УДК 511.317 + 511.352

ОЦЕНКИ И СВОЙСТВА ЧИСЛА ДЕЛИТЕЛЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Р.Ж. Алеев, Н.А. Цыбина

Изучаются распределение числа делителей натуральных чисел на различных отрезках натурального ряда. Полученные свойства могут быть применены к изучению асимптотического поведения рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец некоторых классов конечных групп.

Ключевые слова: делители, число делителей, оценки числа делителей.

В предыдущей работе авторов [1] рассмотрены ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец конечных групп. В частности, приведённые там формулы для некоторых важных классов групп показывают, что количество делителей влияет на ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца конечной группы. В качестве примера приведём лемму 1.

Обозначение. Для натурального числа n пусть $\tau(n)$ – количество его натуральных делителей.

Лемма 1 ([2]). *Пусть G – циклическая группа порядка n. Тогда ранг группы единиц целочисленного группового кольца группы G равен:*

$$\left[\frac{n}{2}\right] - \tau(n) + 1 = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} - \tau(n) & \text{для нечетного } n, \\ \dfrac{n}{2} - \tau(n) + 1 & \text{для четного } n. \end{cases}$$

В лемме 1 есть «неинтересная» часть, вычисляемая легко по параметрам группы (а именно, для леммы 1 это $[n/2]$), и «интересная» часть, связанная с нахождением количества делителей некоторых чисел. Интерес ко второй части побуждается тем, что количество делителей числа напрямую не связано с данным числом. А именно, если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа в произведение степеней различных простых чисел (каноническое разложение), то количество делителей:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Итак, по лемме 1 для циклических групп нужно подсчитать число делителей натуральных чисел, что было проделано в диапазоне от 2 до $2^{25} = 33\,554\,432$. Отметим, что число делителей изменяется от 2 (это в точности простые числа) до 600 для $32\,432\,400$. В табл. 7 из [1] указаны возможные $\tau(n)$, количество $o(\tau(n))$ таких $\tau(n)$ в рассматриваемом диапазоне для n и минимальное значение $n = m(\tau(n))$ с данными $\tau(n)$. Вычисления производились в системе GAP [3]. В частности в той таблице мы имеем следующие числа с $o\big(\tau(n)\big) = 1$ (табл. 1).

Таблица 1

Значения $\tau(n)$ с $o\big(\tau(n)\big) = 1$

$\tau(n)$	$m(\tau(n))$
17	2^{16}
19	2^{18}
23	2^{22}
85	5308416
91	2985984
95	21233664
152	27525120
170	26542080
231	18662400
245	29160000
308	26127360
350	22680000
440	31933440
486	31046400
560	25945920
600	32432400

В данной работе мы анализируем полученные данные с точки зрения соответствия теоретическим результатам из [4].

1. Оценки числа делителей

Выделим следующие промежутки:

$$I_0 = \big[2, 2^{25} = 33\,554\,432\big], \qquad I_1 = [\,2^{10} = 1\,024, 2^{25}],$$

$$I_2 = \big[\,2^{15} = 32\,768, 2^{25}\big], \qquad I_3 = \big[\,2^{20} = 10\,485\,76, 2^{25}\big],$$

Итак:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3.$$

1.1. Отношение числа делителей к числу

Мы будем интересоваться, в каких пределах находится отношение $\tau(n)/n$. В силу бесконечности множества простых чисел (а более, точно в силу асимптотического закона распределения простых чисел) на любом достаточно большом промежутке имеется простое число, поэтому ограничение снизу при возрастании нижней границы промежутка, будет стремиться к 0. Следовательно, на данном промежутке I интерес имеет только:

$$\max_{n\in I}\frac{\tau}{n}.$$

Отбросим тривиальные случаи $n \in \{1,2\}$, когда $\tau(n) = n$. Тогда имеем:

I	$\max\limits_{n\in I}\frac{\tau}{n}.$	при n	I	$\max\limits_{n\in I}\frac{\tau}{n}.$	при n
I_0	3/4	4	I_2	0,002597	36 960
I_1	0,02963	1080	I_3	0,000237	1 081 080

Из этого мы видим, что отношение числа делителей к числу уменьшается при возрастании нижней границы промежутка.

1.2. Оценки числа делителей сверху

Как было отмечено, число делителей на достаточно большом промежутке всегда ограничено снизу 2, поскольку на этом промежутке обязательно есть простое число. Следовательно, на данном промежутке I интерес имеют только оценки сверху.

Первый результат принадлежит Вигерту (Wigert, 1907 г.), приведен в теореме 317 на с. 345 в [4].

Лемма 2 ([4]). *Верхний предел:*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{(\ln\tau(n))(\ln\ln n)}{\ln 2} = \ln 2,$$

то есть, если $\varepsilon > 0$, то:

$$\tau(n) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}},$$

для всех $n > n_0(\varepsilon)$ и:

$$\tau(n) > 2^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}},$$

для бесконечно многих значений n.

