УДК 519.63 + 517.956.2:539.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИН НА УПРУГИХ ОСНОВАНИЯХ

А.Л. Ушаков

Рассматриваются эллиптические уравнения четвёртого порядка в плоских областях, лежащие в основе математических моделей деформаций пластин на упругих основаниях. При их приближенных решениях используются модифицированные методы фиктивных компонент. После дискретизации исходных задач по методу конечных элементов на параболических восполнениях, получаются численные модификации методов фиктивных компонент эффективные по количеству арифметических операций.

Ключевые слова: моделирование деформаций пластин, эллиптические уравнения, методы фиктивных компонент.

Введение

Предлагаются модификации методов фиктивных компонент для приближённых решений эллиптических уравнений четвёртого порядка. Рассматриваются эллиптические дифференциальные уравнения четвёртого порядка при общих предположениях обеспечивающих каждому уравнению существование и единственность его решения. Решения этих уравнений с помощью метода конечных элементов и модификаций методов фиктивных компонент сводится к решениям вариационно-разностных аналогов эллиптических уравнений четвёртого порядка в прямоугольной области при смешанных краевых условиях.

Вариационные модели деформаций пластин

Рассматриваются неоднородные бигармонические уравнения со свободными членами при смешанных и однородных краевых условиях в вариационных постановках, т.е. рассматриваются вариационные задачи, обобщённые математические модели деформаций пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях:

$$\breve{u}_\alpha \in \breve{H}_\alpha : \Lambda_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = \breve{g}_\alpha(\breve{v}_\alpha) \ \forall \breve{v}_\alpha \in \breve{H}_\alpha,$$
$$\breve{g}_\alpha \in \breve{H}'_\alpha, \ \alpha = 1, 2. \tag{1}$$

где соболевские пространства функций:

$$\breve{H}_\alpha = \breve{H}_\alpha(\Omega_\alpha) = \left\{ \breve{v}_\alpha \in W_2^2(\Omega_\alpha) : \breve{v}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,0}\cup\Gamma_{\alpha,1}} = 0,\ \frac{\partial \breve{v}_\alpha}{\partial \vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}\cup\Gamma_{\alpha,2}} = 0 \right\},$$

на ограниченных плоских областях Ω_α с границами:

$$s_\alpha = \partial\Omega_\alpha = \bar{\Gamma}_{\alpha,0} \cup \bar{\Gamma}_{\alpha,1} \cup \bar{\Gamma}_{\alpha,2} \cup \bar{\Gamma}_{\alpha,3},$$

$\Gamma_{\alpha,i} \cap \Gamma_{\alpha,j} = \varnothing$, если $i \neq j$, $i,j = 0,1,2,3$, $\vec{n}_\alpha$ – внешние нормали к $\partial\Omega_\alpha$, билинейные формы с константами $\breve{a}_\alpha \in [0;+\infty)$, $\sigma_\alpha \in (0;1)$:

$$\Lambda_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} (\sigma_\alpha \Delta\breve{u}_\alpha \Delta\breve{v}_\alpha + (1-\sigma_\alpha)(\breve{u}_{\alpha xx}\breve{v}_{\alpha xx} + 2\breve{u}_{\alpha xy}\breve{v}_{\alpha xy} + \breve{u}_{\alpha yy}\breve{v}_{\alpha yy}) + a_\alpha \breve{u}_\alpha \breve{v}_\alpha) d\Omega_\alpha.$$

Для задач из (1) достаточно обычны предположения, обеспечивающие каждой задаче существование и единственность её решения, т.е.:

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty):\ c_1 \|\breve{v}_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \le \Lambda_\alpha(\breve{v}_\alpha, \breve{v}_\alpha) \le c_2 \|\breve{v}_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \quad \forall \breve{v}_\alpha \in \breve{H}_\alpha,\ \alpha = 1,2,$$

с.м. [1, 2]. Если $\breve{u}_\alpha$ – деформации пластин, искомые функции достаточно гладкие, а $\breve{f}_\alpha$ – давления, заданные функции такие, что:

