УДК 517.956:539.374 + 539.374

О ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ЕГО СЖАТИИ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ ПО ПОВЕРХНОСТИ МАТРИЦЫ

А.Н. Дияб, В.Л. Дильман

Изучается напряженно-деформированное состояние пластического слоя при его сжатии со скольжением в случае плоской деформации на основе гипотезы плоских сечений. Получены явные аналитические выражения для вычисления скоростей смещений в пластическом слое.

Ключевые слова: пластический слой, плоская деформация, осадка, напряженное состояние, гипотеза плоских сечений, линии тока.

Введение. Теоретическое изучение сжатия пластического слоя плоскими параллельными матрицами впервые проводилось в работе [1] и затем многими авторами. Так как напряжения на контактной поверхности между слоем и матрицей неизвестны, обычно рассматривают обратную граничную задачу, в которой требуется для определения сжимающего усилия найти нормальные напряжения на контактной поверхности. Дополнительные условия формулируются в виде ограничений на классы функций, в которых ищется решение. Обоснование таких условий должно опираться на данные натурных экспериментов либо известные свойства деформируемого слоя (в тонких слоях допускают линейную зависимость касательных напряжений по толщине слоя [2, 3]). Применяемые ограничения преследуют две цели: упрощение математической модели и постановку обратной граничной задачи. Список таких условий приведен в работах [4, 5]. К силовым условиям относится [4 – 6] гипотеза разделения переменных для касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = X(x)Y(y).$$

Допущением деформационного типа является гипотеза поперечных плоских сечений [2, 4, 5, 7–10]:

$$v_y = W(y), \tag{1}$$

здесь v_y – скорость смещения точки слоя в поперечном направлении. В работах [4, 5, 8] деформированные координатные линии аппроксимировались фрагментами синусоид. Это позволило дать описание напряженного состояния слоя в явной аналитической форме. В работах [11–13] методы работ [2, 4, 5, 7–9] перенесены на неоднородный слой. Одно из обобщений гипотезы (1) использовалось в [14]. Гипотеза (1) в осесимметричных задачах применялась в работах [15–20]. Упомянутые гипотезы распространяются на часть слоя кроме окрестностей свободных поверхностей. Около такой поверхности приходится решать задачу Коши для системы уравнений в частных производных гиперболического типа с разрывными граничными условиями [21, 22].

Целью данной работы является изучение деформированного состояния пластического слоя (скорости перемещений, линии тока) на основе исследования математической модели напряженно-деформированного состояния пластического слоя, содержащей гипотезу (1).

Вычисление напряжений в слое. Напряженно-деформированное состояние пластического слоя при плоской деформации в безразмерных переменных задается системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \tag{3}$$

$$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4; \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}}, \tag{6}$$

здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} – напряжения, v_x, v_y – скорости перемещений. Функции из уравнений (2) – (6) определены на сечении слоя толщиной 2κ, $\kappa \in (0;1]$, имеющего две оси симметрии – оси координат. На осях координат касательные напряжения равны нулю: $\tau(x,0) = \tau(0,y) = 0$. Обозначив:

$$Y(y) = \frac{W''(y)}{2W'(y)}, \tag{7}$$

из (1) и (6) получим: $\tau_{xy} = 0,5\,(\sigma_x - \sigma_y)Y(y)x$. Отсюда следует после подстановки этого выражения вместо τ_{xy} в (4):

$$\sigma_y - \sigma_x = \pm\frac{2}{\sqrt{1+Y^2(y)x^2}} = \pm 2\left(1 - \frac{1}{2}Y^2(y)x^2 + \frac{3}{8}Y^4(y)x^4 - \ldots\right), \tag{8}$$

(знак плюс для растягивающей нагрузки, минус – сжимающей), а также:

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y)x}{\sqrt{1+Y^2(y)x^2}} = Y(y)x - \frac{Y^3(y)x^3}{2} + \frac{3Y^5(y)x^5}{8} - \ldots \tag{9}$$

Представим уравнение (4) приближенно в виде [3–6]:

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1-\tau_{xy}^2} \approx 2 - \tau_{xy}^2. \tag{10}$$

