,i}^{m+1} = \frac{(v_{1,i}^m - v_{2,i}^m) - (\Delta p_{1,i}^{m+1} - \Delta p_{2,i}^{m+1})}{(1 - (\Delta f_{1,i}^m - \Delta f_{2,i}^m))}. \quad (2.17)$$

Подставляя выражение (2.17) в равенства (2.15) и (2.16), получим значения скоростей фаз на эйлеровом этапе метода крупных частиц.

Промежуточные значения скорости конденсированной и газовой фаз на границах ячеек определяются как средние арифметические от их значений в двух соседних ячейках:

$$\tilde{v}_{1,i+1/2}^{m+1} = (\tilde{v}_{1,i}^{m+1} + \tilde{v}_{1,i+1}^{m+1})/2, \quad \tilde{v}_{2,i+1/2}^{m+1} = (\tilde{v}_{2,i}^{m+1} + \tilde{v}_{2,i+1}^{m+1})/2. \quad (2.18)$$

Теперь можно определить промежуточные значения внутренней энергии конденсированной фазы:

$$\tilde{e}_{2,i}^{m+1} = e_{2,i}^m + \frac{1}{\rho_{2,i}^m} n_i^m q_i^m \Delta t, \quad (2.19)$$

и полной энергии смеси:

$$\begin{aligned} \rho_{1,i}^m \tilde{E}_{1,i}^{m+1} + \rho_{2,i}^m \tilde{E}_{2,i}^{m+1} = & \rho_{1,i}^m E_{1,i}^m + \rho_{2,i}^m E_{2,i}^m - \\ & - (\alpha_{1,i+1/2}^n \tilde{v}_{1,i+1/2}^{m+1} \tilde{p}_{i+1/2}^{m+1} - \alpha_{1,i-1/2}^n \tilde{v}_{1,i-1/2}^{m+1} \tilde{p}_{i-1/2}^{m+1}) \frac{\Delta t}{\Delta x} - \\ & - \left( \alpha_{2,i+\frac{1}{2}}^n \tilde{v}_{2,i+\frac{1}{2}}^{m+1} \tilde{p}_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} - \alpha_{2,i-\frac{1}{2}}^n \tilde{v}_{2,i-\frac{1}{2}}^{m+1} \tilde{p}_{i-\frac{1}{2}}^{m+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

На этапе Лагранжа и заключительном этапе метода крупных частиц для каждой фазы были использованы формулы, приведенные в монографии О.М. Белоцерковского и Ю.М. Давыдова [1].

С целью демонстрации полученного метода была решена задача о взаимодействии ударной волны с облаком конденсированных частиц. Результаты расчетов давления и энтропийной функции газа приведены на рис. 1 и рис. 2, соответственно, в моменты времени, когда положение ударной волны определялось координатами  $x = 0,4585$  (кривая красного цвета),  $x = 1,106$  (кривая синего цвета),  $x = 1,5295$  (кривая зеленого цвета).