$\breve{g}_\alpha(\breve{v}_\alpha) = (\breve{f}_\alpha, \breve{v}_\alpha)$, где $\left(\breve{f}_\alpha, \breve{v}_\alpha\right) = \int_{\Omega_\alpha} \breve{f}_\alpha \breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha$, то из задач в (1) получаются неоднородные бигармонические уравнения со свободными членами при смешанных и однородных краевых условиях:

$$\Delta^2 \breve{u}_\alpha + a_\alpha \breve{u}_\alpha = \breve{f}_\alpha,\ \alpha = 1,2, \tag{2}$$

$$\breve{u}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,0}} = \frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial \vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}} = 0,\quad \breve{u}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,1}} = l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,1}} = 0,$$

$$\frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial \vec{n}_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,2}} = l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,2}} = 0,\quad l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,3}} = l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha\big|_{\Gamma_{\alpha,3}} = 0,$$

где:

$$l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha = \Delta\breve{u}_\alpha + (1-\sigma_\alpha) n_{\alpha,1} n_{\alpha,2} \breve{u}_{\alpha xy} - n_{\alpha,2}^2 \breve{u}_{\alpha xx} - n_{\alpha,1}^2 \breve{u}_{\alpha yy},$$

$$l_{\alpha,2}\breve{u} = \frac{\partial \Delta\breve{u}_\alpha}{\partial \vec{n}_\alpha} + (1-\sigma_\alpha)\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(n_{\alpha,1} n_{\alpha,2}(\breve{u}_{\alpha yy} - \breve{u}_{\alpha xx}) + (n_{\alpha,1}^2 - n_{\alpha,2}^2)\breve{u}_{\alpha xy}),$$

$$n_{\alpha,1} = -\cos(n_\alpha, x),\quad n_{\alpha,2} = -\cos(n_\alpha, y).$$

У пластин на $\Gamma_{\alpha,0}$ жесткая заделка, на $\Gamma_{\alpha,1}$ шарнирное опирание, на $\Gamma_{\alpha,2}$ условия симметрии, на $\Gamma_{\alpha,3}$ свободное опирание.

Фиктивные продолжения вариационных моделей

Предлагаются фиктивные продолжения непрерывных задач и их решений, т.е. предлагаются продолжения вариационных задач и их решений из (1), фиктивно продолженные обобщённые математические модели деформаций пластин на упругом основании при смешанных краевых условиях, следующего вида:

$$\breve{u} \in \breve{V} : \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v}) = \breve{g}_1(I_1\breve{v}) + \breve{g}_2(\breve{v}) \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V},$$
$$\breve{g}_{3-\alpha}(\breve{v}) = 0 \ \forall \breve{v} \in \breve{V}_{3-\alpha}, \ \ \alpha = 1,2, \tag{3}$$

где соболевское пространство функций на области Ω:

$$\breve{V} = \breve{V}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial \breve{v}}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\},$$

$\Omega, \Omega_{3-\alpha}$ – ограниченные плоские области, такие, что $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_2$, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$, $\bar{\Gamma}_{1,0} \bigcap \bar{\Gamma}_{2,3} = \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 = \bar{S} \neq \varnothing$, $s = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \bigcup \bar{\Gamma}_1 \bigcup \bar{\Gamma}_2 \bigcup \bar{\Gamma}_3$, $\Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing$, если $i \neq j$, $i, j = 0,1,2,3$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Подпространства:

$$\breve{V}_{i^2} = \left\{ \breve{v}_{i^2} \in \breve{V} : \breve{v}_{i^2} = 0 \ на \ \Omega \setminus \Omega_i \right\} \ i = 1,2.$$

Полагается, что:

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, \breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v}) \ \ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V},$$

считается, что:

$$\Lambda_i(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_i(\breve{u}\big|_{\Omega_i}, \breve{v}\big|_{\Omega_i}), \ \breve{g}_i(\breve{v}) = \breve{g}_i(\breve{v}\big|_{\Omega_i}) \ \ \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V} \ i = 1,2.$$

