УДК 517.95 + 517.98

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Е.В. Табаринцева

Рассматривается задача с обратным временем для нелинейного дифференциального уравнения. Устойчивы приближенные решения строятся с помощью подхода, обобщающего схему А.Б. Бакушинского. Параметр регуляризации выбирается с помощью подхода, основанного на схеме М.М. Лаврентьева, который не требует использования априорной информации о точном решении. Показано, что рассмотренная схема выбора параметра регуляризации обеспечивает оптимальный порядок точности приближенного решения.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, обратная задача, метод приближенного решения, параметр регуляризации.

Введение. Рассматривается задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения. Основными вопросами при исследовании данной некорректно поставленной задачи являются вопросы построения устойчивого приближенного решения и оценки точности полученного приближенного решения. Многие классы линейных некорректно поставленных подробно исследованы теоретически, для их решения разработан аппарат, позволяющий строить устойчивые приближенные решения и оценивать их точность. Однако, аппарат для исследования и численного решения нелинейных обратных задач разработан недостаточно. В [1] был предложен общий способ построения регуляризующих алгоритмов для линейных операторных уравнений. В работе [6] предложен способ построения приближенных решений одного класса нелинейных обратных задач, обобщающий схему, исследованную в [1]. В работе [7] получены двусторонние оценки модуля непрерывности нелинейной обратной задачи, что позволяет исследовать методы приближенного решения на оптимальность. Большую роль при численном решении неустойчивых задач играет выбор параметра регуляризации. В частности, в [6] для выбора параметра регуляризации применяется схема М.М. Лаврентьева, которая обеспечивает оптимальный порядок точности полученного приближенного решения, но использует априорную информацию о точном решении (например, о гладкости точного решения), которая на практике не всегда доступна. Другие известные способы выбора параметра регуляризации (принцип невязки, метод минимальных ошибок и др.) не всегда обеспечивают оптимальную точность или требуют численного решения достаточно сложных вспомогательных задач. В настоящей работе предложен способ выбора параметра регуляризации, основанный на схеме М.М. Лаврентьева и общем подходе, развитом в [10] для решения нелинейных операторных уравнений. Рассмотренный подход обеспечивает оптимальный порядок точности приближенных решений и не требует использования априорной информации о точном решении.

Постановка задачи. Пусть H гильбертово пространство, A – линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$, плотной в H.

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши:

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t));\ t \in (t_0; T), \tag{1}$$

$$u(t_0) = \varphi,\ \ \varphi \in H,\ \ 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$.

Здесь $f : [t_0; T] \times H \to H$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной u и условию Гельдера по переменной t, т.е. существуют постоянные $L > 0$, $K > 0$ и $0 < a < 1$, такие, что:

$$\| f(t_1, u_1) - f(t_2, u_2) \|_H \le L \| u_1 - u_2 \|_H + K | t_1 - t_2 |^a,$$

для всех $t_1, t_2 \in [t_0; T]$, $u_1, u_2 \in H$.

Рассмотрим множество $M \subset H$, которое является классом корректности нелинейной обратной задачи.

Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $\varphi \in H$ поставленной обратной задачи, принадлежащее заданному множеству $M \subset H$. Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$, такое, что $\| \chi - \chi_\delta \| < \delta$. Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Построение приближенных решений нелинейной обратной задачи. Рассмотрим задачу с обратным временем для соответствующего линейного уравнения, т.е. задачу вычисления элемента $\tilde{\varphi}_\tau \in H$ такого, что решение задачи Коши:

$$\frac{dv}{dt} = -Av;\ t \in (\tau;T), \tag{2}$$

$$v(\tau) = \tilde{\varphi}_\tau,\ \tilde{\varphi}_\tau \in H,\ 0 < t_0 \le \tau < T,$$

удовлетворяет условию $v(T) = \tilde{\chi}$, где $\tilde{\chi} \in H$ заданный элемент.

Пусть $\Phi(\alpha,\mu)\ (\alpha > 0, \mu \ge 0)$- функция, принимающая действительные значения, имеющая конечное число точек разрыва первого рода при любом $\alpha \ge 0$ и удовлетворяющая условиям, сформулированным в [1]. Рассмотрим семейство линейных операторов $R_\alpha^{T-t} : H \to H$, определенных равенством:

$$R_\alpha^{T-t} = \Phi(\alpha, e^{-A(T-t)}).$$

Из результатов [1] следует, что в качестве приближенного решения линейной обратной задачи (2) можно рассматривать элемент:

$$v_\alpha^\delta(\tau) = R_\alpha^{T-\tau}\chi_\delta, \tag{3}$$

при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha^*(\delta)$.