В силу этого было интересно узнать колебания функции $\tau(n) - 2^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}}$ н указанных промежутках I_0, I_1, I_2 и I_3. Однако оказалось, что:

$$\tau(n) - 2^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}} \in [a,b],$$

где:

$$\alpha = -65{,}424512 \text{ при } n = 33\,554\,393,$$

$$b = 532{,}936455 \text{ при } n = 32\,432\,400.$$

Так как граничные значения достигаются на числах из I_3, то отсюда следует, что на всех промежутках I_0, I_1, I_2 и I_3 колебания находятся в *одинаковых* пределах.

Другой результат приведен в теореме 432 на с. 478 в [4].

Определение. Если количество чисел меньших n, которые не имеют свойство, составляет $o(n)$ при $n \to \infty$, то мы скажем, что *почти все целые числа* имеют свойство.

Лемма 3 ([4]). *Если* $\varepsilon > 0$, *то:*

$$2^{(1-\varepsilon)\ln\ln n} < \tau(n) < 2^{(1+\varepsilon)\ln\ln n},$$

для почти всех целых чисел n.

Таким образом, $\tau(n)$ равен «обычно» примерно:

$$2^{\ln\ln n} = (\ln n)^{\ln 2} = (\ln n)^{0{,}693147}.$$

В отличие от предшествующего результата здесь мы говорим об оценках для почти всех n, а не для всех n. Снова интересно узнать колебания функции $\tau(n) - 2^{\ln\ln n}$ на указанных промежутках I_0, I_1, I_2 и I_3. Однако оказалось, что:

$$\tau(n) - 2^{\ln\ln n} \in [c, d],$$

где:

$$c = -5{,}221822 \text{ при } n = 33\,554\,393,$$

$$d = 592{,}788006 \text{ при } n = 32\,432\,400.$$

Опять, так как граничные значения достигаются на числах из I_3, то отсюда следует, что на всех промежутках I_0, I_1, I_2 и I_3 колебания находятся в одинаковых пределах.

Замечание. Следует обратить внимание на два обстоятельства.

1. Промежутки $[a, b]$ и $[c, d]$ весьма близки длине:

$$\text{длина } [a, b] \text{ равна } 598{,}360968,$$

$$\text{длина } [c, d] \text{ равна } 598{,}009827.$$

Да и границы тоже не сильно различаются, если учесть, что рассматриваются числа на промежутке $[2, 2^{25} = 33\,554\,432]$.

2. Еще более удивительно, что границы достигаются при *одинаковых* значениях n. Нижняя граница достигается при $33\,554\,393$ – *простое число, наибольшее из простых на промежутке* $[2, 2^{25} = 33\,554\,432]$.

Из таблицы 1 следует, что верхняя граница достигается при $32\,432\,400 = 2^4 * 3^4 * 5^2 * 7 * 11 * 13$ – *число, имеющее наибольшее число делителей, равное* 600, *на промежутке* $[2, 2^{25} = 33\,554\,432]$.

2. Оценка числа делителей в среднем

2.1. Средний порядок числа делителей

Если $f(n)$ – арифметическая функция и $g(n)$ какая-то функция n, для которой:

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\sim g(1)+g(2)+\cdots+g(n),$$

мы будем говорить, что $f(n)$ имеет средний порядок (the average order) функции $g(n)$.

На с. 347 в [4] приведены следующие результаты.

Лемма 4 ([4], Теорема 319)**.** *Средним порядком* $\tau(n)$ *является* $\ln n$.

Приведём вычисления среднего порядка для некоторых чисел, а именно, рассмотрим степени 2, а также для тех чисел на промежутке $[2, 2^{25}=33\,554\,432]$, у которых число делителей встречается всего 1 раз (табл. 2). Последнее обстоятельство связано с тем экстремальным свойством, которое было отмечено в конце предыдущего раздела.

Таблица 2

n	$\tau(n)$	$\ln n$	$\tau(n)-\ln n$	n	$\tau(n)$	$\ln n$	$\tau(n)-\ln n$
2	2	0,693147	1,306853	5 308 416	85	15,484804	69,515196
4	3	1,386294	1,613706	2 985 984	91	14,909440	76,090560
8	4	2,079442	1,920558	21 233 664	95	16,871098	78,128902
16	5	2,772589	2,227411	27 525 120	152	17,130610	134,869390
32	6	3,465736	2,534264	26 542 080	170	17,094242	152,905758
64	7	4,158883	2,841117	18 662 400	231	16,742021	214,257979
128	8	4,852030	3,147970	29 160 000	245	17,188308	227,811692
256	9	5,545177	3,454823	26 127 360	308	17,078494	290,921506
512	10	6,238325	3,761675	22 680 000	350	16,936994	333,063006
1 024	11	6,931472	4,068528	31 933 440	440	17,279164	422,720836
2^{11}	12	7,624619	4,375381	31 046 400	486	17,250993	468,749007
2^{12}	13	8,317766	4,682234	25 945 920	560	17,071525	542,928475
2^{13}	14	9,010913	4,989087	32 432 400	600	17,294668	582,705332
2^{14}	15	9,704061	5,295939				
2^{15}	16	10,397208	5,602792				
2^{16}	17	11,090355	5,909645				
2^{17}	18	11,783502	6,216498				
2^{18}	19	12,476649	6,523351				
2^{19}	20	13,169796	6,830204				
2^{20}	21	13,862944	7,137056				
2^{21}	22	14,556091	7,443909				
2^{22}	23	15,249238	7,750762				
2^{23}	24	15,942385	8,057615				
2^{24}	25	16,635532	8,364467				
2^{25}	26	17,328680	8,671320				

Результаты вычислений для степеней 2 наводят на мысль о некой регулярности таких чисел. На самом деле это имеет место, но прежде введём обозначение.