Предполагается, что:

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): \ c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leq \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Пусть $\breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_4$ прямая сумма подпространств $\breve{V}_{i^2} \ i = 1,2$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, подпространство:

$$\breve{V}_3 = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V} : \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_0) = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0 \right\},$$

т.е. $\breve{V} = \breve{V}_0 \oplus \breve{V}_3$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, а $\breve{v}_0 \in \breve{V}, \breve{v}_3 \in \breve{V}$ обозначают проекции v на соответствующие подпространства. Вводятся следующие подпространства: $\breve{V}_{8-3i} = \breve{V}_3 \oplus \breve{V}_{i^2}, \ i = 1,2,$ тогда имеет место $\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2$. Считается, что $\breve{H}_i = \breve{H}_i(\Omega_i) = \breve{V}_i(\Omega_i)$, $\breve{V}(\Omega_i) = \breve{V}\big|_{\Omega_i} \ i = 1,2. \ H_2 = V(\Omega_2).$

Вводятся I_{i^2} $i=1,2$ – ограниченные операторы, отображающие пространство $\breve{V}$ на подпространства $\breve{V}_{i^2}$, т.е. $\breve{V}_{i^2}=imI_{i^2}$, при этом $I_{i^2}=I_{i^2}^2$, т.е. I_{i^2} проекторы, но не обязательно ортопроекторы. Задается, что $I_0=I_1+I_4$. Здесь I_0 – ограниченный оператор, отображающий пространство $\breve{V}$ на подпространство $\breve{V}_0$, т.е. $\breve{V}_0=imI_0$, при этом $I_0=I_0^2$, т.е. I_0 проектор, но не обязательно ортопроектор. Можно отметить, что:

$$\Lambda_1(\breve{u},I_0\breve{v})=\Lambda_1(\breve{u},I_1\breve{v}),\ \breve{g}_1(I_0\breve{v})=\breve{g}_1(I_1\breve{v})\ \ \forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}.$$

Основываясь на возможности продолжения функций с сохранением нормы в соответствующих соболевских пространствах будем считать, что имеет место, следующее предположение о продолжении функций.

Предположение 1. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\exists\beta_1\in(0;1]\ \exists\beta_2\in[\beta_1;1]:\beta_1\Lambda(\breve{v}_3,\breve{v}_3)\le\Lambda_2(\breve{v}_3,\breve{v}_3)\le\beta_2\Lambda(\breve{v}_3,\breve{v}_3)\ \forall\breve{v}_3\in\breve{V}_3.$$

Можно считать, что $\beta_2=1$.

Утверждение 1. *Решение каждой задачи из (3)* $\breve{u}\in\breve{V}_\alpha$*, существует, единственно и на* Ω_α *совпадает с решением задачи из (1), на* $\Omega_{3-\alpha}$ *равно* $\breve{u}_3$ *(равно нулю при* $\alpha=1$*)* $\alpha=1,2$.

Что касается существования решений задач из (3), то решения уже указаны в условии утверждения.

Модификации методов фиктивных компонент

Предлагаются модификации методов фиктивных компонент, т.е. предлагаются следующие итерационные процессы, методы приближённых вычислений деформаций пластин на упругом основании при смешанных краевых условиях на непрерывном уровне[3]:

$$\breve{u}^k\in\breve{V}:\Lambda(\breve{u}^k-\breve{u}^{k-1},\breve{v})=-\tau_k(\Lambda_1(\breve{u}^{k-1},I_1\breve{v})+\Lambda_2(\breve{u}^{k-1},\breve{v})-\breve{g}_1(I_1\breve{v})-\breve{g}_2(\breve{v}))\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

$$\tau_1=(2-\alpha)+(\alpha-1)\tau,\ \tau\in(0;2),$$
$$\tau_k=\tau\in(0;2\beta_2^{-1}),\ k\in N\setminus\{1\}\ \forall\breve{u}^0\in\breve{V}_\alpha\subset\breve{V},\ \alpha=1,2. \tag{4}$$