Используя (10), исключим из (2) и (3) нормальные напряжения. Получим [4, 5] нелинейное уравнение относительно неизвестной функции τ_{xy}:

$$-\frac{\partial^2\left(\tau_{xy}^2\right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0. \tag{11}$$

Запишем его решение в виде ряда:

$$\tau_{xy} = xY_1(y) + x^3Y_2(y) + x^5Y_3(y) + \ldots.$$

При подстановке этого ряда в (11) получится относительно неизвестных функций $Y_1, Y_2, Y_3,...$ бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений: $-4Y_1'Y_1 + Y_2 - Y_1'' = 0$; $-8\left(Y_1Y_2\right)' + 20Y_3 - Y_2'' = 0$ и т.д. Из первого уравнения и формулы (9) следует, что если представить приближенно касательные напряжения в виде:

$$\tau_{xy} \approx Y(y)x - \frac{Y^3(y)x^3}{2}, \tag{12}$$

то функция $Y\left(y\right)$ удовлетворит уравнению и начальному условию:

$$Y'' + 4YY' + 0,5Y^3 = 0,\ Y\left(0\right) = 0. \tag{13}$$

Относительную погрешность в формуле (12) , сравнивая с точным решением (9), можно оценить величиной $0,375\,\tau_{xy}^4\left(1-0,25\tau_{xy}^2\right)^{-2,5}$. При $\tau_{xy} = 0,5$ относительная погрешность формулы (12) менее 0,05. Если в (9) взять только первое слагаемое, то [3–6] функция Y удовлетворяет уравнению:

$$Y'' + 4YY' = 0. \tag{14}$$

Точным решением последнего уравнения при начальных условиях $Y(0) = 0,\ Y'(0) = A$, где $A > 0$, является функция:

$$Y(y) = \sqrt{A/2}\operatorname{th}(\sqrt{2A}y). \tag{15}$$

При начальных условиях?

$$Y\left(0\right) = 0,\ Y'\left(0\right) = -A, \tag{16}$$

где $A > 0$, точным решением уравнения (14) является функция:

$$Y(y) = -\sqrt{A/2}\operatorname{tg}(\sqrt{2A}y). \tag{17}$$

Решение (15) относится к случаю растяжения, решение (17) – сжатия. Заметим, что параметр A, характеризующий скорость прогиба линий сетки, зависит от толщины слоя и меняется в процессе деформирования. Из формулы (17) следует:

$$\tau_{xy} = -\sqrt{A/2}\,x\operatorname{tg}(\sqrt{2A}y). \tag{18}$$

Численные эксперименты [11] показывают, что решения уравнений (13) и (14) при одинаковых граничных условиях мало различаются. Поэтому зависимость (17) можно использовать для вычисления касательных напряжений по формуле (14): $\tau_{xy} \approx -\sqrt{A/2}\,x\operatorname{tg}(\sqrt{2A}y) + 0,5\left(A/2\right)^{3/2}x^3\operatorname{tg}^3(\sqrt{2A}y)$. Предполагая, что остаток ряда (9), начиная с пятой степени, мало влияет на общую сумму, формулу (17) можно применять и для точного выражения (9) для касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{A/2}\, x \,\mathrm{tg}(\sqrt{2A}y)}{\sqrt{1+(A/2)x^2 \mathrm{tg}^2(\sqrt{2A}y)}} . \qquad (19)$$

Параметры задачи. Внешними параметрами задачи являются:

1) скорость сжатия $\nu_\kappa = |W(\kappa)|$;

2) коэффициент трения скольжения заготовки (пластического слоя) по матрице μ_{fr};

3) начальная толщина заготовки κ_0.

Внутренними параметрами задачи являются:

1) переменная толщина заготовки κ;

2) параметр A, характеризующий прогиб поперечных (для слоя) координатных линий;

3) ближайшая к поперечной оси симметрии слоя точка x^*, в которой касательные напряжения достигают наибольшего значения. В работах [4, 5] показано, что $x^* = 1 - 2\kappa/\sqrt{1+m}$.