Обозначим $u_\delta^\alpha(t)$ решение интегрального уравнения

$$u_\delta^\alpha(t) = R_\alpha^{T-t}\chi_\delta - \int_t^T R_\alpha^{T-s} f(s, u_\delta^\alpha(s))ds. \tag{4}$$

В качестве приближенного решения нелинейной обратной задачи будем рассматривать элемент:

$$\varphi_\delta^{\alpha^*} = u_\delta^{\alpha^*}(t_0), \tag{5}$$

при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha^*(\delta)$.

Оценка погрешности приближенного решения. Будем предполагать, что заданное множество $M \subset H$ является классом корректности как для нелинейной задачи (1), так и для соответствующей линейной задачи (2). Рассмотрим следующие величины:

$$\Delta_M(\alpha,\delta) = \sup\{\|\varphi_\delta^\alpha - \varphi\| : \varphi \in M, \|\chi - \chi_\delta\| \le \delta\},$$

погрешность метода приближенного решения нелинейной задачи (1), определенного формулой (5), на множестве M:

$$\tilde{\Delta}_M(\alpha,\delta) = \sup\{\|R_\alpha^{T-t_0}\tilde{\chi}_\delta - \varphi\| : \varphi \in M, \|\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_\delta\| \le \delta\},$$

погрешность метода приближенного решения линейной задачи (2), определенного формулой (3), на множестве M.

Воспользуемся неравенством:

$$\Delta_M(\alpha,\delta) \le \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta),$$

где

$$\Delta_2(\alpha,\delta) = \sup_{\|\chi - \chi_\delta\| \le \delta} \|\varphi_\delta^\alpha - \varphi^\alpha\|;$$

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{\phi \in M_i} \|\varphi^\alpha - \varphi\| \ .$$

Аналогично:

$$\tilde{\Delta}_M(\alpha,\delta) \le \tilde{\Delta}_1(\alpha) + \tilde{\Delta}_2(\alpha,\delta),$$

где

$$\tilde{\Delta}_2(\alpha,\delta) = \sup_{\|\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_\delta\| \le \delta} \|R_\alpha^{T-t_0}(\tilde{\chi}_\delta - \tilde{\chi})\| \le \frac{\delta}{\lambda(\alpha)};$$

$$\tilde{\Delta}_1(\alpha) = \sup_{\varphi \in M} \|R_\alpha^{T-t_0}\tilde{\chi} - \varphi\| = g(\alpha).$$

Здесь $l(a), g(a)$ – возрастающие функции на $[0; a_0]$, $l(0) = 0$; $0 = g(0)$ J $g(a)$ J 1.

Выполняются неравенства:

$$\frac{1}{4}e^{-LTe^{LT}}\tilde{\Delta}_1(\alpha) \le \Delta_1(\alpha) \le 4e^{LT}\tilde{\Delta}_1(\alpha);$$

$$\frac{1}{4}e^{-LTe^{LT}}\tilde{\Delta}_1(\alpha,\delta) \le \Delta_2(\alpha,\delta) \le 4e^{LT}\tilde{\Delta}_1(\alpha,\delta).$$

Теорема. ([6]) Существует постоянная $\delta_0 > 0$, такая, что для всех $0 < \delta < \delta_0$ выполняются неравенства:

$$\frac{1}{4}e^{-LTe^{LT}}\tilde{\Delta}_M(\alpha^*,\delta) \le \Delta_M(\alpha^*,\delta) \le 4e^{LT}\tilde{\Delta}_M(\alpha^*,\delta).$$

Следствие. Метод приближенного решения нелинейной обратной задачи (1), определенный равенством (5), оптимален по порядку на множестве M тогда и только тогда, когда метод приближенного решения линейной обратной задачи (2), определенный формулой (3), оптимален по порядку на множестве M.

Пример 1 (метод проекционной регуляризации). Обозначим через $\{E_\lambda : \lambda \geq 0\}$ разложение единицы, порожденное оператором A.