В пространстве $\breve{V}$ вводится следующая норма:

$$\|\breve{v}\|_{\breve{V}}=\sqrt{\Lambda(\breve{v},\breve{v})}.$$

Теорема 1. *Для итерационных процессов из (4) имеют место следующие оценки:*

$$\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\varepsilon_\alpha\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ k\in N,\ \alpha=1,2,$$

$$\left\|I_1\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}} \le \left\|I_1\right\|_{\breve{V}}\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}} \quad \alpha=1,$$

где:

$$0 \le \varepsilon_\alpha \le \left((2-\alpha)\delta_1+(\alpha-1)q_1\right)q^{k-1},$$

$$\delta_1=\sqrt{\left\|I_1\right\|^2_{\breve{V}}-1},\ \left\|I-I_1\right\|_{\breve{V}},\ 0 \le q_1=max\left\{\left|1-\tau\beta_1\right|,\ \left|1-\tau\right|\ \right\},\ \tau\in(0;2),$$

$$0 \le q=max\left\{\left|1-\tau\beta_1\right|,\ \left|1-\tau\beta_2\right|\ \right\}<1,\ \tau\in(0;2\beta_2^{-1}).$$

Здесь I *оператор тождественного преобразования из* $\breve{V}$ *в* $\breve{V}.\breve{V}$. *Если* $\alpha=2,\ \tau_1=\tau=2/(1+\beta_1),$ *то* $q_1=(1-\beta_1)/(1+\beta_1).$ *Если* $\tau_k=\tau=2/(\beta_1+\beta_2),$ *то* $q=(\beta_2-\beta_1)/(\beta_2+\beta_1),\ k\in N\setminus\{1\}.$

Дискретизация фиктивно продолженных моделей

Проводятся дискретизации фиктивно продолженных моделей. При дискретизации задач из (3) будем дополнительно предполагать, что:

$$\breve{V}=\breve{V}(\Omega)=\left\{\breve{v}\in W_2^2(\Omega):\breve{v}\big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{v}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_2}=0\right\},$$

где область $\Omega=(0;b_1)\times(0;b_2),$ с границами: $\Gamma_0=\varnothing,\ \overline{\Gamma}_1=\{b_1\}\times[0;b_2]\cup[0;b_1)\times\{b_2\},\ s=\partial\Omega=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2,\ \Gamma_3=\varnothing,\ b_1,b_2\in(0;+\infty),$ т.е. рассматриваются задачи, решение которых изучалось уже ранее [4]. Предлагается рассматривать $СЛАУ-$системы линейных алгебраических уравнений, получающихся при дискретизации задач предложенных в (3) с учётом сказанного выше на основе метода конечных элементов, фиктивно продолженные численные модели деформаций пластин на упругом основании при смешанных краевых условиях, т.е.:

$$\bar{u}\in R^N:\ B\bar{u}=\bar{g},\ \bar{g}\in R^N,, \tag{5}$$

где $\bar{v}\in R^N:\ \bar{v}=(v_1,...,v_N)',\ N=m\cdot n,\ m,\ n\in N$, а $v_{n(i-1)+j}=v_{i,j},\ i=1,...,m,$ $j=1,...,n$, и $v_{i,j}$ являются значениями функции дискретного аргумента соответствующего узлам сетки $(x_i,y_j)=\left((i-0{,}5)h_1,(j-0{,}5)h_2\right)$, шаги сетки $h_1=b_1/(m+0{,}5),\ h_2=b_2/(n+0{,}5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрица B размерности $N\times N$, определяется следующим образом:

$$\left\langle B\bar{u},\bar{v}\right\rangle=\Lambda_1(\tilde{u},I_1\tilde{v})+\Lambda_2(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V}\subset\breve{V},$$

векторы $\bar{g}$ определяются следующим образом:

$$\left\langle\bar{g},\bar{v}\right\rangle=\breve{g}_1(I_1\tilde{v})+\breve{g}_2(\tilde{v})\ \ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}.$$