При отсутствии проскальзывания между слоем и матрицей касательные напряжения в слое достигают около контактной поверхности на участке вблизи свободной поверхности своего наибольшего возможного значения, равного единице. Предположим, что имеет место скольжение заготовки относительно матрицы. Пусть $m = \max \tau_{xy}(x,\kappa),\ m \le 1$ – наибольшее значение касательных напряжений (оно достигается на контактной поверхности вблизи свободной поверхности). Так как $|\tau_{xy}(x,\kappa)| \le \mu_{fr} |\sigma_y|$, то $m = \min\left(\mu_{fr}|\sigma_y|, 1\right)$. $m=1$ означает, что, скольжение заготовки относительно матрицы отсутствует. Рассмотрим случай, когда $m<1$.

Нахождение параметра A. Подставив в уравнение (19) x^* вместо x, κ вместо y и m вместо τ_{xy}, найдем зависимость между m и A:

$$m = \frac{\sqrt{A/2}\, x^* \,\mathrm{tg}(\sqrt{2A}\kappa)}{\sqrt{1+(A/2)(x^*)^2 \mathrm{tg}^2(\sqrt{2A}\kappa)}} . \qquad (20)$$

Введем обозначение для функции, обратной функции $y = x\,tg\,x$:

$$x = y\,tg\,y \Leftrightarrow y = \Psi(x), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in (-\pi/2; \pi/2) .$$

Отсюда и из формулы (20):

$$A=\frac{1}{2\kappa^2}\Psi^2\left(\frac{2m\kappa}{x^*\sqrt{1-m^2}}\right). \tag{21}$$

Для вычисления значений функции Ψ полезна следующая лемма [4]:

Лемма 1. *Функцию Ψ можно представить в виде:*

$$\Psi(x)=\sqrt{x\psi(-x)}, \tag{22}$$

где функция ψ аналитическая, причем:

$$\psi(x)=1+\frac{1}{3}x+\frac{4}{45}x^2+\frac{16}{945}x^3+\frac{256}{127575}x^4+\frac{1984}{33\cdot 127575}x^5+\ldots \tag{23}$$

формулы (22), (23) для вычисления функции $y=\Psi(x)$ удобны для x, близких к нулю и малопригодны для x, близких к ∞, то есть когда $\pi/2-y\ll 1$. В этом случае можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Функцию Ψ можно представить в виде:*

$$\Psi(x)=\varphi(1/x), \tag{24}$$

где функция φ аналитическая, причем:

$$\varphi(t)=\frac{\pi}{2}\left(1-t+t^2-\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)t^3+\left(1-\frac{17\pi^2}{24}\right)t^4-\ldots\right). \tag{25}$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $x=1/t$ в уравнении $x=y\,tg\,y$. Продифференцируем по t уравнение $t\,y\,tg\,y=1$. После преобразований, с повторным использованием последнего уравнения, получим:

$$\left(1+t+t^2y^2\right)y'+y=0,\quad y(0)=\pi/2.$$

Представим решение этой задачи в виде степенного ряда:

$$\varphi(t)=\pi/2+\varphi_1t^1+\varphi_2t^2+\varphi_3t^3+\ldots$$

После подстановки этого выражения в предыдущее уравнение получим бесконечную последовательность рекуррентных соотношений:

$$\pi/2+a_1=0;\quad a_2+a_1=0;\quad a_3+a_2+\left(\pi^2/12\right)a_1=0;$$

$$a_4+a_3+\left(\pi^2/8\right)a_2+\left(\pi/4\right)a_1^2=0;$$

$$a_5+a_4+\left(3\pi^2/20\right)a_3+\left(3\pi/5\right)a_1a_2+a_1^3/5=0;\ \ldots$$

Отсюда следует (25).

Можно получить более простую приближенную формулу для функции $\varphi(x)$, когда величину $\pi/2-y$ можно считать настолько малой, что $tg(\pi/2-y)\approx \pi/2-y$.

Лемма 3. *Если* $tg(\pi/2-y)\approx \pi/2-y$*, то* $\varphi(t)=1/(1+t),\quad |t|<1$.