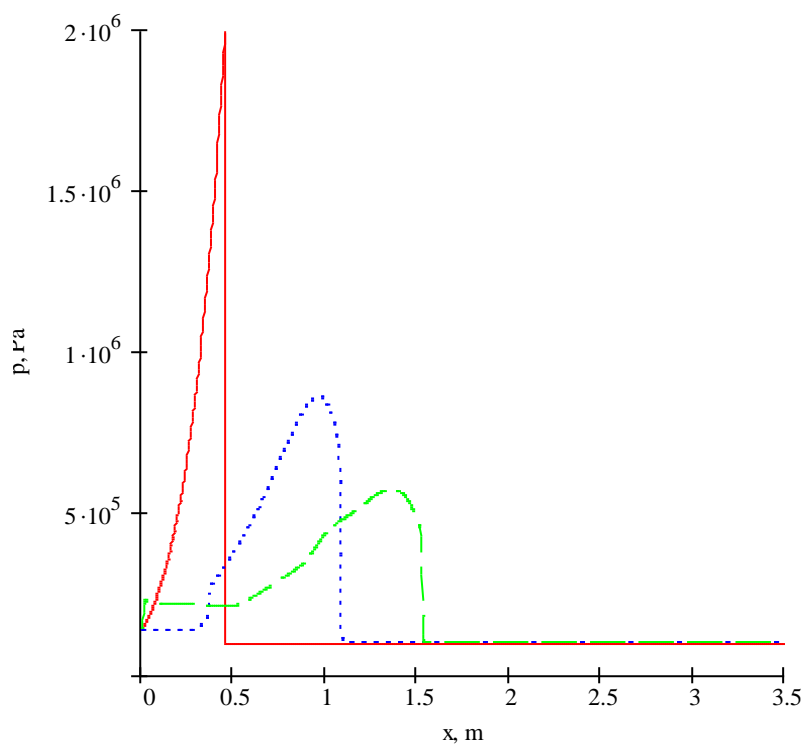


Рис. 1. Распределение давления в расчетной области в разные моменты времени

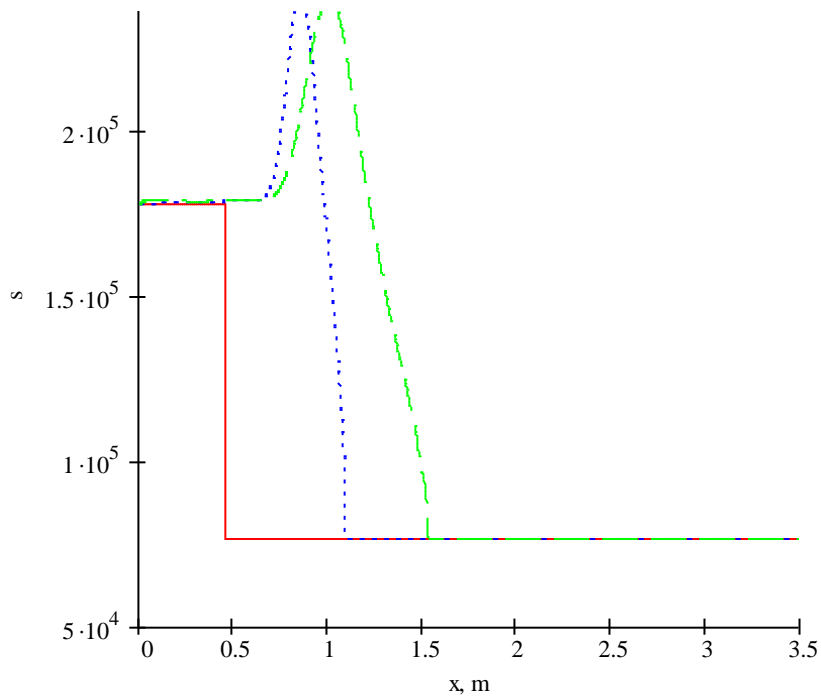


Рис. 2. Распределение энтропийной функции в расчетной области в разные моменты времени

### **Заключение**

1. Тестирование предложенной модификации метода крупных частиц проводилось на решении задачи о распространении ударных волн в облаке газовзвеси [3, 5]...

2. Было показано, что применение на этапе Эйлера предложенной авторами модификации более эффективно, чем применение метода крупных частиц [1] при решении задачи о распространении ударных волн в облаке газовзвеси [3, 5].

3. Применение на этапе Эйлера предложенной авторами модификации позволяет проводить расчеты задач [3, 5] при больших значениях числа Куранта.

*Авторы выражают свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 13 – 01 – 00072.*

### **Библиографический список**

1. Белоцерковский, О.М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука, 1982. – 392 с.

2. Гришин, Ю.А. Новые схемы метода крупных частиц и использование их для оптимизации газоздушных трактов двигателей / Ю.А. Гришин // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – № 8. – С. 51–55.

3. Ковалев, Ю.М. Математическая модель газовзвеси с химическими превращениями в приближении парных взаимодействий / Ю.М. Ковалев, Е.Е. Пигасов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7. – № 3. – С. 40–49.

4. Ковалев, Ю.М. Уравнения состояния и температуры ударного сжатия кристаллических ВВ / Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1984. – Т. 20. – № 2. – С. 102–107.

5. Ковалев Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток / Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.

[К содержанию](#)