Здесь $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов следующего вида $\langle \bar{u},\bar{v} \rangle = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k h_1 h_2$ $\forall \bar{u},\bar{v} \in R^N$, а подпространство $\tilde{V} \subset \breve{V}$ определяется так, что:

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} : \tilde{v} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\Phi^{i,j}(x,y), v_{i,j} \in R, \right\},$$

где базисные функции:

$\Phi^{i,j}(x,y) = \Psi_{1,i}(x)\Psi_{2,j}(y)$,

$\Psi_{1,i}(x) = \mathrm{E}(1/i)\Psi(x/h_1 - i + 3) + \Psi(x/h_1 - i + 2) - \mathrm{E}(i/m)\Psi(x/h_1 - i)$,

$\Psi_{2,j}(y) = \mathrm{E}(1/j)\Psi(y/h_2 - j + 3) + \Psi(y/h_2 - i + 2) - \mathrm{E}(j/n)\Psi(y/h_2 - j)$,

$i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$,

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0{,}5z^2, & z \in [0;1], \\ -z^2 + 3z - 1{,}5, & z \in [1;2], \\ 0{,}5z^2 - 3z + 4{,}5, & z \in [2;3], \end{cases}$$

$\Psi(z) = 0,\ z \notin [0;3]$, $E(\cdot)$ – функция целая часть числа. Будем предполагать, что оператор I_0 просто обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$ носители, которых имеют не пустое пересечение с границей S, т.е. с границей (частью границы области) через которую осуществляются продолжения задач и их решений. Предполагается, что оператор I_1 обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$, если их носители имеют не пустое пересечение с $\Omega \setminus \Omega_1$.

Отметим, что решение задач из (5) при каждом $\alpha = 1,2$ существует, единственно и известны оценки типа [2]:

1. $\|\breve{u} - \tilde{u}\|_{W_2^{m_1}(\Omega)} \le c|\bar{h}|^{m_2 - m_1}\|\breve{u}\|_{W_2^{m_2}(\Omega)}$,
2. $\lim\limits_{|\bar{h}|\to 0}\|\breve{u} - \tilde{u}\|_{W_2^2(\Omega)} = 0$, $|\bar{h}| = \max\{h_1, h_2\}$.

Введём дополнительно в рассмотрение подпространства:

$$\tilde{V}_{i^2} = \left\{ \tilde{v}_{i^2} \in \tilde{V} : \tilde{v}_{i^2}\Big|_{\Omega\setminus\Omega_i} = 0 \right\}\ i = 1,2.$$

Пусть $\tilde{V}_0 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_4$ прямая сумма подпространств $\tilde{V}_{i^2}\ i = 1,2$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, подпространство:

$$\tilde{V}_3 = \left\{\tilde{v}_3 \in \tilde{V} : \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_0) = 0\ \forall \tilde{v}_0 \in \tilde{V}_0\right\},$$

т.е. $\tilde{V} = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{V}_3$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, а $\tilde{v}_0 \in \tilde{V},\ \tilde{v}_3 \in \tilde{V}$ есть проекции $\tilde{v}$ на соответствующие подпространства. Вводятся следующие подпространства: $\tilde{V}_{8-3i} = \tilde{V}_3 \oplus \tilde{V}_{i^2},\ i = 1,2,$ тогда имеет место $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$.

Замечание 1. Имеют место следующие неравенства

$$\exists \hat{\beta}_1 \in (0;1]\ \exists \hat{\beta}_2 \in \left[\hat{\beta}_1;1\right] : \hat{\beta}_1 \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3) \le \Lambda_2(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3) \le \hat{\beta}_2 \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3)\ \forall \tilde{v}_3 \in \tilde{V}_3.$$

Можно считать, что $\hat{\beta}_2 = 1$.