Доказательство. $$x=y\,tg\,y=\frac{y}{ctg\,y}=\frac{y}{tg(\pi/2-y)}\approx\frac{y}{\pi/2-y},$$

откуда:

$$y=\frac{\pi x}{2(1+x)}=\frac{\pi}{2(1+1/x)}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\ldots\right).$$

Из формул (21) и (22) следует выражение для вычисления параметра A через функцию Ψ, определенную в виде ряда формулой (23):

$$A=\frac{m}{\kappa x^*\sqrt{1-m^2}}\Psi\left(-\frac{2m\kappa}{x^*\sqrt{1-m^2}}\right). \tag{26}$$

Из формул (21) и (24) следует выражение для вычисления параметра A через функцию φ, определенную в виде ряда формулой (25):

$$A=\frac{1}{2\kappa^2}\Psi^2\left(\frac{2m\kappa}{x^*\sqrt{1-m^2}}\right)=\frac{1}{2\kappa^2}\varphi^2\left(\frac{x^*\sqrt{1-m^2}}{2m\kappa}\right). \tag{27}$$

Вычисление скоростей смещений и линий тока. Из (8) следует уравнение для функции W:

$$\frac{W''(y)}{2W'(y)}=-\sqrt{A/2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{2A}y).$$

Учитывая условие $v_y\big|_{y=0}=0$, получаем зависимость в каждой точке слоя величины скорости деформации в направлении внешнего усилия:

$$v_y=-\frac{v_\kappa\sin(\sqrt{2A}y)}{\sin(\sqrt{2A}\kappa)}.$$

Из гипотезы (1), условия несжимаемости (5) и следующего из симметрии условия $v_x\big|_{x=0}=0$ находится скорость деформации в направлении слоя:

$$v_x=\frac{v_\kappa\sqrt{2A}}{\sin(\sqrt{2A}\kappa)}x\cos(\sqrt{2A}y).$$

Линии тока являются интегральными кривыми дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{v_y}{v_x}$, то есть уравнения $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin\left(\sqrt{2A}y\right)}{\sqrt{2A}\,x\cos\left(\sqrt{2A}y\right)}$. Интегрируя его, находим уравнения линий тока, проходящих через точку $(x_0;\gamma_0)$: $x\sin\left(\sqrt{2A}y\right)=x_0\sin\left(\sqrt{2A}y_0\right)$, где A вычисляется по формулам (26) и (27).

Библиографический список

1. Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Г. Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: Издательство иностр. литературы, 1948. – С. 102–113.

2. Качанов, Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 63–67.

3. Остсемин, А.А. О сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами / А.А. Остсемин, В.Л. Дильман // Проблемы прочности. – 1990. – № 7. – С. 107–113.

4. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 276 с.

5. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.

6. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность сварных швов труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 1998. – № 4. – С. 16–20.

7. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38–48.

8. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 3. – № 17 (150). – С. 36–58.

9. Дильман, В.Л. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 6. – № 6. – С. 19–23.

10. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115–124.

11. Дильман, В.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2012. – Вып. 7. – № 34 (293). – С. 11–16.

12. Дильман, В.Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Известия ВУЗов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 34–43.

13. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний пластического слоя / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 5. – С. 2502–2504.

14. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний неоднородного слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2013. – Т. 46. – С. 176–178.

15. Дильман, В.Л. О напряженно–деформированном состоянии пластического кольца при растяжении / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109–120.

16. Дильман, В.Л. Математические модели осесимметричного напряженного состояния при гипотезе разделения переменных для касательных напряжений / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Изв. Челябинского научного центра. – 2006. – Вып. 2 (32). – С. 1–4.

17. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния пластического слоя с сечением в форме кольцевого сектора / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2006. – Вып. 7. – № 7 (62). – С. 13–20.

18. Дильман, В.Л. Прочность механически неоднородных соединений стержней арматуры / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин, Т.В. Ерошкина // Вестник машиностроения. – 2008. – № 9. – С. 13–17.

19. Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 4. – № 37 (170). – С. 65–77.

20. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне / Т.В. Ерошкина, В.Л. Дильман // Известия ВУЗов. Математика. – 2011. – № 11. – С. 12–22.

21. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 89–102.

22. Дильман, В.Л. Численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности при растяжении дискретно-неоднородного твердого тела / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 14. – № 40 (299). – С. 164–168.

К содержанию