Пусть A_α – линейный ограниченный оператор в H, определяемый формулой:

$$A_\alpha u = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} \frac{du^\alpha(t)}{dt} = -A_\alpha u^\alpha(t) + E_\alpha f(t, u^\alpha(t)),\ t \in (t_0, T); \\ u^\alpha(T) = E_\alpha \chi \end{gathered} \tag{6}$$

Задача (6) соответствует методу приближенного решения нелинейной обратной задачи, определенному равенством (5), с функцией:

$$\Phi(\alpha, \mu) = \begin{cases} 1/\mu, & \mu < \alpha \\ 0, & \mu > \alpha \end{cases},$$

Пример 2 (метод вспомогательных граничных условий). Вместо неустойчивой задачи с обратным временем рассмотрим задачу:

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t));\ t \in (t_0; T),$$

$$u(T) + \alpha u(t_0) = \chi_\delta \ ,\ 0 < t_0 < T,$$

Другой пример (метод квазиобращения, см. [4]), в нелинейном случае исследован в [5].

Выбор параметра регуляризации

Для выбора параметра регуляризации на практике может быть использована следующая схема, не использующая явно априорную информацию о точном решении поставленной обратной задачи (см. е [10]).

Пусть параметр регуляризации выбирается из конечного множества:

$$\Lambda_N = \{\alpha_i : 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N\}.$$

Обозначим через $\varphi_{\alpha_i}^{\delta} = R_{\alpha_i}\chi_\delta$ соответствующие приближенные решения. Пусть φ_0 – точное решение задачи (1), $\varphi_0 \in M$. Обозначим через α_{opt} квазиоптимальное значение параметра регуляризации, полученное по схеме М.М. Лаврентьева, примененной к линейной задаче (2), т.е. параметр регуляризации выбирается из условия $\tilde{\Delta}_1(\alpha(\delta)) = \tilde{\Delta}_2(\alpha(\delta),\delta)$. Как известно, такой выбор параметра регуляризации обеспечивает оптимальный порядок погрешности приближенного решения и выполняется неравенство:

$$\tilde{\Delta}(\alpha_{opt}(\delta),\delta) \le 2g((g\lambda)^{-1}(\delta)\,.$$

Из теоремы следует, что при таком выборе параметра регуляризации порядок погрешности метода решения нелинейной задачи (2) также будет оптимальным, причем:

$$\Delta(\alpha_{opt}(\delta),\delta) \le 8e^{LT} g((g\lambda)^{-1}(\delta)\,.$$

Обозначим через $\alpha*$ оптимальное значение параметра регуляризации, выбираемое из множества Λ_N, т.е.:

$$\alpha* = \max\left\{\alpha_i : \alpha_i \in M(\Lambda_N)\right\},$$

где

$$M(\Lambda_N) = \left\{\alpha_i \in \Lambda_N : g(\alpha_i) \le \frac{\delta}{\lambda(\alpha_i)}\right\}.$$

Наряду с $M(\Lambda_N)$, рассмотрим множество:

$$M^+(\Lambda_N) = \left\{\alpha_i \in \Lambda_N : \left\|\varphi_{\alpha_i}^{\delta} - \varphi_{\alpha_j}^{\delta}\right\| \le \frac{16e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_j)}\ \left(j = 0,1,\dots,i\right)\right\}.$$

Лемма 2. $M(\Lambda_N) \subseteq M^+(\Lambda_N)$

Доказательство. Рассмотрим значения параметра регуляризации $\alpha_i, \alpha_j \in \Lambda_N$; $\alpha_i \in M(\Lambda_N)$, $j < i$. Имеем неравенство:

$$\left\|\varphi_{\alpha_i}^{\delta} - \varphi_{\alpha_j}^{\delta}\right\| \le \left\|\varphi_{\alpha_i}^{\delta} - \varphi_{\alpha_i}\right\| + \left\|\varphi_{\alpha_i} - \varphi_0\right\| + \left\|\varphi_{\alpha_j} - \varphi_0\right\| + \left\|\varphi_{\alpha_j} - \varphi_{\alpha_j}^{\delta}\right\| \le$$
$$\le 8e^{LT}\varphi(\alpha_i) + \frac{4e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_i)} + \frac{4e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_j)} \le \frac{16e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_j)}\,.$$

Следовательно, $\alpha_i \in M^+(\Lambda_N)$.