Обозначение. Пусть p – простое, а m – неотрицательное цельное число. Тогда обозначим:

$$\delta(p,m) = \tau(p^m) - \ln p^m.$$

Сразу же отметим, что:

$$\delta(p,0) = 1.$$

Теперь результат, о котором шла речь, несмотря на простоту, он представляется весьма любопытным.

Теорема. *Пусть p – простое, а m – неотрицательное целое число. Тогда:*

$$\delta(p,m) = \tau(p^m) - \ln p^m = 1 + m(1 - \ln p).$$

Поэтому $\{\delta\ (p,m)\}_{m=0}^{\infty}$ *– арифметическая прогрессия с начальным членом* 1 *и разностью* $1 - \ln p$. *Кроме того,* $\{\delta\ (2,m)\}_{m=0}^{\infty}$ *– возрастающая прогрессия, а при нечетных p прогрессия* $\{\delta\ (p,m)\}_{m=0}^{\infty}$ *убывает, причем:*

1) *все члены* $\{\delta\ (2,m)\}_{m=0}^{\infty}$ *положительны;*

2) *при* $p \geq 11$ *в прогрессии* $\{\delta\ (p,m)\}_{m=0}^{\infty}$ *положителен только начальный член* $\delta(p,0) = 1$*;*

3) *при* $p \in \{3,5,7\}$ *в прогрессии* $\{\delta\ (p,m)\}_{m=0}^{\infty}$ *положителен начальный член* $\delta(p,0) = 1$ *и*

$\delta(3,1) = 0{,}901388,$ $\delta(3,2) = 0{,}802775,$ $\delta(3,3) = 0{,}704163,$

$\delta(3,4) = 0{,}605551,$ $\delta(3,5) = 0{,}506939,$ $\delta(3,6) = 0{,}408326,$

$\delta(3,7) = 0{,}309714,$ $\delta(3,8) = 0{,}211102,$ $\delta(3,9) = 0{,}112489,$

$\delta(3,10) = 0{,}013877,$ $\delta(3,11) = -0{,}084735,$

$\delta(5,1) = 0{,}390562,$ $\delta(5,2) = -0{,}218876,$

$\delta(7,1) = 0{,}054090,$ $\delta(7,2) = -0{,}108180.$

Доказательство. В самом деле:

$$\delta(p,m) = \tau(p^m) - \ln p^m = m + 1 - m \ln p = 1 + m(1 - \ln p).$$

Так, при нечетном p будет $1 - \ln p < 0$, то про монотонность все понятно.

Так как:

$$e^2 = 7{,}389056098930650227230427460575,$$

то при $p \geq 11$:

$$\delta(p, 1) = 2 - \ln p < 0,$$

и в этом случае в прогрессии положителен только начальный член. Все остальное получается непосредственными вычислениями.

2.2. Теорема Дирихле

Значительно более точным по сравнению с леммой 4 результатом является следующая классическая теорема Дирихле.

Лемма 5 ([4], Теорема 320):

$$S_n = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n) = n \ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}),$$

где $\gamma = 0,57721566490153286060651209008240$ – *константа Эйлера.*

Обозначения. Пусть n – натуральное число. Тогда обозначим:

$$S_n = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n), \alpha(n) = \frac{S_n}{n},$$

и

$$\lambda(n) = \ln n + (2\lambda - 1).$$

Из леммы 5 сразу получаем следующий результат.

Следствие. $\alpha(n) = \lambda(n) + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Следующая таблица (табл. 3) показывает насколько близки $\alpha(n)$ и $\lambda(n)$.

Таблица 3

n	S_n	$\alpha(n)$	$\lambda(n)$	$\alpha(n) - \lambda(n)$
2^5	119	3,71875	3,620167	0,098533
2^{10}	7257	7,086914	7,085903	0,001011
2^{15}	345780	10,552368	10,551639	$7,291259 * 10^{-4}$
2^{20}	14698337	14,017426	14,017374	$5,154978 * 10^{-5}$
2^{25}	586636093	17,48312	17,483111	$7,124042 * 10^{-6}$

Библиографический список

1. Алеев, Р.Ж. Вычисление рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец конечных групп / Р.Ж. Алеев, Н.А. Цыбина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». – 2015. – № 1. – С. 71–85.

2. Aleev, R.Z. Higman’s central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers numbers / R.Z. Aleev // Intern. Journ. Algebra and Computations. – 1994. – Vol. 4. – Pp. 309–358.

3. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.4. – 2014.

4. Hardy, G.H. An Intoduction to the Theory of Numbers, Sixth Edition / G.H. Hardy, E.M. Wright // Oxford University Press. – 2008. – 656 p.

К содержанию