Дискретные модификации методов фиктивных компонент

Предлагается модификации методов фиктивных компонент на дискретном уровне, т.е. предлагаются итерационные процессы, численные методы приближённых вычислений деформаций пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях следующего вида:

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V} : \Lambda(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_k(\Lambda_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_2(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - \breve{g}_1(I_1\tilde{v}) - \breve{g}_2(\tilde{v}))\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau_k = \tau \in (0;2),\ k \in N \setminus \{1\},\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_\alpha \subset \tilde{V},\ \alpha = 1,2; \qquad (6)$$

модификации методов фиктивных компонент на матричном уровне:

$$\bar{u}^k \in R^N : \Lambda(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_k(B\bar{u}^{k-1} - \bar{g}),$$

$$\tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau_k = \tau \in (0;2),\ k \in N \setminus \{1\},\ \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_\alpha \subset R^N,\ \alpha = 1,2, \qquad (7)$$

где

$\tilde{V}_1 = \left\{\tilde{v}_1 \in \tilde{V} : \tilde{v}_1 \in \breve{V}_1\right\},\ \tilde{V}_2 = \left\{\tilde{v}_2 \in \tilde{V} : \Lambda(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1) = 0\ \forall \tilde{v}_1 \in \tilde{V}_1\right\},\quad \bar{V}_\alpha \subset R^N$ подпространства, соответствующие подпространствам, $\tilde{V}_\alpha\ \alpha = 1,2,$ а матрица Λ размерности $N \times N$, определяется следующим образом:

$$\left\langle \Lambda\bar{u}, \bar{v}\right\rangle = \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v})\ \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V} \subset \breve{V}.$$

Вводится следующая норма:

$$\|\bar{v}\|_\Lambda = \sqrt{\left\langle \Lambda\bar{v}, \bar{v}\right\rangle},\ \forall \bar{v} \in R^N.$$

Следствие 1. *Для итерационных процессов из (7) имеют место следующие оценки:*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_\Lambda \le \hat{\varepsilon}_\alpha \left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_\Lambda,\ k \in N,\ \alpha = 1,2,$$

где

$$0 \le \hat{\varepsilon}_\alpha \le \left((2-\alpha)\hat{\delta}_1 + (\alpha-1)\hat{q}_1\right)\hat{q}^{k-1},$$

$$\exists c \in (0+\infty): \hat{\delta}_1 \le c|\underline{h}|^{-3/2}, \ |\underline{h}| = \min\{h_1, h_2\},$$

$$0 \le \hat{q}_1 = max\left\{\left|1-\tau\hat{\beta}_1\right|, \ |1-\tau| \right\}, \tau \in (0;2),$$

$$0 \le \hat{q} = max\left\{\left|1-\tau\hat{\beta}_1\right|, \ \left|1-\tau\hat{\beta}_2\right| \right\} < 1, \ \tau \in (0; 2\hat{\beta}_2^{-1}).$$

Если $\alpha = 2, \tau_1 = \tau = 2/(1+\hat{\beta}_1),$ *то* $\hat{q}_1 = (1-\hat{\beta}_1)/(1+\hat{\beta}_1).$

Если $\tau_k = \tau = 2/(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2),$ *то* $\hat{q} = (\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_1)/(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_1), \ k \in N \setminus \{1\}.$

Вывод. Можно использовать, что задачи, возникающие на каждом шаге итерационных процессов (7) решались ранее в [4]. Тогда для решения задач с N неизвестными из (5) итерационными процессами из (7) требуется не более чем $O(N \ln N)$ арифметических операций, когда $\alpha = 1$ и не более чем $O(N)$ арифметических операций, когда $\alpha = 2$. Для выбора итерационных параметров τ_k не требуется знания констант $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$. Для выбора этих параметров можно рекомендовать, например, когда $\alpha = 1$ метод скорейшего спуска, когда $\alpha = 2$ метод минимальных поправок.

Библиографический список

1. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1979. – 235 с.

2. Обэн, Ж.П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

3. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент / А.Л. Ушаков; Челябинск, гос. техн. ун-т. – Челябинск, 1991. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.11.91, № 4232. – В91.

4. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация на фиктивном продолжении для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, Механика, Физика». – 2014. – Т. 6, № 2. – С. 17–22.

К содержанию