Обоснование одного из правил апостериорного выбора параметра регуляризации дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $M(\Lambda_N) \neq \varnothing$; $\Delta_N \setminus M(\Lambda_N) \neq \varnothing$ и для любого $a_i\ \mathrm{O}\mathrm{D}_N$ выполняется неравенство:

$$l\,(a_i)\ \mathrm{J}\ \ ql\,(a_{i-1}) \quad (i = 1,\ldots,N).$$

Пусть параметр регуляризации выбран из условия:

$$\alpha^{+} = \max\left\{\alpha_i : \alpha_i \in M^{+}(\Lambda_N)\right\}.$$

Тогда:

$$\Delta(\alpha^{+}(\delta),\delta) = \sup\left\{\left\|\varphi_\delta^{\alpha^{+}} - \varphi_0\right\| : \varphi_0 \in M; \left\|\varphi - \varphi_\delta\right\| \le \delta\right\} \le 24e^{2LT} qg((g\lambda)^{-1}(\delta).$$

Доказательство. Из определения $\alpha^{*} = \alpha_l$ следует, что для α_{l+1} выполняется неравенство:

$$g(\alpha_{l+1})\lambda(\alpha_{l+1}) > \delta = g(\alpha_{opt})\lambda(\alpha_{opt}).$$

Следовательно, в силу монотонности функций $g(\alpha)$ и $\lambda(\alpha)$, $\alpha_{l+1} \ge \alpha_{opt}$ и, следовательно:

$$\lambda(\alpha_{opt}) < \lambda(\alpha_{l+1}) \le q\lambda(\alpha_l) = q\lambda(\alpha_*).$$

Таким образом:

$$\frac{\delta}{\lambda(\alpha_*)} \le q\frac{\delta}{\lambda(\alpha_{opt})}.$$

В силу леммы 2, так как $M(\Lambda_N) \subseteq M^{+}(\Lambda_N)$:

$$\alpha^{*} = \alpha_l = \max\left\{\alpha_i : \alpha_i \in M(\Lambda_N)\right\} \le \alpha^{+} = \max\left\{\alpha_i : \alpha_i \in M^{+}(\Lambda_N)\right\}.$$

Из определения $M^{+}(\Lambda_N)$ и неравенства:

$$\left\|\varphi_\delta^{\alpha^{+}} - \varphi_0\right\| \le \left\|\varphi_\delta^{\alpha^{+}} - \varphi^{\alpha^{+}}\right\| + \left\|\varphi^{\alpha^{*}} - \varphi^{\alpha^{+}}\right\| + \left\|\varphi_\delta^{\alpha^{*}} - \varphi_0\right\|,$$

Следует:

$$\Delta(\alpha^{+}(\delta),\delta) = \sup\left\{\left\|\varphi_\delta^{\alpha^{+}} - \varphi_0\right\| : \varphi_0 \in M; \left\|\varphi_0 - \varphi_\delta\right\| \le \delta\right\} \le$$

$$\le 8e^{LT} g(\alpha_l) + \frac{8e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_l)} + \frac{8e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_l)} \le \frac{24e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_*)} \le q\frac{24e^{LT}\delta}{\lambda(\alpha_{opt})} = 24e^{LT} qg((g\lambda)^{-1}(\delta)).$$

Теорема доказана.

Применение рассмотренного подхода к решению линейной задачи для эллиптического уравнения исследовано в [11].

Библиографический список

1. Бакушинский, А.Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // ЖВМиМФ. – 1967. – Т. 7. – № 3. – С. 672–677.

2. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Наука, 1995.

3. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М.Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962.

4. Латес, Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латес, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1970.

5. Табаринцева, Е.В. Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычисл. математики. – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 259–271.

6. Табаринцева, Е.В. О решении некорректно поставленной задачи для нелинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Труды Института математики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 231–237.

7. Табаринцева, Е.В. Об оценке модуля непрерывности одной нелинейной обратной задачи / Е.В. Табаринцева // Труды Института математики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 253–257.

8. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 1(21). – С. 129–142.

9. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П.Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407. – № 3. – С. 316–318.

10. Pereverzev, S. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems / S. Pereverzev, E. Schock // SIAM J.Numer.Anal. 2005. V. 43. № 5. Pp. 2060–2076.

11. Hui Cao. A Carleman estimate and the balancing principle in the quasi-reversibility method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation / Hui Cao, M.V. Klibanov, S.V. Pereverzev // Inverse problems. 2009. V. 25. Pp. 21–34.

К содержанию